TD 7 : espaces de Lebesgue

Exercice 1.— Espace mesuré fini

Soit (X, μ) un espace mesuré. On suppose qu'il existe une fonction f strictement positive telle que f et $1/f$ soient intégrables. Montrer qu'alors $\mu(\mathrm{X}) < \infty$.

Exercice 2.— Séparabilité des espaces de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$

Parmi les espaces de Banach $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ ($p \in [1, +\infty]$), lesquels sont séparables ?

Exercice 3.— Continuité de l'opérateur de translation

Soit $p \in [1, +\infty]$ et $h \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}_h : & \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & (x \mapsto f(x-h)) \end{array}$$

définit bien un opérateur continu de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ dans lui-même.
Montrer que si $p \neq \infty$, on a, pour tout $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$,

$$\|\mathrm{T}_h(f) - f\|_p \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Qu'en est-il pour $p = \infty$?

Exercice 4.— Représentation duale des normes L^p

Soit (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. On note q l'exposant conjugué de p. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$,

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_{\mathrm{X}} f g \, d\mu \,\middle|\, \|g\|_q = 1 \right\}.$$

Montrer que ce résultat s'étend au cas $p = \infty$ si (X, μ) est σ-fini.

Exercice 5.— Application du théorème du graphe fermé

Soit (X, μ) un espace mesuré et $p, p' \in [1, \infty]$ tels que $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu) \subset \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu)$. Montrer que l'inclusion

$$\mathrm{inc} : \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu)$$

est continue.

Exercice 6.— Emboîtement des espaces de Lebesgue

Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\mathbb{N}, \mathrm{card})$.

(a) Soit $1 \leq p < p' \leq \infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^{p'}(\mathbb{N})$. Montrer que l'inclusion

$$\mathrm{inc} : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^{p'}(\mathbb{N})$$

est continue et calculer sa norme.

(b) Soit (X,μ) un espace mesuré fini et $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. Montrer que $\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X},\mu) \subset \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$. Montrer que l'inclusion

$$\mathrm{inc} : \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X},\mu) \to \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$$

est continue et calculer sa norme.

(c) Réciproquement, soit (X,μ) un espace mesuré tel qu'il existe $1 \leq p < p' \leq \infty$ pour lesquels $\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X},\mu) \subset \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$. Montrer que (X,μ) vérifie la condition de finitude suivante :

$$\sup\left\{\mu(\mathrm{A}) \,\middle|\, \mathrm{A} \in \mathscr{A}, \mu(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}^*\right\} < \infty.$$

Exercice 7.— Relation entre les espaces L^p

Soit (X,μ) un espace mesuré et $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}.$$

2. Montrer que pour cette valeur de θ, toute fonction mesurable $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ vérifie

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\theta \cdot \|f\|_r^{1-\theta}.$$

3. En déduire que $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu) \subset \mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$ et que l'inclusion

$$\mathrm{inc} : \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu) \to \mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$$

est continue si l'on munit $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu)$ de sa norme naturelle $f \mapsto \|f\|_p + \|f\|_r$.

4. Montrer qu'en outre, si $q < \infty$, $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu) \subset \mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$ est dense.
5. On suppose maintenant $1 \leq p < q < r \leq \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions convergant vers f dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$ et bornée dans $\mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu)$. Montrer qu'elle converge vers f dans $\mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu)$.
6. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{I}_f = \left\{p \in [1,+\infty] \,\middle|\, f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)\right\}$$

est un intervalle.

7. Montrer que si I_f contient $[p_0,+\infty]$, alors $\|f\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|_\infty$.