M1 Mathématiques approfondies, second semestre 2011-2012
Surfaces de Riemann

Jean-Claude Sikorav

version finale

Table des matières

1 Surfaces de Riemann et objets associés

1.1 Définitions

Une *surface de Riemann* est un espace topologique séparé connexe X, muni d'un *atlas holomorphe* $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ où

- $(u_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X
- la *carte* $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de $\mathbb{C}$
- tout *changement de cartes* $\psi_{i,j} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est holomorphe.

Plus précisément, la structure de surface de Riemann est définie par une classe d'équivalence d'atlas holomorphes, deux tels atlas étant dits équivalents si leur réunion est encore un atlas holomorphe. Ou encore on peut considérer l'atlas maximal associé, formé de toutes les cartes $(U, \varphi : U \to \mathbb{C})$ telles que $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ est holomorphe pour tout $i \in I$: cet atlas contient l'atlas donné (U_i, φ_i), et est clairement le plus grand atlas holomorphe contenant (U_i, φ_i). Une carte de l'atlas holomorphe sera appelée *carte holomorphe*, ou simplement carte. Elle est *centrée en* p si $\varphi(p) = 0$.

Noter que par restriction et homothétie, on peut toujours trouver une carte holomorphe centrée en un point quelconque ayant pour image le disque unité Δ.

Notation. Il sera commode de noter une carte holomorphe centrée z (ou w, ζ,...), notant ainsi à la fois la fonction et sa valeur. On notera aussi $z = x + iy$), où (x, y) est alors une carte réelle, ou système de coordonnées réelles.

Soient $(X, (U_i, \varphi_i)_{i\in I})$ et $(Y, (V_j, \psi_j)_{j\in J})$ deux surfaces de Riemann. Un isomorphisme (ou *biholomorphisme*) entre X et Y est une bijection qui envoie l'atlas maximal de X sur celui de Y (c'est en particulier un homéomorphisme. Autrement dit, les applications $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sont holomorphes pour toutes les cartes φ et ψ dans les atlas holomorphes maximaux de X et de Y (il suffit que ce soit vrai dans des atlas holomorphes de X et de Y). On notera $X \approx Y$ la relation d'équivalence ainsi définie.

Une surface de Riemann non compacte est dite *ouverte*.

Remarques. 1) Le jacobien du changement de cartes $\psi_{i,j}$, vu comme une application entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ est $|\psi'_{i,j}|^2$ qui est positif, donc *toute surface de Riemann est canoniquement orientée*.

2) Contrairement au cas des variétés différentiables (cf. Géométrie avancée), nous n'avons pas imposé de condition de dénombrabilité sur X : existence d'une base d'ouverts ou d'un atlas dénombrable, métrisabilité, σ-compacité, paracompacité. En fait, nous verrons que ces propriétés sont automatiques pour les surfaces de Riemann (théorème de Radó). Nous pourrons alors dire qu'une surface de Riemann est une variété complexe (ou holomorphe) de dimension un.

3) Nous avons imposé qu'une surface de Riemann soit connexe, mais parfois il sera commode de considérer qu'un ouvert quelconque, connexe ou non, d'une surface de Riemann est une surface de Riemann est une surface de Riemann.

4) Comme pour les variétés, la structure de surface de Riemann peut être définie directement par un atlas sur un ensemble, qui fournit aussi la structure topologique. La difficulté étant de prouver que l'espace est séparé.

1.2 Exemples de surfaces de Riemann

Les exemples 1), 2) et 4) sont des surfaces ouvertes, 3) et 5) des surfaces compactes.

1) $\mathbb{C}$ est bien sûr le premier exemple, on l'appellera *droite complexe*, ou *droite complexe affine* (et non «plan complexe», qui pour nous sera $\mathbb{C}^2$).

2) Tout ouvert connexe d'une surface de Riemann est une surface de Riemann. En particulier, tout ouvert de $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann avec un atlas à une carte. Deux cas particulièrement intéressants :

- $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (disque unité), que l'on notera Δ
- $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ (demi-plan *supérieur*, ou *de Poincaré*, ou *hyperbolique*, ou *de Lobatchevsky*), que l'on notera $\mathbb{H}$.

3) La *sphère de Riemann*, ou *droite projective complexe*, notée $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{CP}^1$ ou $\overline{\mathbb{C}}$. Comme ensemble, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La structure est donnée par un atlas à deux cartes : $U_0 = \mathbb{C}$, $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, $U_\infty = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$,

$\varphi_\infty(z) = \dfrac{1}{z}$ si $z \neq \infty$, $\varphi_\infty(\infty) = 0$. Il n'y a donc qu'un changement de cartes (avec son inverse), $\psi_{0,\infty}(z) = \dfrac{1}{z}$, de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$. Exercice : montrer avec cette définition que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est séparé, connexe et compact.

Variante via des projections stéréographiques : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$ identifié à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(Z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |Z|^2 + t^2 = 1\}$. Les deux cartes sont

- $U_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{N\}$, où $N = (0,1)$ est le pôle nord, $\varphi_0 = z =$ projection stéréographique de centre N sur $\mathbb{C} \times \{0\} = \mathbb{C}$, soit $z = \dfrac{Z}{1-t}$;
- $U_\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{S\}$, où $S = (0,-1)$ est le pôle sud, $\varphi_\infty = w =$ (conjugaison compexe) $\circ$ (projection stéréographique de centre S sur $\mathbb{C} \times \{0\} = \mathbb{C}$), soit $w = \dfrac{\overline{Z}}{1+t}$.

Le changement de cartes est obtenu en exprimant w en fonction de z : $w = \overline{z}\dfrac{1-t}{1+t}$, avec $1-t = \dfrac{|Z|}{|z|} = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{|z|}$, d'où $\dfrac{1-t}{1+t} = \dfrac{1}{|z|^2}$, donc $w = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{z}$. On retrouve le même atlas, mais cette fois le fait que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est séparé et compact est évident. On a aussi le fait que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est topologiquement une sphère de dimension deux.

Remarque. Le nom de droite projective complexe vient de ce qu'on peut définir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le quotient $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$ étant formé des points $[(1,z)]$ et $\{\infty\} = [(0,1)] = [(0,z)]$ $(\forall z \neq 0)$. Nous décrirons plus tard l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ de dimension quelconque.

4) Les *tores* $T_\Lambda := \mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est un *réseau* de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang maximal, soit deux, donc $\Lambda \approx \mathbb{Z}^2$. On munit T_Λ de la topologie quotient, qui ne dépend pas de Λ à homéomorphisme près. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $U \cap (U+\lambda) = \emptyset$ pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, ce qui est vrai par exemple si $\mathrm{diam}(U) < \mathrm{syst}(\Lambda) := \min_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} |\lambda|$ (*systole* du réseau), la projection $U \subset \mathbb{C} \to T_\lambda$ est un homéomorphisme sur son image. Son inverse est par définition la carte φ_U. Exercice : montrer que φ_U est bien un homéomorphisme sur son image, que les changements de cartes $\varphi_{U,U'}$ sont localement des translations par des éléments de Λ, et qu'on peut supprimer «localement» si U et U' sont connexes.

À multiplication par un scalaire non nul près, ce qui ne change pas T_Λ à isomorphisme près, Λ admet une base $(1,z)$ où $z \in \mathbb{H}$. On notera alors $T_{\langle 1,z\rangle} = T_z$. De plus, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $(cz+d, az+b)$ est aussi une base de Λ, donc $T_z \approx T_{\frac{az+b}{cz+d}}$ (noter que $\mathrm{Im}\,(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2} = \dfrac{1}{|cz+d|^2} > 0$). On peut alors trouver z dans un domaine fondamental de l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ par homographies. Un tel domaine est par exemple $D = \{|z| > 1, -\dfrac{1}{2} \leq |z| < \dfrac{1}{2}\}$, cf [Se3]. Exercice : montrer que T_Λ est isomorphe à $T_{\Lambda'}$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda' = \alpha\Lambda$. En déduire que tout T_Λ est isomorphe à T_z pour un unique $z \in D$.

5) *Courbes algébriques affines.* En général, elles sont définies par une équation $P(x,y) = 0$ dans $\mathbb{C}^2$, ou par $k \geq n-1$ équations $P_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$ dans $\mathbb{C}^n$ (on ne peut pas toujours arriver à $k = n-1$, cf le cours de Géométrie Algébrique). Nous regardons un exemple particulier important.

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ [on utilise une minuscule puisque X est réservé pour les surfaces de Riemann] un polynôme sans zéro multiple, alors $X_P := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$ a une structure de surface de Riemann, chaque point $(x_0, y_0) \in X_P$ étant dans le domaine de définition d'une carte de la forme

- $\varphi(x,y) = x$ si $P'(x_0) \neq 0$ (par définition, si $p(x) = \sum a_n x^n$, $P'(x)$ est le polynôme $\sum n a_n x^{n-1}$, de sorte que $DP(x).h = P'(x)h$),
- $\varphi(x,y) = y$ si $P'(x_0) = 0$ (noter qu'alors $P(x_0) \neq 0$ donc $y_0 \neq 0$).

Exercice : montrer qu'on peut effectivement définir un tel atlas et qu'il est holomorphe. Montrer que $\dfrac{x}{y}$ induit un biholomorphisme du complémentaire d'un compact convenable sur un disque épointé Δ_a^*.

Le cas d'un polynôme de degré trois est particulièrement intéressant. À normalisation près on a $P(x) = x^3 + px + q$ avec $4p^3 + 27q^2 \neq 0$ pour que P ait des racines simples. En utilisant l'inversion de l'intégrale elliptique $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$, on verra que X_P est isomorphe à un tore T_z privé d'un point. *Plus précisément, il il existe une fonction holomorphe $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, dite *fonction modulaire*, qui est invariante par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ agissant via les homographies $\dfrac{az+b}{cz+d}$, induisant une bijection du quotient sur $\mathbb{C}$, et telle que X_{x^3+px+q} est isomorphe à (T_z privé d'un point) si et seulement si $\dfrac{4p^3}{4p^3+27q^2} = \dfrac{j(z)}{1728}$ (le facteur 1728 est introduit pour avoir $j(z) \sim e^{-2\pi i z}$ quand $\operatorname{Im} z \to +\infty$). Exercice : montrer que X_{x^3+1} est isomorphe à T_ω privé d'un point, où $\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, racine primitive cubique de l'unité.*

6) *Courbes algébriques projectives.* Disons quelques mots sur la version projective de l'exemple 5) en degré trois. Le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est le quotient $(\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\mathbb{C}^*$, il admet un plongement de $\mathbb{C}^2$: $(x,y) \mapsto [(1,x,y)]$. Il est compact et le complémentaire de $\mathbb{C}^2$, qui est l'ensemble des points $[(0,x,y)]$, s'identifie à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (droite à l'infini). La courbe $X = X_{x^3+px+q}$ a pour adhérence $\overline{X} = X \cup [(0,0,1)]\}$ (on ajoute le point à l'infini dans la direction verticale). Nous verrons que $\overline{X}$ est une surface de Riemann, isomorphe à T_z.

Un des grands théorèmes du cours sera le suivant : *toute surface de Riemann compacte se réalise comme courbe algébrique projective.* (Pas toujours dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, à moins d'autoriser des points doubles, mais toujours dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$). Une variante de ce résultat est qu'une surface de Riemann compacte est essentiellement la même chose qu'une extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$, le corps des fractions à une indéterminée. Ou plus précisément qu'une extension de $\mathbb{C}$ de type fini et de degré de transcendance un.

1.3 Fonctions holomorphes, degré en un point

Une fonction holomorphe sur la surface de Riemann X est une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ qui est continue et telle que $f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe sur $\varphi(U)$ pour toute carte holomorphe φ de X, ou pour toute carte dans un atlas holomorphe. L'ensemble des fonctions holomorphes sur X est un anneau (et une $\mathbb{C}$-algèbre) pour les lois usuelles, on le notera $\mathcal{O}(X)$. Il est intègre puisqu'une fonction holomorphe non nulle a des zéros isolés.

Proposition. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante.*

(i) Si $p \in X$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et une carte holomorphe centrée φ en p telle que $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, soit $f = \varphi^d$. L'entier $d = \deg_p(f)$ ne dépend que de f et de p, et s'appelle le degré *de f en p. On l'appelle aussi* multiplicité *de f en p. On a $\deg_p(f) = 1$ si et seulement si $Df(p) \neq 0$.*

(ii) Pour tout $q \in X \setminus \{f(p)\}$ assez proche de p, on a $\operatorname{card}(f^{-1}(\{q\}) \cap U) = \deg_p(f)$. En particulier, f est ouverte.

(iii) Un point $p \in X$ tel que $Df(p) = 0$ ou de façon équivalente $\deg_p(f) \geq 2$ est un point critique*, ou* point de ramification*, leur ensemble est noté* $\operatorname{Crit}(f)$ *ou* $R(f)$*. Cet ensemble est discret et fermé, ou de façon équivalente* localement fini *c'est-à-dire qu'il rencontre tout compact en un ensemble fini.*

Démonstration. (i) Soit φ une carte holomorphe centrée en p. Alors $g = f \circ \varphi^{-1}$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 et telle que $g(0) = 0$. Donc soit 1) g est identiquement nulle, soit 2) il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $g(z) = z^d h(z)$ avec h holomorphe et $h(0) \neq 0$.

Dans le cas 1), f est localement constante en p, et dans le cas 2), f n'est constante dans aucun ouvert contenu dans U. Soit E l'ensemble des points vérifiant le cas 1). C'est un ouvert, et si $q \in \overline{E}$, q tout voisinage de q contient un ouvert où f est égale à $f(p)$, donc q ne vérifie pas le cas 2), donc $q \in E$, donc E est fermé. Par connexité, $E = \emptyset$ ou X, et dans le second cas f est constante. Comme f n'est pas constante, $E = \emptyset$.

On est donc toujours dans le cas 2). La fonction holomorphe h, qui est non nulle en 0, a une racine d-ième holomorphe k au voisinage de 0, donc on a $g(z) = G(z)^d$, où $G(z) = zk(z)$ est holomorphe. De plus $G'(0) = k(0) \neq 0$, donc G est localement un biholomorphisme, donc $\psi = G^{-1} \circ \psi_0$ est une carte holomorphe centrée en $f(p)$. Finalement, on a $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, donc d a la propriété annoncée.

Pour montrer que d est unique, on observe que c'est le plus petit entier tel que $(f \circ \varphi^{-1})^{(d)}(0) \neq 0$, et que cette propriété est indépendante du choix des cartes holomorphes centrées φ et ψ. En particulier, $d = 1$ si et seulement si $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) \neq 0$, soit $Df(p) \neq 0$. L'unicité résultera aussi de (ii).

(ii) Ces propriétés sont évidentes pour l'application $z \mapsto z^d$ au voisinage de 0, donc elles sont aussi vraies pour f.

(iii) Si $p \in R(f)$ et U est un voisinage sur lequel on a $\psi \circ f = \varphi^d$, on a $R(f) \cap U = \{p\}$ puisque la dérivée de z^d est non nulle hors de 0, donc $R(f)$ est discret. De plus, la caractérisation $Df(p) = 0$ montre qu'il est fermé.

Points de ramification, points de branchement. Les points p tels que $\deg_p(f) > 1$ sont d'habitude appelés points de ramification. Leurs image sont les *points de branchement* (*branch points*), on notera leur ensemble $B(f)$.

Corollaire. *Si X est une surface de Riemann, une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset X$ est une carte holomorphe si et seulement si elle est injective. Donc la donnée de tous les anneaux $\mathcal{O}(U)$ détermine la structure de surface de Riemann.*

Proposition 2. *Si X est compacte, toute fonction holomorphe est constante.*

Démonstration. Par compacité, $|f|$ a un maximum, donc f n'est pas ouverte, donc elle est constante.

Remarque. En revanche, si X est ouverte, $\mathcal{O}(X)$ n'est pas réduit aux constantes (mais nous ne montrerons pas ce fait dans le cours). Il est même énorme, par exemple il contient toujours $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, l'anneau des fonctions entières : si $f \in \mathcal{O}(X) \setminus \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ s'injecte dans $\mathcal{O}(X)$ via $h \mapsto h \circ f$. On peut aussi montrer que X est une variété de Stein, c'est à-dire admet un plongement holomorphe propre $f = (f_1, \cdots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{O}(X)$, dans $\mathbb{C}^n$. La question est ouverte de savoir si on peut toujours prendre $n = 2$.

1.4 Applications holomorphes

Définitions. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application $f : X \to Y$ est *holomorphe* si elle est continue et si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe pour tout couple (φ, ψ) de cartes holomorphes de X et de Y. Il est clair qu'il suffit que ce soit vrai pour φ et ψ dans des atlas holomorphes, pas forcément maximaux. L'application f est *biholomorphe* si elle est holomorphe, bijective et d'inverse holomorphe : c'est équivalent à la définition donnée au tout début.

La structure locale d'une fonction holomorphe s'étend immédiatement au cas d'une application holomorphe :

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann.*

(i) Soit $p \in X$, et soit ψ une carte holomorphe centrée en $f(p)$. Il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et une carte holomorphe centrée φ en p, tels que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, soit $\psi \circ f = \varphi^d$. L'entier $d = \deg_p(f)$ ne dépend que de f et de p, et s'appelle le degré de f en p. *On l'appelle aussi* multiplicité *de f en p. On a $\deg_p(f) = 1$ si et seulement si $Df(p) \neq 0$.*

(ii) Pour tout $q \in X \setminus \{f(p)\}$ assez proche de p, on a $\mathrm{card}(f^{-1}(\{q\}) \cap U) = \deg_p(f)$. En particulier, f est ouverte.

(iii) L'ensemble des points de ramification

$$R(f) = \{p \in X \mid \deg_p(f) \geq 2\} = \{p \in X \mid Df(p) = 0\}$$

est discret et fermé, ou de façon équivalente localement fini. Son image $B(f)$ est l'ensemble des points de branchement.

Démonstration. (i) La fonction $g = \psi \circ f$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de p, donc il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et une carte φ centrée en p telle que $g = \varphi^d$ soit $\psi \circ f = \varphi^d$.

Pour montrer que d est unique, on observe que c'est le plus petit entier tel que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(d)}(0) \neq 0$, et que cette propriété est indépendante du choix des cartes centrées φ et ψ. En particulier, $d = 1$ si et seulement si $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) \neq 0$, soit $Df(p) \neq 0$. L'unicité résultera aussi de (ii).

(ii) et (iii) Preuves identiques au cas des fonctions.

Corollaire. *Une application holomorphe injective entre surfaces de Riemann est un biholomorphisme sur son image.*

Démonstration. En effet, la propriété (ii) implique que le degré est 1 en tout point donc f est partout biholomorphiquement équivalente à $z \mapsto z$.

1.5 Fonctions méromorphes

Définition. Soit X une surface de Riemann. Une *fonction méromorphe* sur X est une fonction holomorphe f définie sur $X \setminus P$ où P est un sous-ensemble localement fini, et qui a un pôle au voisinage de chaque point de p : ceci veut dire que si φ est une carte holomorphe centrée en p, $f \circ \varphi^{-1}$ a un pôle en 0. C'est alors clairement vrai pour toute carte holomorphe centrée, avec un pôle de même ordre, appelé ordre du pôle p. Si cet ordre est k, on peut écrire $f = z^{-k}h$ où z est une carte holomorphe centrée et h est holomorphe $h(p) \neq 0$. Donc h a localement une racine k-ième g, et $w = zg^{-1}$ est une carte holomorphe centrée, telle que $f = w^{-k}$.

Fonctions méromorphes vues comme applications holomorphes $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. À une fonction méromorphe $f : X \setminus P \to \mathbb{C}$ on associe une application holomorphe $\widetilde{f} : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en prolongeant f par ∞ sur D. Pour prouver que $\widetilde{f}$ est holomorphe, il suffit de le faire près de $p \in D$. Soit $\varphi : U \to \mathbb{C}$ une carte holomorphe centrée en p, avec U assez petit pour que $U \cap D = \{p\}$. Par hypothèse on a $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^{-d}h(z)$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, h holomorphe sur $\varphi(U) \setminus \{0\}$, et $h(0) \neq 0$. Quitte à diminuer U on peut supposer que h ne s'annule pas. Utilisant la carte φ_∞ définie sur $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, il vient $\varphi_\infty \circ \widetilde{f}(z) = \frac{z^d}{h(z)}$ sur $\varphi(U)$: donc $\widetilde{f}$ est holomorphe près de p. Donc $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\widetilde{X}$. De plus, elle n'est pas constamment égale à ∞.

Réciproquement, si $h : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une application holomorphe qui n'est pas constamment égale à ∞, $P = h^{-1}(\{\infty\})$ est discret et fermé, et $f = h_{|X\setminus P}$ est holomorphe sa restriction à valeurs dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0\}$, donc est une fonction holomorphe. De plus, si $h(p) = \infty$, et $w = \frac{1}{z}$ est la carte standard centrée en ∞, il existe une carte φ centrée en p telle que $w \circ h = \varphi^d$, soit $h \circ \varphi^{-1}(z) = z^{-d}$ si $z \neq 0$, donc f est méromorphe. On obtient ainsi la

Proposition. *L'application $f \mapsto \widetilde{f}$ est une bijection entre les fonctions méromorphes sur X et les applications holomorphes de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non identiquement égale à ∞.*

Notation. Nous identifierons $\widetilde{f} = f$.

Si f et g sont deux fonctions méromorphes ayant un pôle au voisinage de p, alors en utilisant une carte holomorphe centrée z en p on voit que $f + g$ est holomorphe ou a un pôle en p, et de même pour fg. Et que si $f \neq 0$, $P = f^{-1}(\{0\})$ est discret et fermé, $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $X \setminus P$, et a un pôle en p si $f(p) = 0$. On en déduit la

Propriété. *Si X est une surface de Riemann, l'ensemble des fonctions méromorphes est un corps pour les lois usuelles. On le note $\mathcal{M}(X)$, on note $\mathcal{M}^*(X)$ le groupe multiplicatif des fonctions méromorphes non nulles.*

Remarque. Nous verrons que $\mathcal{M}(X)$ contient toujours des fonctions non constantes, de plus :

- si X est compacte, $\mathcal{M}(X)$ est une extension algébrique finie quelconque de $\mathbb{C}(x)$
- si X est ouverte, $\mathcal{M}(X)$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}(X)$ (si X est un ouvert de $\mathbb{C}$, c'est essentiellement le théorème de Mittag-Leffler).

1.6 Applications holomorphes propres

Rappel. Une application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. Ceci implique qu'elle est fermée. Évidemment, c'est toujours le cas si X est compact. Et si Y est compact, cela implique que X est compact.

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann, et soit $y_0 \in Y$. Soit $\psi : V \approx W \subset \mathbb{C}$ une carte holomorphe centrée en y.*

(i) L'image réciproque $f^{-1}(\{y_0\})$ est formée d'un nombre fini de points $x_1, \cdots, x_k$. De plus, pour $r > 0$, tel que $\Delta_r \subset W$ ($\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$), et assez petit, il existe des cartes centrées en les x_i, $\varphi_i : U_i \approx \Delta_{r_i}$, de domaines disjoints, telles que

$$f^{-1}(\psi^{-1}(V)) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$$
$$(\forall i = 1, \cdots, k) \qquad \psi \circ f_{|U_i} = \varphi_i^{d_i} \;,\; d_i = \deg_{x_i}(f).$$

(ii) La somme $d = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} \deg_x(f)$ est non nulle (c'est-à-dire que f est surjective) et ne dépend pas de y_0. On la note $\deg(f)$, *c'est le* degré (global) *de f.*

(iii) On a $\deg(f) = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme.

(iv) L'ensemble des points de branchement $B(f) = f(R(f)) \subset Y$ est localement fini.

Démonstration.

(i) Cette image réciproque est un ensemble compact et discret, donc fini. Par le théorème de forme normale d'une application holomorphe, il existe des cartes centrées en les x_i, $\varphi_i^0 : U_i^0 \approx \Delta_{r_i^0}$, telles que $f(U_i^0) \subset V$ et $\psi \circ f_{|U_i} = \varphi_i^{d_i}$, $d_i = \deg_{x_i}(f)$.

Montrons que pour $r > 0$ assez petit, on a $f^{-1}(\psi^{-1}(\Delta_r)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i^0$. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(x_n \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} U_i^0$ telle que $f(x_n) \to y_0$. L'ensemble $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact, donc x_n reste dans un compact de X, donc quitte à extraire on peut supposer que x_n converge vers $x \in X$. On a $f(x) = \lim f(x_n) = y_0$, mais $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_i^0$ ce qui contredit le fait que x doit être un des x_i.

Soit $r > 0$ assez petit pour que $\Delta_r \subset W$, $f^{-1}(\psi^{-1}(\Delta_r)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i^0$. Alors $r_i = r^{\frac{1}{d_i}}$ est au plus égal à r_0^i. Posons $U_i = \varphi^{-1}(\Delta_{r_i})$ et $\varphi_i = \varphi_i^0 | U_i$. Quitte à diminuer r, les U_i sont disjoints et toutes les autres propriétés de (i) sont vérifiées.

(ii) La surjectivité de f vient de ce que $f(X)$ est ouvert puisque f est holomorphe non constante, et fermé puisque f est propre. De plus, si $y \in \psi^{-1}(\Delta_r) \setminus \{y_0\} = \psi^{-1}(\Delta_r \setminus \{0\})$, l'image réciproque $f^{-1}(\{y\})$ est la réunion disjointe des $f^{-1}(\{y\}) \cap U_i$, $1, 1 \cdots, k$, et $f^{-1}(\{y\}) \cap U_i$ est en bijection avec $(\psi \circ f \circ \varphi_i^{-1})^{-1}(\{\psi(y)\}) = \{z \in \Delta_{r_i} \mid z^{r_i} = \psi(y)\}$, donc a exactement d_i points. Enfin, chacun de ces points est de degré 1, puisque la dérivée de z^{r_i} est non nulle hors de 0. Donc

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \deg_x(f).$$

La somme à droite est donc localement constante en y_0, et comme X est connexe elle est constante.

(iii) En effet, pour tout $f^{-1}(y)$ est réduit à un point x, avec $\deg_x(f) = 1$, donc f est un biholomorphisme local bijectif, c'est-à-dire un biholomorphisme.

(iv) Si $K \subset Y$ est un compact, $f^{-1}(K)$ est compact, donc $\mathrm{Crit}(f) \cap f^{-1}(K)$ est fini, donc $R(f) \cap K$ est fini, cqfd.

Terminologie. Une application holomorphe propre de degré d est aussi appelée *revêtement (holomorphe) ramifié à d feuillets.*

Fibré tangent et formes différentielles

2.1 Fibré tangent, structure presque complexe

Rappels. Soit X une surface différentiable. Si $p \in X$, un vecteur tangent en p est une classe d'équivalence d'objets de la forme (p, φ, v) où $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ est une carte définie au voisinage de p et $v \in \mathbb{R}^2$, avec

$$(p, \varphi_1, v_1) \sim (p, \varphi_2, v_2) \Leftrightarrow v_2 = D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)).v_1.$$

On note T_pX l'ensemble de ces vecteurs tangents, appelé *espace tangent en p*. Il est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux (plan réel) en posant

$$(*) \qquad \lambda[(p, \varphi, v)] + \mu[(p, \varphi, w)] = [(p, \varphi, \lambda v + \mu w)].$$

Le *fibré tangent* est la réunion disjointe $TX = \bigcup_{p \in X} T_pX$. Il est muni de la projection naturelle $\pi : TX \to X$ et d'un atlas $(\Phi : \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \varphi \circ \pi$ où φ est une carte, $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi : T_pX \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-linéaire, et

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(z, v) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z), D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)).v.$$

Si X est orientée, on se restreint aux cartes orientées et T_pX est alors un plan réel orienté.

Cas d'une surface de Riemann. Supposons maintenant que X est une surface de Riemann. On définit alors T_pX comme l'ensemble des classes d'équivalence $[\varphi, v]$, où cette fois φ est une carte holomorphe définie au voisnage de p, $v \in \mathbb{C}$, avec

$$(p, \varphi_1, v_1) \sim (p, \varphi_2, v_2) \Leftrightarrow v_2 = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(\varphi_1(p)).v_1.$$

La formule $(*)$ où cette fois λ et μ sont dans $\mathbb{C}$ le munit naturellement d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension un ou droite complexe. Le fibré tangent est défini de la même façon, il est muni de la projection π et d'un atlas $(\Phi : \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \varphi \circ \pi$ où φ est une carte holomorphe, $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi : T_pX \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(z, v) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z), (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(z)).v.$$

Structure presque complexe. Identifant $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ on a une application naturelle de T_pX avec cette définition «complexe» sur T_pX avec la définition «réelle», qui est clairement une bijection. La multiplication par i dans T_pX apparaît alors comme une *structure complexe* sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel T_pX, c'est-à-dire un élément $J_p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_pX)$ tel que $J_p^2 = -\mathrm{Id}_{T_pX}$. De plus, J_p dépend de façon C^∞ de p c'est-à dire que l'application $(p, v) \mapsto (p, J_pv)$ est C^∞. Une telle application $p \mapsto J_p$ est appelée *structure presque complexe* sur la surface différentiable X. On peut aussi la voir comme un difféomorphsime J de TX qui préserve chaque fibre, est linéaire et vérifie $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Expression dans une carte holomorphe. Soit $z = x + iy$ une carte holomorphe, on a, dans la base $(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y})$ de T_pX :

$$J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y} \ , \ J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

On en déduit

$$dx \circ J = -dy \ , \ dy \circ J = dx.$$

Proposition. *(i) Si $f : X \to Y$ est une application de classe C^1 entre surfaces de Riemann elle est holomorphe si et seulement si $D_pf : T_pX \to T_{f(p)}Y$ est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point $p \in X$.*

(ii) Si X est une surface de riemann, la structure presque complexe sur X détermine la structure de surface de Riemann.

Démonstration. (i) Par définition, f est holomorphe si et seulement si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe au sens usuel pour tout couple de cartes holomorphes (φ, ψ) sur X et Y. On sait que ceci équivaut à la $\mathbb{C}$-linéairité de $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_p = D\psi_{f(p} \circ Df_p \circ (D\varphi_p)^{-1}$ pour tout p dans le domaine de φ. Or $D\varphi_p$ et $D\psi_{f(p)}$ sont $\mathbb{C}$-linéaires d'après la définition des structures complexes sur T_pX et $T_{f(p)}X$. D'où le résultat.

(ii) Il suffit de montrer que cela détermine les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(U)$ où U est un ouvert de X : ceci résulte de (i) appliqué avec $Y = \mathbb{C}$.

Remarques. 1) Le théorème suivant est vrai mais pas évident (il est dû à Gauss (1825, cf [SG] pp. 46-50) dans le cas analytique réel, à A. Korn et L. Lichtenstein (1914-1916, références dans [SG]) dans le cas C^∞, et admet une version mesurable due à Ahlfors et Bers, cf. [Ahlfors]) :

Théorème. *Soit X une surface différentiable munie d'une structure presque complexe. Alors c'est une surface de Riemann. En particulier, toute surface riemannienne (=munie d'une métrique riemannienne] orientée est une surface de Riemann.*

Le «en particulier» vient de ce qu'un plan réel euclidien orienté est une droite complexe : la multiplication par i est le quart de tour dans le sens positif. Concrètement, ceci veut dire que toute métrique riemannienne sur une surface admet localement des coordonnées *confomes* ou *isothermes*, dans lesquelles la métrique est $ds^2 = f(x,y)(dx^2 + dy^2)$. Si la surface est orientée, $x + iy$ est alors une carte holomorphe (pourvu qu'elle soit positive, sinon on prend $x - iy$). Sous cette forme, le théorème apparaîtra peut-être dans le cours de Géométrie différentielle.

2) On peut montrer (A.M. Garsia 1961-1962, références dans [SG]) que toute surface de Riemann se réalise comme surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ avec la structure riemannienne induite. En revanche, on n'obtient pas ainsi toute surface riemannienne puisqu'une surface compact dans $\mathbb{R}^3$ a forcément des points où la courbure est positive.

2.2 Formes différentielles

Rappels. Si X est une surface différentiable, on peut définir l'algèbre différentielle $\Omega^*(X,\mathbb{R}) = \Omega^0(X,\mathbb{R}) \oplus \Omega^1(X,\mathbb{R}) \oplus \Omega^2(X,\mathbb{R})$ des formes différentielles de classe C^∞. Rappelons qu'une k-forme différentielle est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme k-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p c'est-à-dire que si φ est une carte C^∞, $(p, v_1, \cdots, v_k) \mapsto \alpha_p((T\varphi)^{-1}(v_1), \cdots, (T\varphi)^{-1}(v_k))$ est C^∞. Pour $k = 1$, on peut aussi la considérer comme une fonction C^∞ de TX dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire sur chaque fibre T_pX. Les formes à support compact seront notées $\Omega^*_c(X,\mathbb{R})$.

Puisqu'on est sur une surface, k prend les valeurs 0, 1 et 2. Concrètement :

- une 0-forme $f \in \Omega^0(X,\mathbb{R})$ n'est autre qu'une fonction C^∞ de X dans $\mathbb{R}$
- une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p
- une 2-forme $\omega \in \Omega^2(X,\mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $\omega_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p.

Dans une carte (aussi appelée systèmes de coordonnées locales) C^∞, $\varphi = (x,y) : U \to \mathbb{R}^2$, on peut écrire $\alpha = g(x,y)dx + h(x,y)dy$, $\omega = k(x,y)dx \wedge dy$ où g, h et k sont des fonctions C^∞ sur $\varphi(U)$. Noter que le signe de k (élément de $\{-1, 0, 1\}$) en tout point ne dépend pas de la carte holomorphe, on l'appelle signe de ω.

On a de plus le produit extérieur $\wedge : \Omega^1(X,\mathbb{R}) \times \Omega^1(X,\mathbb{R}) \to \Omega^2(X,\mathbb{R})$, et la différentielle d qui envoie $\Omega^0(X,\mathbb{R})$ dans $\Omega^1(X,\mathbb{R})$ et $\Omega^1(X,\mathbb{R})$ dans $\Omega^2(X,\mathbb{R})$ et vérifie $d \circ d = 0$. En coordonnées locales $[g(x,y) = g \circ \varphi$, etc]:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(g(x,y)dx + h(x,y)dy) \wedge (g'(x,y)dx + h'(x,y)dy) = (g(x,y)h'(x,y) - h(x,y)g'(x,y))dx \wedge dy \\ &d(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \ , \ d(g(x,y)dx + h(x,y)dy) = (\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y})dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Complexification. Supposons maintenant que X est une surface de Riemann. En complexifiant, on obtient l'algèbre différentielle des *formes différentielles complexes*, une k-forme complexe étant la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme k-$\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p. On obtient $\Omega^*(X,\mathbb{C}) = \Omega^0(X,\mathbb{C}) \oplus \Omega^1(X,\mathbb{C}) \oplus \Omega^2(X,\mathbb{C})$, où

- une 0-forme $f \in \Omega^0(X,\mathbb{C})$ n'est autre qu'une fonction C^∞ de X dans $\mathbb{C}$
- une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p
- une 2-forme $\omega \in \Omega^2(X,\mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $\omega_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p.

Les formes complexes à support compact seront notées $\Omega^*_{\mathbb{C},c}(X)$.

Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy : U \to \mathbb{C}$, on a $\alpha = gdx + hdy$ et $\omega = kdx \wedge dy$, où cette fois g, h et k sont dans $C^\infty(U, \mathbb{C})$, et les formules $(*)$ restent valables. Nous allons exprimer tout cela en remplaçant x et y par z et $\overline{z}$. On a d'abord $dx = \text{Re } dz = \dfrac{1}{2}(dz + d\overline{z})$, $dy = \text{Im } dz = \dfrac{i}{2}(-dz + d\overline{z})$, donc la 1-forme $\alpha = g(x, y)dx + h(x, y)dy$ s'écrit

$$\alpha = \frac{g(z) - ih(z)}{2}dz + \frac{g(z) + ih(z)}{2}d\overline{z} =: \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}.$$

Le terme $\alpha^{1,0}$ est la composante $\mathbb{C}$-linéaire de α et $\alpha^{0,1}$ est la composante anti-$\mathbb{C}$-linéaire. Ils sont définis de façon intrinsèque :

$$\alpha^{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha \circ J)\ ,\ \alpha^{0,1} = \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha \circ J),$$

où J est la structure presque complexe, vue comme un difféomorphisme de TX, et α est considérée comme une fonction de TX (ou TU) dans $\mathbb{C}$. En particulier, si $f(z) \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ on a

$$d(f(z)) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = df^{1,0} + df^{0,1},$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On notera $\Omega^{1,0}(X)$ et $\Omega^{0,1}(X)$ les espaces de formes $\mathbb{C}$-linéaires et anti-$\mathbb{C}$-linéaires, c'est-à-dire d'écriture locale (dans une carte holomorphe) gdz et $hd\overline{z}$ respectivement. Une forme $\alpha \in \Omega^{1,0}(X)$ (resp. $\Omega^{0,1}(X)$) est dite *de type* $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). On a donc une décomposition naturelle

$$\Omega^1(X, \mathbb{C}) = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X)$$

en deux sous-espaces vectoriels complexes, le second étant le conjugué du premier.

En particulier, si $f \in \Omega^0(X, \mathbb{C})$, on note $(df)^{1,0} = \partial f$, $(df)^{0,1} = \overline{\partial} f$. Dans une carte holomorphe, on a

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dz\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Donc f esty holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.

Ensuite, $dz \wedge dz = 0 = d\overline{z} \wedge d\overline{z}$ et $dz \wedge d\overline{z} = -2idx \wedge dy = -d\overline{z} \wedge dz$, d'où

$$\begin{aligned} d(g(z)dz + h(z)d\overline{z}) &= dg \wedge dz + dh \wedge d\overline{z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz + \left(\frac{\partial h}{\partial z}dz + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge d\overline{z} \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right)dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

2.3 Différentielles holomorphes et méromorphes

Définitions. Une *différentielle holomorphe* sur une surface de Riemann X est une 1-forme complexe $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$ dont l'écriture dans toute carte holomorphe est de la forme $g(z)dz$ où g est une fonction holomorphe usuelle. Il suffit que ce soit vrai pour chaque point pour une carte holomorphe $\varphi = z$ définie au voisinage de ce point : en effet, si $\psi = w$ est une autre carte holomorphe on a localement le changement de cartes $z = f(w)$ où f est une fonction holomorphe usuelle. Donc $g(z)dz = g(f(w))f'(w)dw$, ce qui est de la forme voulue.

Proposition. *Soit $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$. Alors ω est holomorphe si et seulement si $d\omega = 0$.*

Démonstration. Dans une carte holomorphe, $\alpha = f(z)dz$, d'où $d\alpha = -\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}dz \wedge dz$, donc $(d\alpha = 0)$ équivaut à $(\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0)$ soit (f holomorphe) soit (ω holomorphe).

On notera Ω^1_X l'espace des différentielles holomorphes. Attention à ne pas le confondre avec $\Omega^1(X)$, espace des (1-formes) différentielles réelles C^∞.

Exemples. 1) Si f est une fonction holomorphe, *df* est une différentielle holomorphe.

2) La forme dz définie sur $\mathbb{C}$ descend sur le tore $T_z = \mathbb{C}/\Lambda$, on la note encore dz. Elle est clairement holomorphe. Noter qu'elle ne s'annule jamais. Donc si $\omega \in \Omega^1_{T_z}$, on peut écrire $\alpha = fdz$ avec $f \in \mathcal{O}(T_z)$. Comme T_z est compact et connexe, f est constante : $\Omega^1_{T_z} = \mathbb{C}dz$.

3) Sur $X_{x^3+px+q} \subset \mathbb{C}^2$, $\omega = \dfrac{dx}{y}$ définit une forme holomorphe jamais nulle (exercice). On verra qu'elle s'étend en une forme holomorphe jamais nulle quand on rajoute le point à l'infini.

Définitions. Une *différentielle méromorphe* sur une surface de Riemann est une différentielle holomorphe ω définie sur $X \setminus P$ où P est un sous-ensemble localement fini, telle que, si $\varphi = z$ est une carte holomorphe centrée en $p \in D$, on a localement $\omega = g(z)dz$ où f a un pôle en z. Il est clair qu'il suffit que ce soit vrai pour une carte holomorphe centrée, et que l'ordre k du pôle de f ne dépend pas de la carte. On dit que ω a un *pôle d'ordre* k en p.

Autrement dit, en tout point $p \in X$ on a l'expression locale $\omega = f(z)dz$ où f est méromorphe. Si ω est non nulle, on peut définir le degré $\deg_p(\omega) = \deg_0(f)$, qui est indépendant de la carte : si w est une autre carte holomorphe centrée avec $z = \psi(w)$, $\omega = (f \circ \psi(w))\psi'(w)dw$. Comme $\psi'(w) \neq 0$, $\deg_0(f \circ \psi) = \deg_0(f)$. En un pôle, le dedré est l'opposé de l'ordre du pôle. On en déduit le diviseur d'une différentielle méromorphe non nulle : $\mathrm{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \deg_p(f)p$.

On notera $\mathcal{M}^1_X$ l'espace des différentielles méromorphes.

Exemple. Si f est une fonction méromorphe non constante, la forme différentielle *df* sur le complémentaire des pôles donne clairement une différentielle méromorphe sur la surface tout entière.

Remarque. Comme indiqué plus haut, nous verrons toute surface de Riemann (compacte ou non) admet une fonction méromorphe non constante, et a fortiori une différentielle méromorphe non constante.

Exemple. Si $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $f = z$, c'est-à-dire l'identité de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dz a un unique pôle, qui est en ∞ et d'ordre deux : en effet, dans la carte holomorphe centrée $w = \dfrac{1}{z}$, on a $dz = -\dfrac{dw}{w^2}$. Donc toute différentielle méromorphe non nulle a un degré -2, et en particulier n'est jamais holomorphe. Autre preuve : toute forme holomorphe est de la forme fdz où f est holomorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et a un zéro au moins double en ∞. Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est compact, $f = 0$.

2.4 Résidus

Définition. Soit ω une différentielle méromorphe. Dans une carte holomorphe centrée z en un point p, elle s'écrit $\omega = g(z)dz$ où g est méromorphe. Le *résidu* de ω en p est $\mathrm{rés}_p(\omega) = a_{-1}$ si $\sum_{n \geq -k} a_n z^n$ est le développement en série de Laurent de g. On peut montrer algébriquement que c'est indépendant de la carte, mais c'est assez pénible. Pour prouver cette indépendance, on considère un disque compact D de classe C^1 contenu dans le domaine de définition de z et contenant p dans son intérieur, donc

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{z(\partial D)} g(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega.$$

Donc le terme de droite ne dépend pas de D. Cette indépendance résulte aussi de la formule de Stokes, puisque $d\omega = 0$: si $\delta \subset D$ est un disque contenant p dans son intérieur et arbitrairement petit, on a $\int_{\partial \delta} \omega = \int_{\partial D} \omega$. Or si w est une autre carte holomorphe centrée et si D est assez petit, D est contenu dans le domaine de définition de w. Ceci montre l'indépendance en la carte, et aussi la propriété

$$\mathrm{rés}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega$$

pour tout disque D de classe C^1 contenu dans un domaine de définition d'une carte holomorphe centrée.

Remarque. Le résidu $\mathrm{rés}_p(\omega)$ est toujours nul en un point où ω est holomorphe, et non nul en un pôle simple. En un pôle au moins double, il peut être nul ou non nul, exemples : $\dfrac{dz}{z^2}$ et $\dfrac{dz}{z} + \dfrac{dz}{z^2}$.

Propriété. *On a* $\text{rés}_p(\omega) = 0$ *si et seulement si* ω *admet une primitive méromorphe sur un voisinage de* p.

Démonstration. L'expression intégrale montre que c'est une condition nécessaire. Réciproquement, si $\text{rés}_p(\omega) = 0$, dans une carte holomorphe centrée z, on a

$$\omega = \sum_{n \neq -1} a_n z^n dz = d\Big(\sum_{n \neq -1} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big).$$

Terminologie. Classiquement, les différentielles holomorphes sont dites *de première espèce*, celles qui sont méromorphes avec résidus nuls *de seconde espèce*, les différentielles méromorphes *de troisième espème espèce.*

Théorème des résidus. *Si* ω *est une différentielle méromorphe sur une surface de Riemann compacte* X, *on a* $\displaystyle\sum_{p \in X} \text{rés}_p(\omega) = 0$ *(la somme est finie puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles).*

Démonstration. On peut supposer ω non nulle. Si $p_1, \cdots, p_n$ sont les pôles de ω, soient D_j des disques C^1 disjoints contenant les p_i dans leur intérieur. Alors la forme ω est lisse sur $\Omega = X \setminus (\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(D_i))$ et $d\omega = 0$, donc par la formule de Stokes on a

$$0 = \iint_{\Omega} = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} \omega = -2\pi i \sum_{i=1}^{n} \text{rés}_p(\omega).$$

Remarque. Pour une preuve algébrique de cette formule, cf. [Se1] pp. 32-35.

3 Formes harmoniques

3.1 Étoile de Hodge et produit scalaire sur les 1-formes réelles

Définition. Si X est une surface de Riemann, l'*étoile de Hodge* $*$ est l'automorphisme de $\Omega^1(X, \mathbb{C})$ défini par $*\alpha = -\alpha \circ J$ [le signe moins sera justifié plus tard]. Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy$, on a

$$*dx = dy \ , \ *dy = -dx$$
$$*dz = dy - idx = -idz \ , \ *d\overline{z} = dy + idx = id\overline{z}.$$

En effet, dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_pX, on a

$$*dx(\frac{\partial}{\partial x}) = -dx(J\frac{\partial}{\partial x}) = -dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0$$
$$*dx(\frac{\partial}{\partial y}) = dx(J\frac{\partial}{\partial y}) = -dx(-\frac{\partial}{\partial x}) = 1.$$

Donc $*dx = dy$, d'où $*dy = -dx$ puisque $*^2 = -\mathrm{Id}$.

Définition. Une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{C})$ est dite *cofermée* si $d(*\alpha) = 0$. Si $\alpha = fdx + gdy$ avec $dy = *dx$, cela s'écrit $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

Produit scalaire sur $\Omega^1_c(X)$. Si α, β sont deux 1-formes réelles sur X à support compact, on définit

$$(\alpha, \beta) = \alpha \wedge *\beta \in \Omega^2(X).$$

On notera $(\alpha, \alpha) = ||\alpha||^2$ (attention, $||\alpha||$ n'a pas de sens). Dans une carte holomorphe :

$$(gdx + hdy, g'dx + h'dy) = (gdx + hdy) \wedge (-h'dx + g'dy) = (gg' + hh')dx \wedge dy.$$

En particulier, $||gdx + hdy||^2 = (g^2 + h^2)dx \wedge dy$: ceci justifie le signe moins dans la définition de $*$. Si α et β sont à support compact, puisque X est une surface orientée on en déduit un produit scalaire sur $\Omega^1_c(X)$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(X)} = \iint_X (\alpha, \beta) = \iint_X \alpha \wedge *\beta.$$

La norme associée sera notée

$$||\alpha||_{L^2} = \langle \alpha, \alpha \rangle_{L^2}^{1/2} = \Big(\iint_X ||\alpha||^2 \Big)^{1/2} = \Big(\iint_X \alpha \wedge *\alpha \Big)^{1/2}.$$

On peut étendre ces définitions à l'espace vectoriel des 1-formes *de carré intégrable*, c'est-à-dire telles que $\displaystyle\iint_K \alpha \wedge *\alpha \leq C < \infty$ pour tout compact $K \subset X$, avec C indépendant de K. Une telle forme a un support qui est une réunion dénombrable de compacts (K_n) (rappelons que nous ne savons pas encore que X est réunion dénombrable de compacts). Le produit scalaire de deux formes de carré intégrable est alors défini comme la limite des $\displaystyle\iint_{K_n} (\alpha, \beta)$. Il est facile de voir que ça existe et ça ne dépend pas de (K_n).

Remarques. 1) Pour l'instant, nous ne définissons le produit scalaire que sur les 1-formes réelles. Bien sûr, il admet une extension hermitienne aux 1-formes complexes : $\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \mathrm{Re}\Big(\displaystyle\iint_X \alpha \wedge *\overline{\beta} \Big)$, mais nous n'aurons besoin de cette extension qu'à la fin du cours.

2) Nous n'utiliserons (presque) pas la théorie de la mesure, en particulier l'espace L^2: toutes nos fonctions ou formes différentielles seront au moins continues.

3.2 Laplacien et fonctions harmoniques

Définitions. Soit X une surface de Riemann. Le *laplacien* d'une fonction $u \in C^2(X, \mathbb{R})$ est la 2-forme différentielle continue

$$\Delta u = d(*df) = -d(du \circ J) \in C^0\Omega^2(X, \mathbb{R}).$$

Si $\Delta u = 0$, on dit que u est *harmonique.*

Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy$, on a

$$\Delta u = d\big(- \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\big) = \big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\big) dx \wedge dy.$$

Noter que le laplacien Δu est défini de façon intrinsèque comme forme différentielle, alors que la fonction $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dépend du choix de la carte holomorphe. Si X est un ouvert de $\mathbb{C}$, on retrouve bien la définition habituelle des fonctions harmoniques. Les propriétés classiques des fonctions harmoniques sur les ouverts de $\mathbb{C}$ s'étendent aisément :

Propriétés. *Soit X une surface de Riemann.*

(i) Soit $u \in C^2(X, \mathbb{R})$. Alors u est harmonique si et seulement si u est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à une constante près.

(ii) Soit $u : X \to \mathbb{R}$ harmonique, alors elle vérifie le principe du maximum : *si elle a un extrémum local en un point, elle est constante. En particulier, toute fonction harmonique sur une surface de Riemann compacte est constante.*

(iii) Les fonctions harmoniques sont invariantes par les applications holomorphes : si u harmonique sur X et $f : Y \to X$ est holomorphe, $u \circ f$ est harmonique sur Y.

(iv) Si $U \subset X$ est un ouvert connexe d'adhérence compacte, avec $\mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$, et si u_1 et u_2 sont deux fonctions continues sur $\overline{U}$ qui coïncident sur $\mathrm{Fr}(U)$ et sont harmoniques dans U, alors $u_1 = u_2$. Ceci s'applique en particulier au cas où $U = \mathrm{Int}(K)$ où K est un domaine connexe à bord C^1.

Démonstration. (i) et (ii) sont des énoncés locaux connues pour des fonctions sur des ouverts de $\mathbb{C}$, donc ils passent à une surface de Riemann en utilisant une carte holomorphe.

(iii) Ceci résulte de la caractérisation (i).

(iv) Par symétrie il suffit de prouver $u_1 - u_2 \leq 0$. Puisque $\overline{U}$ est compact la fonction $u_1 - u_2$ a un maximum en un point p. Si $p \in U$, $u_1 - u_2$ est constante sur U donc sur $\mathrm{Fr}(U)$, donc est nulle. Si $p \in \mathrm{Fr}(U)$, on a $u_1 - u_2 \leq (u_1 - u_2)(p) = 0$, cqfd.

3.3 Fonctions harmoniques et différentielles holomorphes

Une fonction harmonique $u : X \to \mathbb{R}$ sur une surface de Riemann est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe $f = u + iv$, celle-ci étant définie à une constante près. Noter que, dans une carte holomorphe $z = x + iy$, les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = *du.$$

Définition. Une *forme harmonique* [de degré un] sur une surface de Riemann X est une 1-forme fermée qui est localement la différentielle d'une fonction harmonique. On note $\mathcal{H}^1(X, \mathbb{R})$ l'espace des formes harmoniques sur X.

Proposition. *Soit $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) α est harmonique

(ii) α est fermée et cofermée : $d\alpha = d(*\alpha) = 0$

(iii) $\alpha + i{*}\alpha$ est holomorphe.

De plus, l'application $\alpha \mapsto \alpha + i * \alpha$ est un isomorphisme entre les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathcal{H}^1(X, \mathbb{R})$ et Ω^1_X, d'inverse $\omega \mapsto \mathrm{Re}(\omega)$.

Démonstration. Le résultat est local, donc on peut supposer $X = \Delta$ et $\alpha = fdx+gdy$. Alors $*\alpha = -gdx+fdy$ et $\alpha + i*\alpha = (f + ig)d(x + iy)$, donc

$$d\alpha = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy \ , \ d(*\alpha) = (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})dx \wedge dy.$$

Donc (ii) équivaut aux équations de Cauchy-Riemann pour $f+ig$, donc à (iii). Cela implique alors $(f+ig)dz = dh$ avec h holomorphe, donc $\alpha = d(\mathrm{Re}(h))$ est harmonique, d'où (i). Et si (i) est vrai, $\alpha = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, avec u harmonique. Donc

$$d(*\alpha) = d(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dx \wedge dy = 0.$$

Comme $d(du) = 0$, (ii) est vrai. Donc (i) et (ii) sont équivalents

Ensuite, si (i)-(ii) sont vrais, $\omega := \alpha + i*\alpha = h(z)dz$ est une différentielle holomorphe, donc (iii) est vrai. Réciproquement, si $\omega = h(z)dz$ est une différentielle holomorphe, elle a une primitive holomorphe $k(z) = \int_0^z h(\zeta)d\zeta$ [ou $k(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$ si $h(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$], et $\alpha = \mathrm{Re}(\omega) = d(\mathrm{Re}(k))$ est une forme harmonique.

Donc l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha \in \mathcal{H}^1(X,\mathbb{R}) \mapsto \alpha + i*\alpha$ est à valeurs dans Ω^1_X. Elle est clairement injective, et si $\omega \in \Omega^1_X$ est donnée, alors $\alpha = \mathrm{Re}(\omega)$ est dans $\mathcal{H}^1(X,\mathbb{R})$ et $\omega - (\alpha + i*\alpha)$ est une forme holomorphe de partie réelle nulle, donc nulle.

3.4 Intégrale et principe de Dirichlet C^2

Définitions. Soit $u : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un domaine (compact ou non) dans une surface de Riemann. *L'intégrale de Dirichlet* est

$$\mathcal{D}_K(u) = ||du||^2_{L^2(K)} = \iint_K ||du||^2 = \iint_K du \wedge *du \in [0,+\infty].$$

Nous noterons $C^1_{\mathcal{D}<\infty}(K)$ l'espace des fonctions C^1 sur un domaine $K \subset X$ telles que $\mathcal{D}(X) < \infty$. Si $u, w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(K)$, on peut définir

$$\mathcal{D}'_K(u,w) = \langle du, dw\rangle_{L^2(K)} = \iint_X (du, dw).$$

On a alors la propriété

$$\mathcal{D}_K(u+w) = \mathcal{D}_K(u) + 2\mathcal{D}'_K(u,w) + \mathcal{D}_K(w).$$

Proposition (principe de Dirichlet C^2)**.** *On suppose que $K \subset X$ est un domaine compact à bord C^2, avec ∂K non vide. Si $u \in C^2(K,\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) u est harmonique sur K.

(ii) u minimise $\mathcal{D}_K$ sur $C^1_u(K,\mathbb{R}) := \{v \in C^1(K,\mathbb{R}) \mid v_{|\partial K} = u\}$.

(iii) Pour tout $w \in C^1_0(K)$, on a $\mathcal{D}'_K(u,w) = 0$.

Démonstration. *(i) ⇔ (iii)* Si $w \in C^1_0(K,\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_K(u,w) = \iint_K (du,dw) &= \iint_K dw \wedge *du = \iint_K d(w*du) - wd(*du)\\ &= \int_{\partial K} w*du - \iint_K w\Delta u \ \ \text{par Stokes et le fait que } d*du = \Delta u\\ &= -\iint_K w\Delta u \ \ \text{car } w = 0 \text{ sur } \partial K.\end{aligned}$$

Ceci est nul pour tout w si et seulement si $\Delta u = 0$, cqfd.

(ii) $\Leftrightarrow$ *(iii)* Puisque $C^1_f(K,\mathbb{R}) = f + C^1_0(K,\mathbb{R})$, (ii) équivaut à : pour tout $w \in C^1_0(K,\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \mathcal{D}_K(u+tw) = \mathcal{D}_K(u) + 2t\mathcal{D}'_K(u,w) + t^2\mathcal{D}_K(w)$ a un minimum en 0. Puisque $\mathcal{D}_K(w) \geq 0$, ceci équivaut à (iii).

Remarque. L'équivalence entre (ii) et (iii) reste vraie avec la même preuve si ∂K et u sont seulement supposés de classe C^1. L'implication de (i) sur (iii) donc sur (ii) reste aussi valable. En effet, supposons que u est harmonique sur $\mathrm{Int}(K)$, soit (K_n) une suite croissante de domaines lisses compacts dans $\mathrm{Int}(K)$ dont la réunion est $\mathrm{Int}(K)$, le bord de K_n convergeant C^1 vers celui de K. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_K(u,w) &= \iint_K d(w*du) = \lim_n \iint_{K_n} d(w*du) = \lim_n \int_{K_n} w*du - \iint_{K_n} w\Delta u\\ &= \lim_n \iint_{K_n} w*du = 0 \text{ puisque } \partial K_n \to \partial K \text{ et } w|\partial K = 0.\end{aligned}$$

On verra qu'il en est de même pour l'implication de (ii)-(iii) sur (i).

3.5 Formule de Poisson

Soit u une fonction réelle continue sur le disque fermé $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$ et harmonique dans l'intérieur. Nous allons exprimer $u(z)$ pour $z \in \Delta$ à partir des valeurs de la restriction $u_{|\partial\Delta}$. Pour cela on part de la formule de la moyenne

$$u(0) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}$$

[nous l'écrivons ainsi pour qu'on voie clairement que si $u = 1$ ça donne 1, et aussi que $\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}$ est une forme réelle sur $T\partial\Delta$.] On utilise l'automorphisme biholomorphe du disque, $\varphi_z(\zeta) = \frac{\zeta+z}{1+\overline{z}\zeta}$ qui envoie 0 sur z et est holomorphe au voisinage du disque fermé. Par invariance holomorphe des fonctions harmoniques, on a

$$u(z) = (u \circ \varphi_z)(0) = \int_{\partial\Delta} u(\varphi_z(\zeta'))\frac{d\zeta'}{2\pi i\zeta'}.$$

Posant $\zeta = \varphi_z(\zeta')$, soit $\zeta' = \varphi_{-z}(\zeta)$, il vient $d\zeta' = \dfrac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\zeta$, donc

$$\begin{aligned}u(z) &= \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\frac{1-\overline{z}\zeta}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{2\pi i} = \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}\zeta)(\zeta-z)}\frac{d\zeta}{2\pi i}\\ &= \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \quad \text{puisque } \zeta\overline{\zeta} = 1.\end{aligned}$$

En termes réels (pour la différentielle) :

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Cette dernière formule est la *formule de Poisson en dimension* 2. On a aussi

$$u(z) = \mathrm{Re}\Big(\int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}\Big).$$

En effet, puisque $u(\zeta)$ est réel et que $\frac{d\zeta}{2\pi i} = \frac{d\theta}{2\pi}$ est une forme réelle sur $\partial\Delta$, il suffit de calculer

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\zeta}+\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\Big) = \frac{1}{2}\frac{2\zeta\overline{\zeta}-2z\overline{z}}{|\zeta-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}.$$

3.6 Extension harmonique

Définition. Soit X une surface de Riemann. Un *disque conforme* sur X est un domaine compact $D \subset X$ tel qu'il existe une carte holomorphe l'envoyant sur le disque fermé $\overline{\Delta}$. Clairement, tout point de X est dans l'intérieur d'un tel disque conforme.

Théorème. *Soit $D \subset X$ un disque conforme dans une surface de Riemann. Si $u : \partial D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, il existe une unique fonction u^D continue de D dans $\mathbb{R}$, telle que $u^D|\partial D = u$ et u^D est harmonique sur* Int(D). *On appelle u^D* l'extension harmonique *de u à D.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé l'unicité comme conséquence du principe du maximum. Reste à montrer l'existence. Par invariance holomorphe, on se ramène au cas où $X = \mathbb{C}$ et $D = \overline{\Delta}$. On définit alors $u^{\overline{\Delta}}$ sur Δ par la formule de Poisson :

$$u^{\overline{\Delta}}(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = \mathrm{Re}\Big(\int_{\partial\Delta} u(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{2\pi i \zeta} \Big).$$

Dans la seconde forme, la fonction entre parenthèses est holomorphe en z comme intégrale d'une fonction holomorphe en z, donc $u^{\overline{\Delta}}$ est harmonique sur Δ. Il reste à montrer que quand z tend vers $e^{i\theta_0} \in \partial\Delta$, $u^{\overline{\Delta}}(z)$ tend vers $u(e^{i\theta_0})$. La formule de Poisson appliquée à la fonction 1 montre qu'on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$, donc

$$|u^{\overline{\Delta}}(z) - u(e^{i\theta_0})| = \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta_0})| \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$. Découpons $[0, 2\pi]$ en les deux arcs $A_1 = \{\theta \mid \min_{k\in\mathbb{Z}} |\theta - \theta_0 - 2k\pi| \le \varepsilon\}$ et $A_2 = [0, 2\pi] \setminus \mathrm{Int}(A_1)$. Notons $m_1(\varepsilon) = \max_{\theta\in A_1} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta_0})|$ et $m_2(z,\varepsilon) = \min_{\theta\in A_2} |e^{i\theta} - z|$. Il vient

$$\begin{aligned} |u^{\overline{\Delta}}(z) - u(e^{i\theta_0})| &\le \iint_{A_1} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta_0})| \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + \iint_{A_2} |u(e^{i\theta}) - u(1)| \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\le m_1(\varepsilon) + 2\frac{||u||_\infty (1-|z|^2)}{m_2(z,\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Quand z tend vers $e^{i\theta_0}$, $m_2(z,\varepsilon)$ tend vers $|1 - e^{i\varepsilon}| > 0$, donc le second terme tend vers 0, donc $|u^{\overline{\Delta}}(z) - u(e^{i\theta_0})| \le m_1(\varepsilon) + \varepsilon$ si $|z - e^{i\theta_0}|$ est assez petit. Puisque u est continue, $m_1(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε, ce qui achève la preuve.

Autre expression de l'extension harmonique. Soit $u \in C^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$. On la développe en série de Fourier

$$u(z) = c_0 + 2\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

les convergences ayant lieu dans L^2 et en moyenne de Cesàro dans C^0. Alors la fonction

$$U(z) = c_0 + 2\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (z = re^{i\theta})$$

est holomorphe dans Δ : la série entière converge puisque (c_n) est bornée. De plus, par le théorème de sommabilité d'Abel cf. [Zy] pp. 96-97), $U(z) \to u(e^{i\theta_0})$ quand z tend vers $e^{i\theta_0}$) en restant dans Δ. Donc $U = u^{\overline{\Delta}}$.

**Remarque.* On appelle la fonction $P_2(z,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$ le *noyau de Poisson en dimension* 2. Sa généralisation en dimension $n \ge 2$ est $P_n(x,y) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}} \dfrac{||y||^2 - ||x||^2}{||y-x||^n}$, où ω_{n-1} est le volume de la sphère $S(0,1)$ de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. C'est une fonction définie et lisse sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta_{\mathbb{R}^n}$, harmonique en x donc en y par antisymétrie. De plus, $P_n \ge 0$ et $\displaystyle\int_{S(0,1)} P_n(x,y) d\sigma_{n-1}(y) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$. Enfin, $P_n(x,y) = 0$ si $||x|| = ||y||$, donc $P(x,y) \to 0$ uniformément si $||x|| < ||y|| = 1$, $||x|| \to 1$ et $||x - y||$ est minoré. On en déduit comme ci-dessus que si $u \in S(0,1)$, $U(x) = \displaystyle\int_{S(0,1)} u(y) P_n(x,y) d\sigma_{n-1}(y)$ est l'extension harmonique de u.*

4 Construction d'une fonction harmonique non constante

Remarque. L'analyse dans ce chapitre est exagérément compliquée. En fait, on n'a pas besoin du principe de Dirichlet C^1. On peut supprimer toute la section 4.1, sauf la proposition 1 et le corollaire final, et ne prouver celui-ci que pour u de classe C^2 : c'est presque immédiat, car son extension harmonique est C^1. Il suffit ensuite de remplacer partout C^1 par C^2, en notant qu'une suite minimisante dans $C^2_\Phi(X)$ est aussi minimisante dans $C^1_\Phi(X)$ par densité des fonctions C^2 dans les fonctions C^1).

4.1 Principe de Dirichlet C^1

La proposition suivante dit que l'extension harmonique minimise l'énergie de Dirichlet parmi toutes les extensions continues qui sont C^1 dans l'intérieur.

Proposition 1. *Soit $u \in C^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$, et soit $E(u) = \{U \in C^0(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta) \mid U_{|\partial\Delta} = u\}$. Si $U \in E(u)$, on a $\mathcal{D}_\Delta(U) \geq \mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}})$. Si $\mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}}) < \infty$, on a égalité si et seulement si $U = u^{\overline{\Delta}}$.*

Démonstration. Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ la série de Fourier de u, de sorte que $u^{\overline{\Delta}}(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. Soit $U \in E(u)$, on peut écrire $U(re^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(r)\cos n\theta + g_n(r)\sin n\theta)$, avec f, g continues sur $[0,1]$, C^1 sur $[0,1[$, et $f_n(1) + ig_n(1) = 2c_n = a_n + ib_n$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\Delta(U) &= \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} \Big(\big(\frac{\partial U}{\partial r}\big)^2 + r^{-2}\big(\frac{\partial U}{\partial \theta}\big)^2\Big)d\theta \\ &= \pi \int_0^1 \Big(r\sum_{n=1}^{\infty}(f_n'(r)^2 + g_n'(r)^2) + r^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n(r)^2 + n^2 r^{-1} g_n(r)^2)dr \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (rf_n'(r)^2 + n^2r^{-1}f_n(r)^2 + rg_n'(r)^2) + n^2 g_n(r)^2\Big)dr.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}}) = \pi \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 2n^2 r^{2n-1}(a_n^2 + b_n^2)dr = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2).$$

Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_0^1 (rf_n'(r)^2 + r^{-1}n^2 f_n(r)^2)dr \geq \int_0^1 2nf_n(r)f_n'(r)dr = n(f_n(1)^2 - f_n(0)^2) = na_n^2,$$

avec égalité si et seulement si $rf_n'(r)^2 = r^{-1}n^2 f_n(r)^2$, soit $(\log f)' = \pm\frac{n}{r}$, soit (puisque f est continue sur $[0,1]$ et C^1 hors de 1) $f_n = a_n r^n$. De même, $\int_0^1 (rg_n'(r)^2 + r^{-1}n^2 g_n(r)^2)dr \geq nb_n^2$, avec égalité si et seulement si $g_n(r) = b_n r^n$. Donc $\mathcal{D}_\Delta(U) \geq \mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}})$.

De plus, si $\mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}})$ est fini, $\mathcal{D}_\Delta(U) = \mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}})$ si et seulement si $f_n = a_n r^n$ et $g_n(r) = b_n r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $U = u^{\overline{\Delta}}$, cqfd.

**Remarques.* 1) La fonction $u(e^{i\theta}) = \sum_{n\geq 2}\frac{\sin n\theta}{n\sqrt{\log n}}$ est continue sur $\partial\Delta$, mais son extension harmonique a pour intégrale de Dirichlet $\pi\sum_{n\geq 2}\frac{n}{n^2 \log n} = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\log n} = +\infty$. Donc il n'existe aucune fonction U continue sur $\overline{\Delta}$, C^1 sur Δ, prolongeant u et d'intégrale de Dirichlet finie. Un tel exemple montre que le principe de Dirichlet ne permet pas toujours de trouver l'extension harmonique.

2) Il se peut que u soit C^1 sans que son extension harmonique soit C^1 ni même Lipschitz, exemple $u(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}((1 - e^{i\theta})\log(1 - e^{i\theta}))$ (détermination principale du logarithme sur $1 + \Delta$)). Son extension harmonique est $U(z) = \mathrm{Re}((1 - z)\log(1 - z))$, qui n'est pas localement Lipschitz en 1.*

Proposition 2. *Soit u une fonction de classe C^1 sur un voisinage U de $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$. Il existe une famille de fonctions $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ qui sont de classe C^1 sur U, coïncident avec u hors de Δ, sont harmoniques sur $\Delta_{1-\varepsilon}$, et vérifient*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{D}_\Delta(u_\varepsilon) = \mathcal{D}_\Delta((u_{|\partial\Delta})^{\overline{\Delta}}).$$

Démonstration. Soit $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{C}, [0,1])$ qui vaut 1 sur $\Delta_{1-\varepsilon}$, 0 hors de Δ, et telle que $||d\rho_\varepsilon||_\infty \leq \dfrac{C}{\varepsilon}$: on peut prendre $\rho_\varepsilon(z) = \rho(\dfrac{|z|-1+\varepsilon}{\varepsilon})$, où $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ vaut 1 sur $\mathbb{R}_-$ et 0 sur $[1, +\infty[$.

Soit $z \in U$, on pose $w(z) = u(z) - u^{\overline{\Delta}}(z)$: c'est une fonction continue sur $\overline{\Delta}$, C^1 sur Δ, nulle sur $\partial\Delta$, telle que $\mathcal{D}_\Delta(w) < +\infty$, et à support dans $A_\varepsilon = \overline{\Delta} \setminus \Delta_{1-\varepsilon}$. Ensuite, on définit

$$u_\varepsilon(z) = \begin{cases} u(z) \text{ si } |z| \geq 1 \\ (u_{|\partial\Delta})^{\overline{\Delta}}(z) + \rho_\varepsilon(z).w(z) \text{ si } 1-\varepsilon \leq |z| < 1 \\ (u_{|\partial\Delta})^{\overline{\Delta}}(z) \text{ si } |z| < 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Par construction, u_ε est C^1 et $u_\varepsilon = u$ hors de Δ. De plus, si $z = re^{i\theta} \in A_\varepsilon$, on a

$$|w(re^{i\theta})|^2 = \Big|\int_r^1 \frac{\partial w}{\partial t}(te^{i\theta})dt\Big|^2 \leq (1-r)\int_r^1 \Big|\frac{\partial w}{\partial t}(te^{i\theta})\Big|^2 dt \leq \varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1 \Big|\frac{\partial w}{\partial t}(te^{i\theta})\Big|^2 dt.$$

Donc, notant $d\sigma = dxdy = rdrd\theta$ l'élément d'aire sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \iint_{A\varepsilon} |w|^2 d\sigma &= \int_{1-\varepsilon}^1 rdr \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon \int_0^{2\pi} d\theta.\varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1 \Big|\frac{\partial w}{\partial t}(te^{i\theta})\Big|^2 dt \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} \iint_{A_\varepsilon} ||dw||^2 \\ &= o(\varepsilon^2) \text{ puisque } \int_\Delta ||w||^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Puis, par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \iint_{A_\varepsilon} |w| d\sigma &\leq \big(\iint_{A_\varepsilon} d\sigma\big)^{\frac{1}{2}} \big(\iint_{A\varepsilon} |w|^2 d\sigma\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).O(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\ \iint_{A_\varepsilon} ||dw|| d\sigma &\leq \big(\iint_{A_\varepsilon} d\sigma\big)^{\frac{1}{2}} \big(\iint_{A\varepsilon} ||dw||^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \iint_{A_\varepsilon} ||d(\rho_\varepsilon w)|| d\sigma &\leq \iint_{A_\varepsilon} (||d\rho_\varepsilon||.|w| + \rho_\varepsilon ||dw||) d\sigma \\ &= O(\varepsilon^{-1}).O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \\ \iint_{A_\varepsilon} ||d(\rho_\varepsilon w)||^2 &\leq \iint_{A_\varepsilon} 2(||d\rho_\varepsilon||^2.|w|^2 d\sigma + \rho_\varepsilon^2 ||dw||^2 d\sigma) \\ &= O(\varepsilon^{-2}).o(\varepsilon^2) + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

D'où finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Delta(u_\varepsilon) - \mathcal{D}_\Delta((u_{|\partial\Delta})^{\overline{\Delta}}) &= \iint_{A_\varepsilon} (||d(u_{|\partial\Delta}) + d(\rho_\varepsilon w)||^2 - ||d(u_{|\partial\Delta})^{\overline{\Delta}}||^2) \\ &= \iint_{A_\varepsilon} (2(d(u_{|\partial\Delta}), d(\rho_\varepsilon w)) + ||d(\rho_\varepsilon w)||^2) \\ &= O(1).O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve.

Théorème (principe de Dirichlet C^1). *(i) Si $D \subset X$ est un disque conforme dans une surface de Riemann, et si $u \in C^1(\partial D, \mathbb{R})$, son extension harmonique vérifie*

$$\mathcal{D}_D(u^D) = \inf_{v \in C_0^1(D)} \mathcal{D}_D(v) < \infty.$$

(ii) Si $K \subset X$ est un domaine compact à bord C^1 et $u \in C^1(K, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(1)\ u \text{ harmonique sur } \mathrm{Int}(K) &\Leftrightarrow (2)\ u \text{ minimise } \mathcal{D}_k \text{ sur } C_u^1(K)\\ &\Leftrightarrow (3)\ (\forall w \in C_0^1(K))\ \ \mathcal{D}'_K(u,w) = 0\\ &\Leftrightarrow (4)\ (\forall w \in C_c^1(\mathrm{Int}(K))\ \ \mathcal{D}'_K(u,w) = 0.\end{aligned}$$

Preuve du théorème. Il suffit de le prouver pour $D = \overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$. Puisque u est de classe C^1 sur $\overline{\Delta}$, $\mathcal{D}_\Delta(u) < \infty$. Ceci résulte immédiatement de la Proposition 1.

(ii) Par la remarque à la fin de 3.4, les propriétés (2) et (3) sont équivalentes, et impliquées par (1). De plus, (3) implique évidemment (4), et (4) implique (3) car $C_c^1(\mathrm{Int}(K))$ est dense dans $C^1(K)$ pour la semi-norme $\mathcal{D}_K(u)^{\frac{1}{2}}$.

Il reste à montrer que si u minimise $\mathcal{D}_K$ sur $C_u^1(K, \mathbb{R})$, u est harmonique sur $\mathrm{Int}(K)$. Si ce n'est pas le cas, il existe un disque conforme lisse $D \subset \mathrm{Int}(K)$ tel que u n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$. Comme u est de classe C^1, l'extension harmonique $(u_{|\partial D})^D$ vérifie $\mathcal{D}_D((u_{|\partial D})^D) < \mathcal{D}_D(u)$. Grâce à la Proposition 2, on peut trouver une fonction $v \in C^1(K)$ qui coïncide avec u hors de D, et telle que $\mathcal{D}_D(v)$ est arbitrairement proche de $\mathcal{D}_K((u_{|\partial D})^D)$. Donc $\mathcal{D}_D(v) < \mathcal{D}_D(u)$, d'où $\mathcal{D}_K(v) < \mathcal{D}_K(u)$, contredisant l'hypothèse.

Corollaire. *Si u est une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage ouvert U d'un disque conforme D, pour tout disque conforme $D' \subset \mathrm{Int}(D)$ il existe $\widetilde{u} \in C^1(U)$ qui coïncide avec u hors de D, est harmonique sur $\mathrm{Int}(D')$ et vérifie $\mathcal{D}(\widetilde{u}) \leq \mathcal{D}(u)$.*

Démonstration. On peut se ramener au cas où $U \subset \mathbb{C}$, $D = \overline{\Delta}$. On a $\mathcal{D}_\Delta((u_{|\partial\Delta})^{\overline{\Delta}} < \mathcal{D}(u)$. Si u est harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, on pose $\widetilde{u} = u$. Sinon, on a $\mathcal{D}_\Delta((u_{\partial\Delta})^{\overline{\Delta}}) < \mathcal{D}_\Delta(u)$, et l'on pose $\widetilde{u} = u_\varepsilon$ sur Δ, où ε est assez petit pour que $\Delta_{1-\varepsilon} \supset D'$ et $\mathcal{D}_\Delta(u_\varepsilon) < \mathcal{D}_\Delta(u)$.

4.2 Contrôle des fonctions harmoniques par l'intégrale de Dirichlet

Proposition. *Soit $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est harmonique sur Δ. Il existe une suite de constantes positives $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes de u telles que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, r \in]0,1[) \qquad ||D^n u_{|\Delta_r}||_{L^\infty} \leq \frac{C_n}{(1-r)^{n+\frac{1}{2}}} \mathcal{D}_\Delta(u)^{1/2}.$$

Démonstration. Par hypothèse, $u(z) = c_0 + 2\mathrm{Re} \sum_{m=1}^\infty c_m z^m$, avec $\mathcal{D}_\Delta(u) = 4\pi \sum_{m=1}^\infty m|c_m|^2 < \infty$. Donc, si $|z| = r$ et $|h_1|, \cdots, |h_n| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}|D^n u(z).(h_1, \cdots, h_n)| &= \Big|2\mathrm{Re}\Big(\sum_{m=n}^\infty m(m-1).\cdots(m-n+1)c_m z^{m-n}.h_1\cdots h_n\Big)\Big|\\ &\leq \Big(\frac{1}{\pi}\mathcal{D}_\Delta(u)\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m=n}^\infty m^2(m-1)^2.\cdots(m-n+1)^2 r^{2(m-n)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \Big(\frac{1}{\pi}\mathcal{D}_\Delta(u)\Big)^{\frac{1}{2}} 2^{-n}\Big(\sum_{m=n}^\infty 2m.(2m-1).\cdots(2m-2n+1)^2 r^{2(m-n)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big(\frac{1}{\pi}\mathcal{D}_\Delta(u)\Big)^{\frac{1}{2}} 2^{-n}\Big(\Big(\frac{1}{1-r^2}\Big)^{(2n)}\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Puisque la dérivée $2n$-ième de $\frac{1}{1-r^2}$ vaut $\frac{f_n(r)}{(1-r)^{2n+1}}$ où f_n est continue sur $\overline{\Delta}$, ceci donne la majoration annoncée.

Corollaire. *Soit $D \subset X$ un disque conforme dans une surface de Riemann, contenant un point p dans son intérieur et (u_n) une suite de fonctions continues sur D et harmoniques sur $\mathrm{Int}(D)$ telles que $\mathcal{D}_{\mathrm{Int}(D)}(u_n - u_m) \to 0$. De façon équivalente, $(d(u_n - u_0))$ est de Cauchy dans $L^2(\mathrm{Int}(D))$. Alors la suite (du_n) converge vers une forme harmonique exacte du sur $\mathrm{Int}(D)$ pour la topologie C^∞, uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $D = \overline{\Delta}$, $p = 0$, et de prouver la convergence C^∞ uniforme sur $\overline{\Delta}_r$. Quitte à remplacer u_n par $u_n - u_n(0)$, on peut supposer $u_n(0) = 0$. D'après la proposition, si $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé, la suite $(D^m(u_n))$ converge uniformément sur $\overline{\Delta}_r$. Comme $u_n(0) = 0$ et que $\overline{\Delta}_r$ est compact et convexe, la suite (u_n) converge C^∞ uniformément sur $\overline{\Delta}_r$. Sa limite u, qui est définie sur Δ, est harmonique puisque la convergence est C^2 (à vrai dire, une convergence C^0 suffirait à cause de la formule de la moyenne). Donc la suite (du_n) converge C^∞ uniformément sur tout compact de Δ vers la forme harmonique exacte du.

4.3 Singularité inessentielle d'une fonction harmonique

Proposition. *Soit $u : \Delta \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est harmonique sur Δ^*. Alors u est harmonique sur Δ.*

Démonstration. Soit $U(w) = u(e^{iw})$, définie sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Alors U est harmonique, donc $dU + i *dU$ est une différentielle holomorphe, donc comme $\mathbb{H}$ est convexe c'est la différentielle d'une fonction holomorphe H telle que $H(w + 2\pi) - H(w)$ est imaginaire, donc égal à une constante iC. Donc $H(w) - i\frac{C}{2\pi}w = h(e^{iw})$ où h est holomorphe sur Δ^*. Prenant la partie réelle, $\frac{C}{2\pi}\mathrm{Im}(w)$ ne dépend que de e^{iw}, donc $C = 0$. De plus, $\mathrm{Re}(h) = u$ est continue en 0, donc h s'étend holomorphiquement en 0. Donc $u = \mathrm{Re}(h)$ est harmonique sur Δ.

**Remarque.* On peut donner une autre preuve, valable en toute dimension, en montrant que $\iint_\Delta u\Delta\varphi dxdy = 0$ pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\Delta, \mathbb{R})$, cf. par exemple [Evans] ou le cours d'EDP 2009-2010.*

4.4 Intégrale de Dirichlet renormalisée

Soit $p \in X$ un point d'une surface de Riemann. Nous allons construire un *potentiel dipolaire* en p, c'est-à-dire une fonction u harmonique réelle sur $X \setminus \{p\}$, telle que, pour une carte holomorphe z centrée en p, $u - \mathrm{Re}(\frac{1}{z})$ s'étend continûment en p. Cette extension est alors harmonique par la section précédente.

Pour construire u, nous introduisons une version «renormalisée» de l'intégrale de Dirichlet. Pour cela, nous fixons une carte holomorphe centrée z définie sur U, dont l'image contient le disque fermé $\overline{\Delta}$. Donc $D_0 = z^{-1}(\overline{\Delta})$ est un disque conforme contenant p dans son intérieur. On pose $\Phi = \mathrm{Re}(\frac{1}{z} + z)$: c'est une fonction harmonique sur $U \setminus \{p\}$, qui diffère de $\mathrm{Re}\frac{1}{z}$ par une fonction lisse, et le choix de cette fonction assure que sur ∂D_0 on a $\mathrm{Im}(\frac{1}{z} + z) = \mathrm{Im}(\overline{z} + z) = 0$. Ceci implique la

Propriété. *La forme $*d\Phi$ s'annule sur le fibré tangent $T\partial D_0$. Donc $\int_{\partial D_0} f * d\Phi = 0$ pour toute fonction f continue sur ∂D_0.*

Soit $C^1_\Phi(X)$ l'ensemble des fonctions $u \in C^1(X \setminus \{p\}, \mathbb{R})$ telle que $u_{|U\setminus\{p\}} - \Phi$ s'étend en une fonction de classe C^1 sur U, et telle que $\mathcal{D}_{D_0}(u - \Phi) < +\infty$. Cet espace est non vide car il contient $u = \rho.\mathrm{Re}(\frac{1}{z})$, où $\rho \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ vaut 1 près de p et 0 hors de D_0. De plus, c'est un espace affine dirigé par $C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X, \mathbb{R})$. *L'intégrale de Dirichlet renormalisée* est la fonction $\mathcal{D}_\Phi$ définie sur $C^1_\Phi(X)$ par

$$\mathcal{D}_\Phi(u) := \mathcal{D}_{X\setminus D_0}(u) + \mathcal{D}_{D_0}(u - \Phi).$$

On pose

$$d(\Phi) = \inf_{u\in C^1_\Phi(X)} \mathcal{D}_\Phi(u) \in [0, +\infty[.$$

4.5 Énoncé du théorème d'existence d'un potentiel dipolaire

Théorème. *(i) Il existe une fonction* $u \in C^1_\Phi(X)$ *telle que* $\mathcal{D}_\Phi(u) = d(\Phi)$*, c'est-à-dire qui minimise* $\mathcal{D}_\Phi$ *sur* $C^1_\Phi(X)$*, et cette fonction est unique à une constante près.*

(ii) La fonction u *est harmonique sur* $X \setminus \{p\}$*, donc est un potentiel dipolaire en* p*.*

(iii) Si $w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X, \mathbb{R})$ *s'annule près de* p*,* $\mathcal{D}'_X(u, w) = 0$*.*

Ce théorème sera le point de départ de la preuve du théorème d'uniformisation au chapitre 6, qui suit de près [We], chapitres 12, 13 et 20 (cf. aussi [Si], pp. 154-178). La section 4.6 prouvera (ii) et (iii), et la section 4.7 prouvera (i), achevant la preuve du théorème.

Remarques. 1) Au voisinage de p, on aura $u = \mathrm{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ quitte à changer de carte holomorphe centrée, donc u est le potentiel d'un dipôle électrostatique de source p sur X. Pour l'interprétation électrique des fonctions harmoniques et des différentielles méromorphes, ainsi que la preuve physique de leur existence, voir le livre [Kl].

2) Si v est une autre fonction harmonique telle que $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z}$ est continue, $v - u$ est harmonique sur X. Donc si X est compacte, u est unique à une constante additive près.

3) La plupart des références classiques sur les surfaces de Riemann construisent plutôt une *fonction de Green*, c'est-à-dire une fonction harmonique sur $X \setminus \{p\}$ telle que $u + \log|z|$ s'étend continûment en p [donc de façon C^∞], et $u > 0$ sur $X \setminus \{p\}$. Une telle fonction n'existe pas toujours, par exemple si $X = \mathbb{C}$ ou X est compacte [dans ce deuxième cas, même sans la restriction $u > 0$], et la preuve du théorème d'uniformisation est différente suivant qu'elle existe ou non.

4.6 Preuve de l'harmonicité et de la propriété d'orthogonalité des miminimiseurs

Proposition. *Soient* $u_1, u_2 \in C^1_\Phi(X)$*, qui coïncident hors d'un domaine compact* $K \subset X$*.*

(i) Si $K \subset X \setminus D_0$*,* $\mathcal{D}_\Phi(u_1) - \mathcal{D}_\Phi(u_2) = \mathcal{D}_K(u_1) - \mathcal{D}_K(u_2)$*.*

(ii) Si $K \subset U$*,* $\mathcal{D}_\Phi(u_1) - \mathcal{D}_\Phi(u_2) = \mathcal{D}_K(u_1 - \Phi) - \mathcal{D}_K(u_2 - \Phi)$*.*

Démonstration. (i) En effet, $\mathcal{D}_\Phi(u_i) = \mathcal{D}_{X\setminus(K\cup D_0)}(u_i) + \mathcal{D}_K(u_i) + D_{D_0}(u_i - \Phi)$, et les termes extrêmes ont la même valeur pour $i = 1, 2$.

(ii) Quitte à augmenter K, on peut supposer que K est à bord lisse et que ∂K et ∂D_0 sont transverses. $K \setminus \mathrm{Int}(D_0)$ est alors un domaine à bord C^1 par morceaux, le bord étant formé de $\gamma \subset \partial K$ et de $\gamma_0 \subset \partial D_0$. On a

$$\mathcal{D}_\Phi(u_i) = \mathcal{D}_{X\setminus K}(u_i) + D_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)}(u_i) + D_{K\cap D_0}(u_i - \Phi),$$

et le premier terme a la même valeur pour $i = 1, 2$. Donc il faut montrer $D_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)}(u_1) - D_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)}(u_2) = D_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)}(u_1 - \Phi) - D_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)}(u_2 - \Phi)$. La différence vaut

$$\begin{aligned} 2D'_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)}(u_1 - u_2, \Phi) &= 2\iint_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)} d(u_1 - u_2) \wedge *d\Phi \\ &= 2\Big(\int_\gamma (u_1 - u_2) * d\Phi + \int_{\gamma_0} (u_1 - u_2) * d\Phi\Big). \end{aligned}$$

Le premier terme est nul puisque $u_1 = u_2$ sur ∂K, et le second aussi puisque $*d\Phi$ s'annule sur $T\partial D_0$.

Preuve de l'harmonicité d'un minimiseur de $\mathcal{D}_\Phi$. Soit $x \in X \setminus \{p\}$. Distinguons deux cas.

1) Si $x \in D_0$, il existe un disque conforme $D \subset X \setminus D_0$ contenant x dans son intérieur. Si u n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, par le principe de Dirichlet on a $\mathcal{D}_D(u) > \mathcal{D}((u_{|\partial D})^D)$. Par la Proposition 2 de la section 4.2, on peut trouver une fonction $v \in C^1(X \setminus \{p\})$ qui vaut u hors de D et vérifie $\mathcal{D}_D(v) < \mathcal{D}_D(u)$. D'après le (i) de la proposition,

$$\mathcal{D}_\Phi(v) - \mathcal{D}_\Phi(u) = \mathcal{D}_D(v) - \mathcal{D}_D(u) < 0,$$

ce qui contredit la minimalité de u. Donc u est harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$.

2) Si $x \notin D_0$, il existe un disque conforme $D \subset U \setminus \{p\}$ contenant x dans son intérieur. Si u n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, $u - \Phi$ n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, donc par le principe de Dirichlet on a $\mathcal{D}_D(u - \Phi) > \mathcal{D}((u - \Phi)^D)$. Comme en 1), on peut trouver une fonction $v \in C^1(U)$ qui vaut $u - \Phi$ sur $U \setminus D$

et vérifie $\mathcal{D}_D(v) < \mathcal{D}_D(u-\Phi)$. Posant $\widetilde{v} = v + \Phi$ sur D et u hors de D, Donc $\widetilde{v} \in C^1_\Phi(X)$ donc, d'après le (ii) de la proposition 1,

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{v}) - \mathcal{D}_\Phi(u) = \mathcal{D}_D(v) - \mathcal{D}_D(u-\Phi) < 0,$$

ce qui contredit la minimalité de u. Donc u est harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$.

Preuve de la propriété $\mathcal{D}'_X(u,w) = 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u+tw$ est dans $C^1_\Phi(X)$, donc $\mathcal{D}_\Phi(u) \leq \mathcal{D}_\Phi(u+tw)$. Or

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\Phi(u+tw) &= \mathcal{D}_{X\setminus D_0}(u+tw) + \mathcal{D}_{D_0}((u-\Phi)+tw)\\ &= \mathcal{D}_\Phi(u) + 2t(\mathcal{D}'_{X\setminus D_0}(u,w) + \mathcal{D}'_{D_0}(u-\Phi,w)) + t^2\mathcal{D}_X(w).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}'_{X\setminus D_0}(u,w) + \mathcal{D}'_{D_0}(u-\Phi,w) = 0$. Comme w s'annule près de p, la forme $w * du$ est bien définie et de classe C^1. Puisque $d(*d(u-\Phi)) = \Delta(u-\Phi) = 0$, on a $d(w * d(u-\Phi)) = dw \wedge *d(u-\Phi)$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_{D_0}(u-\Phi,w) = \mathcal{D}'_{D_0}(w,u-\Phi) &= \iint_{D_0} dw \wedge *d(u-\Phi) = \int_{\partial D_0} w *d(u-\Phi)\\ &= \int_{\partial D_0} w *du \text{ puisque } *d\Phi|T\partial D_0 = 0 \ (cf.4.4)\\ &= \iint_{D_0} dw \wedge *du = D'_{D_0}(u,w).\end{aligned}$$

Donc $0 = \mathcal{D}'_{X\setminus D_0}(u,w) + \mathcal{D}'_{D_0}(u-\Phi,w) = \mathcal{D}'_X(u,w)$, cqfd.

4.7 Preuve de l'existence d'un minimiseur

Soit $(u_n \in C^1_\Phi(X))$ une suite minimisante, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_\phi(u_n) \to d(\Phi)$. Nous allons montrer qu'il existe u harmonique sur $X \setminus \{p\}$ telle que $\mathcal{D}(u_n - u) \to 0$, c'est-à-dire $du_n - du$ converge vers 0 dans $L^2\Omega^1(X)$. Puis nous montrerons que u est le minimiseur cherché. Ceci prouvera en particulier que du est unique, donc u est unique à une constante près.

Nous donnons la preuve en quatre étapes.

1) Propriété de suite de Cauchy L^2. *Si $n, m \to +\infty$, $\mathcal{D}_X(u_n - u_m)$ tend vers 0. Autrement dit, $(du_n - du_0)$ est une suite de Cauchy dans $L^2\Omega^1(X)$. Donc (du_n) est une suite de Cauchy dans $L^2\Omega^1(E)$ pour tout domaine fermé $E \subset X \setminus \{p\}$.*

Démonstration. Comme pour le théorème de projection sur un convexe dans un Hilbert, ceci résulte de la formule «du parallélogramme», valable pour $u, v \in C^1(X)$, d'intégrale de Dirichlet finie sur un domaine E :

$$\mathcal{D}_E(\frac{u-v}{2}) + \mathcal{D}_E(\frac{u+v}{2}) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_E(u) + \mathcal{D}_K(v)).$$

Appliquant ceci à u_n, u_m sur $X \setminus D_0$ et à $u_n - \Phi, u_m - \Phi$ sur D_0, et faisant la somme, il vient

$$\mathcal{D}_X(\frac{u_n - u_m}{2}) + \mathcal{D}_\Phi(\frac{u_n + u_m}{2}) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\Phi(u_n) + \mathcal{D}_\Phi(u_m)),$$

autrement dit :

$$\mathcal{D}_X(u_n - u_m) = 2(\mathcal{D}_\Phi(u_n) + \mathcal{D}_\Phi(u_m)) - 4\mathcal{D}_\Phi(\frac{u_n + u_m}{2}).$$

Or $\mathcal{D}_\Phi(u_n)$ et $\mathcal{D}_\Phi(u_m)$ tendent vers d, et $\mathcal{D}_\Phi(\frac{u_n+u_m}{2}) \geq d$ puisque $\frac{u_n+u_m}{2} \in C^1_\Phi(X)$. Donc le terme de droite tend vers 0, cqfd.

2) Convergence dans $L^2\Omega^1(X \setminus D_0)$. *La suite (du_n) converge dans $L^2\Omega^1(X \setminus D_0)$ vers une forme harmonique exacte du.*

Démonstration. Soit q un point de $X \setminus D_0$. Il est contenu dans l'intérieur d'un disque conforme lisse $D \subset X \setminus D_0$. Soit (D_n) une suite de disques conformes telle que $D_n \subset \mathrm{Int}(D_{n+1})$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathrm{Int}(D)$. En utilisant le corollaire de la fin de la section 4.1, on peut trouver $\widetilde{u}_n \in C^1_\Phi(X)$ qui vérifie

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_D(\widetilde{u}_n) \leq \mathcal{D}_D(u_n)\\ &\widetilde{u}_n = u_n \text{ hors de } D\\ &\widetilde{u}_n \text{ est harmonique sur } \mathrm{Int}(D_n).\end{aligned}$$

La Proposition de la section précédente, partie (i), donne

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{u}_n) - \mathcal{D}_\Phi(u_n) = \mathcal{D}_D(\widetilde{u}_n) - \mathcal{D}_D(u_n) \le 0.$$

Donc $(\widetilde{u}_n)$ est encore une suite minimisante pour $\mathcal{D}_\Phi$, donc $d(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0 dans $L^2(X)$, et a fortiori dans $L^2(D)$. Puisque (du_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(D)$, il en est de même de $d\widetilde{u}_n$.

Puisque $\widetilde{u}_n$ est harmonique sur D_n qui grossit jusqu'à recouvrir $\mathrm{Int}(D)$, le corollaire 4.2 dit que $d\widetilde{u}_n$ tend vers une forme harmonique exacte α^D sur $\mathrm{Int}(D)$ pour la topologie C^∞, uniformément sur tout compact. Donc $d\widetilde{u}_n$ tend vers α^D dans $L^2_{loc}(\mathrm{Int}(D))$, et il en est de même de du_n. Ceci prouve que α^D au voisinage de q ne dépend pas du choix de D. Si l'on fait cela pour tous les points de $X \setminus D_0$, les différentes formes α^D se recollent pour donner une forme harmonique α sur $X \setminus D_0$, et la suite (du_n) converge dans $L^2_{loc}(X \setminus D_0)$ vers la forme harmonique α. Comme $(du_n - du_m)$ tend vers 0 dans $L^2\Omega^1(X)$, la convergence de (du_n) vers α est en fait dans $L^2\Omega^1(X \setminus D_0)$.

Reste à montrer que la forme α est exacte [on peut montrer plus généralement que toute forme de classe C^1 qui est limite dans L^2_{loc} de formes exactes est exacte : ici la preuve est plus simple car on sait déjà que α est fermée].

Il suffit de prouver que si $\gamma : S^1 \to X \setminus D_0$ est un lacet C^1 plongé, on a $\int_\gamma \alpha = 0$: a priori, il faut le savoir pour tout lacet C^1 par morceaux, mais par approximation on se ramène au cas où γ est C^1, immergé et à points doubles ordinaires ; alors $\int_\gamma \alpha = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \alpha_i$ où les γ_i sont C^1 par morceaux et plongés, et l'on peut approximer les γ_i par des plongements C^1. Épaississons γ en un plongement d'un anneau $\Gamma : S^1 \times [0,1] \to X \setminus D_0$, et munissons l'image A des coordonnées (θ, r). La forme $(du_n|A) \wedge dr$ converge vers $(\alpha|A) \wedge dr$ dans $L^2(A)$ donc dans $L^1(A)$. Comme $\iint_A du_n \wedge dr = 0$, on a $\iint_A \alpha \wedge dr = 0$. Puisque $d\alpha = 0$, $\int_{\Gamma(S^1 \times \{r\})} = \int_\gamma \alpha$ pour tout r, donc $\iint_A \alpha \wedge dr = \int_\gamma \alpha = 0$.

3) Convergence au voisinage de D_0. *Soit $D_1 \subset U$ un disque conforme contenant D_0 dans son intérieur. La suite $(d(u_n - \Phi)|\mathrm{Int}(D_1))$ converge dans $L^2(\mathrm{Int}(D_1))$ vers une forme harmonique exacte dw.*

Démonstration. Soit $D_2 \subset U$ un disque conforme contenant D_1 dans son intérieur. Posons $w_n = u_n - \Phi$. Comme dans l'étape 2, on peut trouver $\widetilde{w}_n \in C^1(U)$ qui coïncide avec w_n hors de D_2, est harmonique sur $\mathrm{Int}(D_1)$ et vérifie $\mathcal{D}_{D_2}(\widetilde{w}_n) \le \mathcal{D}_{D_2}(w_n)$. Posons $\widetilde{u}_n = u_n$ hors de U, $\widetilde{w}_n + \Phi$ sur U. D'après la proposition de la section précédente, partie (ii), on a

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{u}_n) - \mathcal{D}_\Phi(u_n) = \mathcal{D}_{D_2}(\widetilde{u}_n - \Phi) - \mathcal{D}_{D_2}(u_n - \Phi) = \mathcal{D}_{D_0'}(\widetilde{w}_n) - \mathcal{D}_{D_2}(w_n) \le 0.$$

Donc $(\widetilde{u}_n)$ est encore une suite minimisante pour $\mathcal{D}_\Phi$, donc $\mathcal{D}_X(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0, et a fortiori $D_{D_1}(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0. Donc $d(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0 dans $L^2\Omega^1(\mathrm{Int}(D_1))$, donc $d(\widetilde{w}_n - w_n)$ tend vers 0 dans $L^2\Omega^1(\mathrm{Int}(D_1))$.

Puisque (dw_n) est une suite de Cauchy dans $L^2\Omega^1(U)$, il en est de même de $(d\widetilde{w}_n)$, qui est de plus harmonique sur $\mathrm{Int}(D_1)$. De même que dans l'étape 2, $(d\widetilde{w}_n|\mathrm{Int}(D_1))$ converge vers une forme harmonique exacte dw dans $L^2\Omega^1(\mathrm{Int}(D_1)))$, donc il en est de même de (dw_n).

4) Fin de la preuve. Les formes exactes du sur $X \setminus D_0$ et $d\Phi + dw$ sur $\mathrm{Int}(D_1) \setminus \{p\}$ coïncident sur $\mathrm{Int}(D_1) \setminus D_0$ qui est connexe, donc quitte à ajouter une constante on a $u = \Phi + w$ sur $\mathrm{Int}(D_1) \setminus D_0$, ce qui permet d'étendre u à une fonction harmonique sur $X \setminus \{p\}$, que nous noterons encore u : cette fonction est dans $C^1_\Phi(X)$ par construction. D'après les deux sections précédentes, $(du_n - du)$ converge vers 0 dans $L^2(X)$. Par le lemme de Fatou, $du - du_0 \in L^2(X)$, donc $u \in C^1_{\Phi, \mathcal{D}<\infty}$, et $\mathcal{D}_\Phi(u) \le \liminf \mathcal{D}_\Phi(u_n) = \lim \mathcal{D}_\Phi(u_n) : d(\Phi)$, donc $\mathcal{D}_\Phi(u) = d(\Phi)$.

Remarque. On peut éviter l'usage du lemme de Fatou et donc de la théorie de la mesure, en utilisant la continuité L^2 de $\mathcal{D}_\Phi$: si $u_1, u_2 \in C^1_{\Phi, \mathcal{D}<\infty}(X)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_\Phi(u_1) - \mathcal{D}_\Phi(u_2)| &\le 2\sqrt{2} \max(\mathcal{D}_\Phi(u_1)^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}_\Phi(u_2)^{\frac{1}{2}}) \mathcal{D}_X(u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_X(u_1 - u_2) \\ &= 2\sqrt{2} \max(\mathcal{D}_\Phi(u_1)^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}_\Phi(u_2)^{\frac{1}{2}}) ||du_1 - du_2||_{L^2(X)} + ||du_1 - du_2||^2_{L^2(X)}. \end{aligned}$$

En effet, pour l'intégrale de Dirichlet usuelle, on a

$$\mathcal{D}_K(u_1) - \mathcal{D}_K(u_2) = 2\mathcal{D}'_K(u_2, u_1 - u_2) + \mathcal{D}_K(u_1 - u_2) \leq 2\mathcal{D}_K(u_2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_K(u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_K(u_1 - u_2).$$

On en déduit

$$|\mathcal{D}_K(u_1) - \mathcal{D}_K(u_2)| \leq 2\max(\mathcal{D}_K(u_1)^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}_K(u_2)^{\frac{1}{2}})\mathcal{D}_K(u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_K(u_1 - u_2).$$

[Géométriquement : $|||v_1||^2 - ||v_2||^2| \leq 2\max(||v_1||, ||v_2||)||v_1 - v_2|| + ||v_1 - v_2||^2$] Appliquant ceci à u_1, u_2 sur $X \setminus D_0$ et $u_1 - \Phi, u_2 - \Phi$ sur D_0, et utilisant l'inégalité $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(a+b)^{\frac{1}{2}}$, on obtient le résultat.

5 Existence de différentielles et de fonctions méromorphes, séparabilité

5.1 Existence de différentielles et de fonctions méromorphes

Théorème. *Soient X une surface de Riemann, et p un point de X.*

(i) Il existe une différentielle méromorphe ω ayant un pôle double en p, sans résidu, sans autre pôle.

(ii) Il existe une fonction holomorphe ayant un pôle en p (d'ordre non précisé, il peut aussi y avoir d'autres pôles).

Démonstration. (i) Si u est un potentiel dipolaire en p, considérons la différentielle holomorphe $\omega = du + i * du$ sur $X \setminus \{p\}$. Sur $D_0 \setminus \{p\}$, on a $u = \Phi + w$ où w est harmonique au voisinage de D_0. Donc w est la partie réelle d'une fonction holomorphe h définie au voisinage de D_0, et $u = \mathrm{Re}(\frac{1}{z} + z + h(z))$, donc

$$\omega = d(\frac{1}{z} + z + h(z)) = -\frac{dz}{z^2} + g(z)dz,$$

avec g holomorphe en p. Donc ω est une différentielle méromorphe sur X, avec un pôle double en p, de résidu nul et holomorphe ailleurs.

(ii) Soit $q \in X \setminus \{p\}$, et soit ω' une différentielle méromorphe ayant un pôle double en q et holomorphe ailleurs. Alors $f = \frac{\omega}{\omega'}$ est une fonction méromorphe qui a un pôle au moins double en p.

5.2 Séparabilité des surfaces de Riemann

Théorème de Radó. *Toute surface de Riemann est séparable.*

Démonstration. On vient de voir qu'il existe une application holomorphe non constante $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Or une telle application est localement un revêtement ramifié.

Par ailleurs, on peut recouvrir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par un nombre dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biholomorphes à Δ (par exemple les boules $B(z, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{C}$ avec $z \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et les complémentaires dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des $\overline{\Delta}_n$, $n \in \mathbb{N}$). Soit $\widetilde{\mathcal{U}}$ l'ensemble des ouverts $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ tels qu'il existe $(n, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $f(\widetilde{U}) = U_n$ et $f : \widetilde{U} \to U_n$ est un revêtement ramifié connexe [un tel revêtement est biholomorphiquement équivalent à $z \mapsto z^d$ de Δ dans lui-même, mais on n'a pas besoin de le savoir]. Nous allons montrer : 1) $\widetilde{\mathcal{U}}$ est une base de la topologie de X et 2) $\mathcal{U}$ est dénombrable.

1) Si $x \in X$ et V est un voisinage de x, il contient un sous-voisinage ouvert W tel que $f : W \to f(W)$ est équivalente à $z \mapsto z^d$ de Δ sur lui-même, avec $d = \deg_x(f)$. Ensuite, $f(W)$ contient un U_n contenant $f(x)$, donc $f^{-1}(U_n) \cap W$ est un élément de $\widetilde{\mathcal{U}}$ qui contient x et est contenu dans W, cqfd.

2) Soit $\widetilde{U}$ un élément de $\mathcal{U}$. L'ensemble $S_1(\widetilde{U}) = \{\widetilde{V} \in \mathcal{U} \mid \widetilde{V} \cap \widetilde{U} \neq \emptyset\}$ est la réunion dénombrable des $E_n = \{\widetilde{V} \in S_1(\widetilde{U}) \mid f(\widetilde{V}) = U_n\}$. Or les éléments de E_n sont disjoints, en effet si $\widetilde{U}_1$ et $\widetilde{U}_2$ sont deux tels éléments, $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$ est ouvert et fermé dans $\widetilde{U}_1$. Comme $\widetilde{U}$ est homéomorphe à un disque donc séparable, E_n est au plus dénombrable donc $S_1(\widetilde{U})$ est au plus dénombrable. Ensuite, soit $\widetilde{U}$ un élément de $\mathcal{U}$. Puisque X est connexe, pour tout $\widetilde{V} \in \mathcal{U}$ il existe une suite finie $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U}, \widetilde{U}_1, \cdots, \widetilde{U}_k = \widetilde{V}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ telle que $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_{i+1} \neq \emptyset$: en effet, la réunion des $\widetilde{V}$ admettant une telle suite est un ouvert non vide dont le complémentaire est ouvert car il est la réunion des $\widetilde{V}$ n'admettant pas une telle suite. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n(\widetilde{U})$ l'ensemble des $\widetilde{V} \in \mathcal{U}$ admettant une telle suite avec $k \leq n$. On a $S_{n+1}(\widetilde{U}) = \bigcup_{\widetilde{V} \in S_n(\widetilde{U})} S_1(\widetilde{V})$, donc $S_n(\widetilde{U})$ est dénombrable par récurrence sur n, et il en est de même de $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} S_N(\widetilde{U})$.

**Remarque.* L'argument de 2) montre que tout graphe connexe dont tout sommet est de degré au plus dénombrable, a au plus un nombre dénombrable de sommets.*

6 Théorème d'uniformisation

Pour tout ce qui concerne les notions suivantes : simple connexité, groupe fondamental, revêtements et homologie, voir [Go]. Nous donnons tous les énoncés de topologie dont nous aurons besoin, mais sans toujours les prouver (ceci concerne surtout les énoncés d'approximation et de transversalité).

6.1 Surfaces de Riemann simplement connexes

Définition. Une surface de Riemann est *simplement connexe* si tout lacet continu (ou C^1, C^∞) dans X est homotope (ou C^1-homotope, C^∞-homotope) à un lacet constant. De façon équivalente, toute application continue $f : \partial\Delta \to X$ (resp. de classe C^1, C^∞) s'étend continûment (resp. de façon C^1, C^∞) à $\overline{\Delta}$.

Remarques. 1) L'équivalence entre «homotope à une constante» et «s'étend à $\overline{\Delta}$» est claire en coordonnées polaires. La définition usuelle demande que tout lacet soit homotope à une constante relativement au point-base. Mais pour des espaces «raisonnables» comme des variétés différentiables, c'est équivalent à la définition ci-dessus. (Une définition d'espaces «raisonnables» pourrait être : les espaces ayant le type d'homotopie d'un complexe cellulaire (CW-complexe) ou plutôt tels que (X, x) a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire basé, cf [Mi 1]). Dans le cas de variétés différentiables, on peut remplacer les lacets continus par des lacets C^1 ou C^∞, via des théorèmes d'approximation, cf [Go].

2) Nous donnerons dans la section suivante la définition originale de Riemann pour la simple connexité, qui est elle spécifique aux surfaces.

Exemples de surfaces de Riemann simplement connexes :

- tout ouvert convexe $U \subset \mathbb{C}$, en particulier $\mathbb{C}$ et Δ. En effet, si $z_0 \in U$, $\gamma : \partial\Delta \to U$ se prolonge continûment à $\overline{\Delta}$ par $\Gamma(z) = z_0 + |z|(\gamma(\frac{z}{|z|}) - z_0)$ si $z \neq 0$, $\Gamma(0) = z_0$.
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: un lacet $\gamma : \partial\Delta \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de classe C^1 n'est pas surjectif par le théorème de Sard (cas facile de ce théorème : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on recouvre $\gamma(\partial\Delta)$ par n disques de rayon Cn^{-1}). Si $p_0 \in S^2 \setminus \gamma(S^1)$, $S^2 \setminus \{p_0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$ par projection stéréographique, donc γ s'étend continûment comme ci-dessus.

Théorème 1 (théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe). *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à $\mathbb{C}$, Δ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

On pourra trouver l'histoire de ce théorème dans [SG]. La preuve sera donnée dans les sections 6.3 et 6.4.

Proposition. *Les trois surfaces $\mathbb{C}$, Δ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. La dernière est compacte et pas les deux premières. Ensuite, Δ admet une fonction holomorphe bornée non constante [on dit qu'elle est *hyperbolique*], et $\mathbb{C}$ n'en admet pas par le théorème de Liouville.

Remarque. Le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe généralise celui de Riemann (cf. le cours d'Analyse complexe), qui dit que *tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ qui évite un point est biholomorphe à Δ*. En effet, un tel ouvert U n'est pas biholomorphe à $\mathbb{C}$: si $a \in \mathbb{C} \setminus U$, la simple connexité entraîne l'existence d'un logarithme, donc d'une racine carrée holomorphe f de $z - a$ (car $\frac{df}{f}$ est fermée donc exacte, voir section suivante), et l'image de f contient un disque ouvert $b + \Delta_r$, donc évite $-b + \Delta_r$, donc $\frac{1}{f+b}$ est une fonction holomorphe bornée.

6.2 Propriétés des surfaces de Riemann simplement connexes

Définitions. Une *courbe proprement plongée* dans une variété différentiable [séparable] est une sous-variété connexe de classe C^1 par morceaux [forcément séparable] qui est un sous-espace topologique fermé. Le théorème de classification des variétés [séparables] de dimension un (cf [Mi 2]) implique qu'une telle sous-variété est l'image d'un plongement propre C^1 par morceaux de S^1 ou de $\mathbb{R}$. Dans le premier cas, on dit qu'on a un *lacet plongé*, dans le second une *droite proprement plongée.* Une *courbe proprement plongée* est un lacet plongé ou une droite proprement plongée, de classe C^1 par morceaux.

Proposition. *Soit X une surface de Riemann simplement connexe. On a les deux propriétés suivantes :*

(i) Toute 1-forme fermée de classe C^1 est exacte.

(ii) Toute courbe proprementγ plongée disconnecte X. Plus précisément : son complémentaire a deux composantes, dont l'adhérence est un domaine fermé bordé par γ.

Démonstration. (i) Soit $\alpha \in \Omega^1(X)$ une forme fermée. Pour montrer que α est exacte, il suffit de montrer que $\int_\gamma \alpha = 0$ pour tout lacet $\gamma : S^1 \to X$ de classe C^1. Puisque X est simplement connexe, γ s'étend en une application $\Gamma : \overline{\Delta} \to X$ de classe C^1. Par Stokes,

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\partial\Delta} \gamma^*\alpha = \int_{\overline{\Delta}} \Gamma^* d\alpha = 0.$$

(ii) Montrons d'abord que γ disconnecte X. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors γ est l'image d'un plongement propre de $C = \mathbb{R}$ ou S^1 dans X, que nous notons aussi γ. Par lissage des points singuliers, on peut supposer γ de classe C^1. Par théorème de voisinage tubulaire (référence à préciser), on peut épaissir γ en un plongement $\Gamma : C \times [-1,1] \to X$, tel que $U = \Gamma(C\times]-1,1[)$ disconnecte encore X. Fixons $t_0 \in C$. Les deux points $\Gamma(t_0,-1)$ et $\Gamma(t_0,1)$ sont dans la même composante de $X \setminus U$, donc on peut prolonger $\Gamma|\{t_0\} \times [-1,1]$ à un lacet $\lambda : [-2,2]/_{-2\sim 2} \to X$, de classe C^1 par morceaux, qui envoie $[-2,1] \cup [1,2]$ dans U.

Soit r la fonction induite sur $\Gamma(C \times [-1,1])$ via Γ par la coordonnée $[-1,1]$. Soit $\rho \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ valant 0 sur $]-\infty,-1]$ et 1 sur $[1,+\infty[$. On définit la 1-forme α qui vaut $d(\rho(r)) = \rho'(r)dr$ sur U et 0 sur $X \setminus U$. Elle est de classe C^1 et fermée, mais $\displaystyle\int_\lambda \alpha = \int_{-1}^1 \rho'(r)dr = 1$, ce qui contredit (i).

Le fait que γ a exactement deux composantes vient de ce que tout point de X est connecté dans $X \setminus \gamma$ à un point de $U \setminus \gamma \approx C \times (]-1,0[\cup]0,1])$. De plus l'adhérence de chacune d'elles est un domaine à bord C^1 par morceaux de bord γ : ceci résulte du fait que $(U,\gamma) \approx (C\times]-1,1[, C \times \{0\})$. En fait, on a seulement besoin de la version locale, cf. le cours de Géométrie avancée qui traite aussi le cas C^1 par morceaux.

Remarques. 1) Si X est compacte, la propriété (ii) dit que tout lacet plongé disconnecte. Cela veut dire que le *genre de Riemann* $g_R(X)$ de X est zéro, où par définition $g_R(X)$ est le nombre maximum de lacets plongés qui ne disconnectent pas X.

Si X n'est pas compacte, la propriété que tout lacet plongé disconnecte équivaut à la *planarité*, c'est-à-dire au fait que X est homéomorphe à un ouvert de S^2.

2) La propriété (ii) se traduit par la nullité de l'homologie $H^1(X,\mathbb{R})$. Si X est une surface non orientable ou une variété de dimension ≥ 3, cela n'implique pas la simple connexité, exemple $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$.

Remarque. Dans la preuve du théorème d'uniformisation, la simple connexité sera utilisée via la Proposition ci-dessus.

6.3 Construction de la fonction uniformisante

Soient X une surface de Riemann simplement connexe, et p un point de X. D'après le chapitre précédent, il existe une différentielle méromorphe ω qui a un pôle double sans résidu en p et est holomorphe ailleurs, et telle que de plus sa partie réelle $\mathrm{Re}\omega = du$ est exacte et vérifie

$$(*) \qquad \mathcal{D}'_X(u,w) = 0 \text{ pour tout } w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X) \text{ tel que } w = 0 \text{ près de } p.$$

Rappelons que cette propriété résulte du fait que u minimise l'intégrale de Dirichlet renormalisée $\mathcal{D}_\Phi$.

Proposition 1. *La forme harmonique $*du$ est exacte sur $X \setminus \{p\}$. Donc il existe v harmonique sur $X \setminus \{p\}$ telle que $f = u + iv$ est méromorphe sur X, avec un pôle simple en p.*

Démonstration. Ceci résulte du fait que toute forme fermée est exacte.

*[*Remarque.* La fonction f existe dès que tout lacet plongé disconnecte. En effet, il suffit de montrer que si $\gamma : S^1 \to X \setminus \{p\}$ est un lacet C^∞ plongé, on a $\displaystyle\int_\gamma *du = 0$. On épaissit γ en un plongement lisse $\Gamma : [-1,0] \times S^1 \to X \setminus \{p\}$, avec $\Gamma(0,.) = \gamma$ (demi-voisinage tubulaire). Par hypothèse, $\gamma(S^1)$ disconnecte X, et il en est de même de l'anneau $A = \Gamma([-1,0] \times S^1)$. Notons X_- et X_+ les composantes de $X \setminus A$ de frontière

$\Gamma(\{-1\}\times S^1)$ et $\gamma(S^1)$. Quitte à remplacer γ par $\overline{\gamma}$, on peut supposer $p\in X_-$. Soit $w\in C^\infty(X,[0,1])$ qui vaut 0 sur X_-, 1 sur X_+, et $w(\Gamma(s,t))=w(s)$. Alors $w\in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X)$, w est nulle près de p, donc

$$\int_X (du,dw) = 0 = \int_A d(w*du) = \int_\gamma *du.]*$$

Le théorème d'uniformisation résultera alors du

Théorème 2. *Soit $f=u+iv : X\to \mathbb{P}^1\mathbb{C})$ une fonction méromorphe sur X simplement connexe, ayant un pôle simple en p, sans pôle ailleurs, et vérifiant la propriété $(*)$. Alors f est injective, et son image est soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{z_0\}$, soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus([-u_0,u_1]+iv_0)$ avec $u_0,u_1,v_0\in\mathbb{R}$, $u_0<u_1$.*

Preuve du théorème 1 modulo le théorème 2. Rappelons qu'une application holomorphe injective est un biholomorphisme local. Donc dans le premier cas l'application f est un biholomorphisme de X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. (Remarque : si X est compacte, il est immédiat qu'on est dans ce cas : l'application holomorphe $f : X\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est de degré un donc est un isomorphisme).

Dans le second cas, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{z_0\}$ est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{\infty\}=\mathbb{C}$ via $\dfrac{1}{z-z_0}$. Donc l'application $\dfrac{f}{z-z_0}$ est un biholomorphisme de X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dans le dernier cas, $g := \dfrac{2f-(u_0+u_1)}{u_1-u_0} - iv_0$ est un biholomorphisme de X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus[-1,1]$. Or la *transformation de Joukovski*

$$h(w)=\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})\ ,\ h(0)=\infty,$$

est un biholomorphisme de Δ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus[-1,1]$. Son inverse est $h^{-1}(z)=z+\sqrt{z^2-1}$, avec la détermination de la racine carrée qui est positive sur $]1,+\infty[$ (exercice : prouver cela). Donc

$$h^{-1}\circ g(z) = g(z)+\sqrt{g(z)^2-1} = \frac{2f(z)-(u_0+u_1)}{u_1-u_0} - iv_0 + \Big[\Big(\frac{2f(z)-(u_0+u_1)}{u_1-u_0} - iv_0\Big)^2 - 1\Big]^{\frac{1}{2}}$$

est un biholomorphisme de X sur Δ.

6.4 Preuve du théorème 2

Nous prouvons un lemme clé dû à Koebe, puis l'injectivité et enfin nous déterminons l'image.

1) Lemme clé. *Il n'existe pas de courbe proprement plongée dans X, contenue dans $X\setminus\{p\}$, qui est contenu dans la réunion d'un niveau $\{u=u_0\}$ de u et d'un nombre fini $\{v=v_1\},\cdots,\{v=v_n\}$ de niveaux de v.*

Remarque. Attention à la formulation : on demande à la courbe d'être proprement plongée dans X, pas seulement dans $X\setminus\{p\}$: on exclut donc une droite plongée asymptote à p.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une telle courbe γ existe. Par simple connexité, elle borde deux domaines fermés dans X. Soit K celui qui ne contient pas p.

Soient $\varphi,\psi\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, bornées ainsi que leurs dérivées, avec $\varphi'>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\psi>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{v_1,\cdots,v_n\}$, et $\varphi(u_0)=\varphi'(u_0)=0$, $\psi(v_i)=\psi'(v_i)=0$. Explicitement, on peut prendre $\varphi(t)=(\mathrm{Arctg}(t-u_0))^3$, $\psi(t)=\displaystyle\prod_{i=1}^n(\mathrm{Arctg}(t-v_i))^2$.

Soit $w : X\to\mathbb{R}$ telle que $w=(\varphi\circ u).(\psi\circ v)=\varphi(u)\psi(v)$ sur K et 0 ailleurs. Alors φ est de classe C^1 car $\varphi|\partial K=0$ et $D\varphi|\mathrm{Int}(K)$ se prolonge par continuité en 0 sur ∂K. Puisque $dv=*du$, on a $(du,dv)=0$ et $||du||^2=||dv||^2$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_X(w)=\mathcal{D}_K(\varphi(u)\psi(v)) &= \iint_K ||\varphi'(u)\psi(v)du+\varphi(u)\psi'(v)dv||^2\\ &= \iint_K (\varphi'(u)^2\psi(v)^2+\varphi(u)^2\psi'(v)^2))\ ||du||^2 \le C\mathcal{D}_K(u)<\infty.\end{aligned}$$

On peut donc calculer $\mathcal{D}'_X(u,w)$, qui vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_X(u,w) = \mathcal{D}'_K(u,\varphi(u)\psi(v)) &= \iint_K (du, \varphi'(u)\psi(v)du + \varphi(u)\psi'(v)dv)\\ &= \iint_K \varphi'(u)\psi(v)\ ||du||^2 > 0.\end{aligned}$$

Ceci contredit $(*)$.

2) Injectivité. *L'application f est injective. En particulier, f n'a pas de point critique, donc u et v non plus.*

Démonstration. Supposons au contraire que f prend deux fois la même valeur $z_0 = u_0 + iv_0$, nécessairement finie. Puisque X est séparable, les points critiques de f sont en nombre au plus dénombrable. Par ailleurs, ils coïncident avec ceux de u et avec ceux de v. Puisque les points ayant au moins deux images réciproques forment un ouvert, on peut perturber z_0 pour que u_0 ne soit pas une valeur critique de u et v_0 ne soit pas une valeur critique de v. Alors les niveaux $\{u = u_0\}$ et $\{v = v_0\}$ sont des courbes lisses propres dans $X \setminus \{p\}$ (pas forcément connexes), qui se rencontrent en (au moins) deux points p_1 et p_2.

Par ailleurs, au point p, $\dfrac{1}{f}$ est une carte holomorphe centrée, que nous noterons $\zeta = \xi + i\eta$, de sorte que $u = \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $v = -\dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Son image contient un disque fermé $\overline{\Delta}_r$.

Dans cette carte, le niveau $\{u = u_0\}$ devient $\{\xi = u_0(\xi^2+\eta^2)\}$, cercle (si $u_0 \neq 0$) ou droite (si $u_0 = 0$) passant par 0, à tangente verticale. De même, le niveau $\{v = v_0\}$ devient $\{\eta = -v_0(\xi^2+\eta^2)\}$, cercle (si $v_0 \neq 0$) ou droite (si $v_0 = 0$) passant par 0, à tangente horizontale. On en déduit que $C_{u_0} := \{u = u_0\} \cup \{p\}$ et $\Gamma_{v_0} := \{v = v_0\} \cup \{p\}$ sont des courbes proprement plongées dans X, qui se rencontrent transversalement en les trois points p_1, p_2, p.

Considérons les quatre branches locales de C_{u_0} et de Γ_{v_0} en p_1. D'après le lemme clé, on ne peut en avoir deux qui restent dans $X \setminus \{p\}$, donc il y en a au moins trois qui passent par p. De même, parmi les quatre branches locales de C_{u_0} et de Γ_{v_0} en p_2, il y en a au moins trois qui passent par p. Il y a alors deux possibilités.

1) Il existe un lacet plongé $\gamma_1 \subset C_{u_0}$ et un lacet plongé $\gamma_2 \subset \Gamma_{v_0}$, tels que γ_1 et γ_2 contiennent p_1, p_2 et p.
2) Même énoncé, avec des droites proprement plongées au lieu de lacets.

Dans le premier cas, on peut former un lacet réunion des arcs de p_1 à p_2 sur γ_1 et γ_2 qui évitent p, ce qui contredit le lemme clé. Dans le second cas, soit les points p_1 et p_2 sont reliés sur γ_1 et γ_2 sans passer par p, et l'on a la même contradiction, soit l'un des points p_1 et p_2 est relié à l'infini sur γ_1 et sur γ_2 sans passer par p, donnant une droite proprement plongée qui contredit aussi le lemme clé.

3) Fin de la preuve : détermination de l'image. D'après la section précédente, pour tout $v_0 \in \mathbb{R}$, Γ_{v_0} est une courbe propre et lisse dans X. De plus, elle n'a qu'une seule composante connexe, celle qui contient p : une autre composante contredirait le lemme clé. Elle est donc un lacet plongé ou une droite proprement plongée. La restriction de u à Γ_{v_0} est injective à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, et elle prend la valeur ∞, donc son image est :

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si Γ_{v_0} est un lacet
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus [u_0, u_1]$ avec $u_0 \leq u_1$ si Γ_{v_0} est une droite proprement plongée.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de prouver qu'il ne peut exister deux valeurs v_1, v_2 telles que Γ_{v_0} et Γ_{v_1} soient toutes les deux des arcs. Si c'était le cas, on fabriquerait une droite proprement plongée dans X, composée

- d'une demi-droite allant de p à l'infini dans Γ_{v_1}, sur lequel u varie de $+\infty$ à U_1
- d'une demi-droite allant de p à l'infini dans Γ_{v_2}, sur lequel u varie de $+\infty$ à U_2.

Prenant $U > 0$ assez grand, on peut la «tronquer» par un petit arc dans $\{u = U\}$ contenu dans le domaine de ζ, obtenant ainsi une droite proprement plongée contredisant le lemme clé [c'est la seule fois où celui-ci est utilisé avec plus d'une valeur pour v]. Ceci achève la preuve.

7 Revêtements holomorphes

7.1 Revêtements

Définitions. Une application $\pi : \widehat{X} \to X$ entre deux espaces topologiques est un *revêtement* si pour tout point $x \in X$ la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ est discrète et il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une application $\varphi : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\{x\})$ tels que $\Phi = \varphi \times \pi$ est un homéomorphisme de $\pi^{-1}(U)$ sur $\pi^{-1}(\{x\}) \times U$. On dit que U est un ouvert trivialisant et que φ est une trivialisation.

Si X est connexe, les fibres $\pi^{-1}(\{x\}$ sont donc toutes homéomorphes à un même espace discret F, et l'on parle de revêtement de fibre F. En particulier, si F est finie à d éléments, on a un revêtement fini *à d feuillets* ou *d'ordre d*.

Propriété. *Si $\pi : \widehat{X} \to X$ est un revêtement et si X est séparé, $\widehat{X}$ est séparé.*

Démonstration. Soient $x, y \in \widehat{X}$ deux points distincts. Si $\pi(x) \neq \pi(y)$, $\pi(x)$ et $\pi(y)$ sont contenus dans deux ouverts disjoints U et V, donc x et y sont contenus dans les deux ouverts disjoints $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(V)$. Si $\pi(x) = \pi(y) = p$ et si $\varphi : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\{p\})$ est comme dans la définition d'un revêtement, x et y sont dans les ouverts disjoints $\varphi^{-1}(\{\varphi(x)\} \times U)$ et $\varphi^{-1}(\{\varphi(y)\} \times U)$.

Revêtements holomorphes. Si $\widetilde{X}$ et X sont des surfaces de Riemann, $\pi : \widetilde{X} \to X$ est un reveêtement holomorphe (non ramifié) si π est un revêtement et π est holomorphe sans point de ramification (= sans point critique). On a vu que toute application holomorphe propre sans point critique est un revêtement holomorphe fini.

Exemple de revêtement holomorphe infini : l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

Proposition. *Si $\pi : \widehat{X} \to X$ est un revêtement, X est une surface de Riemann et $\widehat{X}$ est connexe, il existe une unique structure de surface de Riemann sur $\widehat{X}$ telle que π soit holomorphe, et c'est alors un revêtement holomorphe non ramifié.*

Démonstration. Si cette structure existe et si z est une carte holomorphe sur X, $z \circ \pi$ est une carte holomorphe sur $\widetilde{X}$, ce qui prouve l'unicité. Réciproquement, les $z \circ \pi$ où z est une sur X carte de domaine $\pi(\widehat{U})$ où $\widehat{U}$ est un ouvert de $\widehat{X}$ tel que $\pi|\widehat{U}$ est un homéomorphisme sur son image [par exemple $\widehat{U} = \varphi^{-1}(\{t\} \times U]$, on obtient un atlas holomorphe sur $\widehat{X}$ ayant la propriété voulue.

Définition. Si $\widehat{X}$ est simplement connexe, on dit que π est un revêtement *universel* de X. L'espace $\widehat{X}$ est alors le plus souvent noté $\widetilde{X}$.

Exemples. L'application $\pi_d : z \in \Delta^* \mapsto z^d \in \Delta^*$ est un revêtement de degré d du disque pointé. L'application $\pi_\infty : z \in \mathbb{H} \mapsto e^{iz}$ est un revêtement universel du disque pointé.

7.2 Existence et unicité du revêtement universel

Théorème. *Toute surface de Riemann simplement connexe admet un revêtement universel $\pi : \widetilde{X} \to X$, unique à isomorphisme près.*

Démonstration. On fixe un point $p_0 \in X$, et l'on considère l'espace $\mathcal{C}(X, p_0)$ des chemins continus $\gamma : [0,1] \to X$ tels que $\gamma(0) = p_0$. On munit $\mathcal{C}(X, p_0)$ de la topologie compacte-ouverte [ou ce qui revient au même de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, pour une distance quelconque définissant la topologie de X]. On définit la relation : $\gamma \simeq_{rel\ \partial} \gamma'$ si et seulement s'il existe H continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans X telle que

- H est une homotopie entre γ et γ', soit $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = \gamma'(t)$ (on note $H : \gamma \simeq \gamma'$)
- H fixe les extrémités, soit $H(0,u) = p_0$, $H(1,u) = \gamma(1) = \gamma'(1)$.

Cette relation est une relation d'équivalence. Pour le voir, définissons les notions de concaténation et d'inverse de chemins et d'homotopies :

1) Si $\gamma, \gamma' : [0,1] \to X$ sont deux chemins continus tels que $\gamma(1) = \gamma'(0)$, leur *concaténation* est $(\gamma * \gamma')(t) = \gamma(2t)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\gamma'(2t-1)$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Le chemin inverse (ou opposé) de γ est $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.

2) De même, si $H : \gamma \to \gamma'$ et $H' : \gamma' \simeq \gamma''$ sont deux homotopies, on définit $H * H'(t,u) = H(2t,u)$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $H'(2t-1,u)$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ [soit $(H * H')(.,u) = H(.,u) * H'(.,u)$] c'est clairement une homotopie de γ à γ'', qui fixe les extrémiés si c'est le cas pour H et H'. De même, on définit $\overline{H}(t,u) = H(1-t),u)$, qui est une homotopie de γ' à γ, qui fixe les extrémités si c'est le cas pour H.

Comme $H(t,u)=\gamma(t)$ est une homotopie qui fixe les extrémiés, la relation $\simeq$ est bien une relation d'équivalence. On note $[\gamma]$ la classe d'équivalence de $\gamma \in \mathcal{C}(X,p_0)$.

L'espace $\widetilde{X}$ est alors défini comme l'espace topologique quotient de $\mathcal{C}(X,p_0)$ par $\simeq_{rel\ \partial}$, et la projection $\pi : \widetilde{X} \to X$ est $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$, qui est continue par définition de la topologie quotient.

Proposition 1. *(i) Soit γ_0 un élément de $\mathcal{C}(X,p_0)$. On note $p_1 = \gamma_0(1) = \pi([\gamma])$. Soit $\varphi : U \to \Delta$ une carte holomorphe centrée en p_1, d'image le disque unité Δ. Pour $p \in U$, on note α_p le chemin $t \mapsto \varphi^{-1}(t\varphi(p))$, qui va de p_1 à p dans U. On définit*

$$\widetilde{U} = \pi^{-1}(U) = \{[\gamma] \in \widetilde{X} \mid \gamma(1) \in U\}.$$

Alors

(i) l'application

$$\Phi : [\gamma] \in \widetilde{U} \mapsto ([\gamma * \overline{\alpha_{\gamma(1)}}], \gamma(1)) = ([\gamma * \overline{\alpha_{\pi([\gamma])}}], \pi([\gamma]))$$

est bien définie, et est un homéomorphisme de $\widetilde{U}_\varphi$ sur $\pi^{-1}(\{p_1\}) \times U$;

(ii) la fibre $\pi^{-1}(\{p_1\})$ est discrète pour la topologie induite. Donc π est un revêtement topologique.

Corollaire. *$\widetilde{X}$ est séparé.*

Preuve de la proposition. (i) Montrons d'abord que Φ est bien définie. Si $[\gamma] = [\gamma']$, il existe H homotopie à extrémités fixes de γ à γ_1, alors $\gamma(1) = \gamma_1(1)$ et si h est l'homotopie constante $h(t,u) = \alpha_{\gamma(1)}(t)$, $H * \overline{h}$ est une homotopie à extrémités fixes de $\gamma * \overline{\alpha_{\gamma(1)}}$ à $\gamma_1 * \overline{\alpha_{\gamma(1)}}$, donc $[\gamma * \overline{\alpha_{\gamma(1)}}] = [\gamma_1 * \overline{\alpha_{\gamma(1)}}]$.

Montrons la surjectivité. Si $([c], p) \in \pi^{-1}(\{p_1\}) \times U$, on définit $\gamma = c * \alpha_p$ de sorte que $\gamma(1) = p$. Alors $\gamma * \overline{\alpha_p} = (c * \alpha_p) * \overline{\alpha_p}$, et l'on a une homotopie à extrémités fixes de c à $(c * \alpha_p) * \overline{\alpha_p}$ donnée par

$$H(t,u) = \begin{cases} c((1+u)t) \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha_p((4t-2)u) \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \alpha_o((4-4t)u) \text{ si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Donc $\Phi([c * \alpha_p]) = ([c], p)$, donc Φ est surjective.

Montrons l'injectivité. Si $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \widetilde{U}$ et $\Phi([\gamma_1]) = \Phi([\gamma_2])$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = p$, et il existe une homotopie $H : \gamma_1 * \overline{\alpha_p} \simeq_{rel\ \partial} \gamma_2 * \overline{\alpha_p}$. On en déduit une homotopie $H * h : (\gamma_1 * \overline{\alpha_p}) * \alpha_p \simeq_{rel\ \partial} \gamma_2 * \overline{\alpha_p}) * \alpha_p$, et comme $\gamma_i \simeq_{rel\ \partial} (\gamma_i * \overline{\alpha_p}) * \alpha_p$, on a $\gamma_1 \simeq_{rel\ \partial} \gamma_2$, cqfd.

Donc Φ est bijective, et son inverse est $\Psi([c], p) = [c * \alpha_p]$. Comme les applications $\gamma \mapsto \gamma * \overline{\alpha_{\gamma(1)}}$ et $(c, p) \mapsto c * \alpha_p$ sont continue, Φ et Φ sont continues, donc Φ est un homéomorphisme.

(ii) Par compacité, on peut recouvrir $[0,1]$ par un nombre fini d'intervalles I_i ouverts tels que $\gamma(I_i) \cap [0,1]$ est contenu dans le domaine d'une carte (U_i, φ_i). Puis on peut trouver une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ telle que chaque $[t_{j-1}, t_j]$ est contenu dans un I_{i_j}, donc $\gamma_0([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{i_j}$. Notons $U_{i,j} = V_j$, $\varphi_{i_j} = \psi_j$. L'ensemble

$$\mathcal{V} = \{\gamma \in \mathcal{C}(X, p_0) \mid \forall j = 1, \cdots, k) \ \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset V_j\}$$

est ouvert, donc sa projection $\widetilde{V} \subset \widetilde{X}_0$ est ouverte. Si $[\gamma] \in \widetilde{V} \cap \pi^{-1}(\{p_1\})$, l'application

$$H(t,u) = \psi_j^{-1}\big((1-u)\psi_j(\gamma(t)) + u\psi_j(\gamma_0(t))\big) \text{ si } t \in [t_{j-1}, t_j],$$

est une homotopie à extrémités fixes de γ à γ_0, donc $\widetilde{V} \cap \pi^{-1}(\{p\}) = \{[\gamma_0]\}$, ce qui prouve que $[\gamma_0]$ est isolé dans sa $\pi^{-1}(\{p_1\})$. Comme γ_0 est un point quelconque de $\pi^{-1}(\{p_1\})$, ceci prouve que cette fibre est discrète.

Proposition 2 (propriété de relèvement à paramètres). *Soient P un espace topologique séparé (espace de paramètres), $f : [0,1] \times P \to X$ et $F : P \to \widetilde{X}$ des applications continues telles que $\pi \circ F(p) = f(0,p)$. Alors il existe une unique application continue $\widetilde{f} : [0,1] \times P \to \widetilde{X}$ telle que $\pi \circ \widetilde{f} = f$ et $\widetilde{f}(0,p) = F(p)$.*

Démonstration. Prouvons l'unicité : si $\widetilde{f}$ et $\widetilde{f_1}$ sont solutions, l'ensemble $\{t,p) \in [0,1] \times P \mid \widetilde{f}(t,p) = \widetilde{f_1}(t,p)\}$ est fermé puisque $[0,1] \times P$ est séparé, ouvert puisque $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme local, et contient $\{0\} \times P$ donc rencontre toute composante connexe de $[0,1] \times P$: donc il vaut $[0,1] \times P$.

Prouvons l'existence. Pour tout $p \in P$ il existe $\gamma_p \in \mathcal{C}(X, p_0)$, chemin de x_0 à $\pi(F(p)) = f(0,p)$, tel que $F(p) = [\gamma_p]$. Posons $f_{t,p}(u) = f(tu, p)$ chemin de $f(0,p)$ à $f(t,p)$, puis

$$\widetilde{f}(t,p) = [\gamma_p * f_{t,p}].$$

Ceci ne dépend pas du choix de γ_p car si $\gamma_p \simeq_{rel\ \partial} \gamma'_p$, alors $\gamma_p * f_{t,p} \simeq_{rel\ \partial} \gamma'_p * f_{t,p}$. On a $\pi \circ \widetilde{f}(t,p) = f(t,p)$ et $\widetilde{f}(0,p) = [\gamma_p] = F(p)$. Reste à montrer que $\widetilde{f}$ est continue : ceci vient de ce que, au voisinage d'un point $p\_0 \in P$, on peut trouvert γ_p continû en p par propriété d'homéomorphisme local.

Remarque. En fait la propriété de relèvement est vraie pour tout revêtement (pas forcément de surfaces de Riemann), mais la preuve est un peu plus pénible (cf. [Go]). Nous admettrons ce résultat.

Fin de la preuve. Montrons que $\widetilde{X}$ est simplement connexe. Soit $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \widetilde{X}$ un lacet en un point $\widetilde{p} \in \widetilde{X}$, c'est-à-dire $\widetilde{\gamma}$ est continu et $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{p}$. Sa projection $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma} : [0,1] \to X$ est un lacet en $p = \widetilde{p}$. Posons $H(t,u) = \pi(t(1-u))$, de sorte que $H(0,u) = \gamma$ et appliquons la propriété de relèvement à $P = [0,1]$, $f = H$, $F = \widetilde{\gamma}$: il existe $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1]$ continue telle que $\pi \circ \widetilde{H}(t,u) = H(t,u)$ et $\widetilde{H}(0,u) = \widetilde{p}$. Alors $\widetilde{H}(t,0)$, $\widetilde{H}(t,1)$ et $\widetilde{H}(1,u)$ sont à valeurs dans $\pi^{-1}(\{p\})$ donc constants égaux à $\widetilde{p}$. Donc $\widetilde{H}$ est une homotopie à extrémités fixées de $\widetilde{\gamma}$ à un lacet constant.

Reste à prouver l'unicité. Soit $\pi : \widetilde{X}_1 \to X$ un autre revêtement simplement connexe. Soit $\widetilde{p}_1$ un point de l'image réciproque de $\pi_1^{-1}(\{x_0\})$. Par la propriété de relèvement [admise dans le cas de $\widetilde{X}_1$], il existe des applications continues $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$ et $\varphi_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}$ telles que $\pi_1 \circ \varphi = \pi_1$, $\pi \circ \varphi_1 = \pi$, $\varphi(\widetilde{p}_0) = \widetilde{p}_1$ et $\varphi_1(\widetilde{p}_1) = \widetilde{p}_0$. Donc φ et φ_1 sont holomorphes. De plus, par unicité du relèvement, $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}}$ et $\varphi \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_1}$, ce qui achève la preuve.

7.3 Surface de Riemann vue comme quotient de son revêtement universel

Définition. Soit $\pi : \widehat{X} \to X$ un revêtement. Un *automorphisme* de π (ou de $\widehat{X}$ au-dessus de X) est un homéomorphisme $\varphi : \widehat{X} \to \widehat{X}$ tel que $\pi \circ \varphi = \pi$. Noter que c'est un relèvement de l'identité (on verra que tout relèvement de l'identité est un automorphisme).

On obtient ainsi un groupe, noté $\mathrm{Aut}(\pi) = \mathrm{Aut}(\widehat{X}|X)$. Si le revêtement est holomorphe, c'est un sous-groupe du groupe des automorphismes biholomorphes $\mathrm{Bihol}(\widetilde{X})$.

Proposition. *Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ le revêtement universel d'une surface de Riemann.*

(i) $\Gamma := \mathrm{Aut}(\widetilde{X}|X)$ agit de façon propre et libre sur $\widetilde{X}$, c'est-à-dire que tout point $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ a un voisinage $\widetilde{U}$ qui est disjoint de tous ses translatés $\gamma(\widetilde{U})$ pour $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Donc le quotient ${}_{\Gamma}\backslash\widetilde{X}$ a une structure naturelle de surface de Riemann.

(ii) L'application naturelle $\varphi :\ {}_{\Gamma}\backslash\widetilde{X} \to X$ est un biholomorphisme.

Donc toute surface de Riemann est le quotient d'une surface simplement connexe par un groupe de biholomorphismes agissant proprement et librement.

Démonstration. (i) Soit $x = \pi(\widetilde{x})$, et soient U un voisinage ouvert de x et $\varphi : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\{x\})$ comme dans la définition d'un revêtement. On peut supposer U connexe. Soit $\widetilde{U} = (\varphi \times \pi)^{-1}(\{x\} \times U)$, qui est un voisinage ouvert de $\widetilde{x}$ qui se projette biholomorphiquement sur U. Si $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ et $\widetilde{\gamma}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, $\pi|\widetilde{U}$ est constante égale à x et $\pi(\widetilde{\gamma}(x)) = x$, donc $\widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) = x$, donc $\widetilde{\gamma} = \mathrm{Id}$ par unicité du relèvement.

(ii) L'application φ est holomorphe et surjective, il suffit de montrer qu'elle est inejctive. Si $\varphi([\widetilde{x}]) = \varphi([\widetilde{y}])$, notons $\pi(\widetilde{x}) = x = \pi(\widetilde{y})$. Il faut montrer qu'il existe $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ tel que $\gamma(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$). On définit $\widetilde{\gamma} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ comme le relèvement de l'identité tel que $\widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$. Et de même, on définit $\widetilde{\gamma}_1 : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ comme le relèvement de l'identité tel que $\widetilde{\gamma}_1(\widetilde{y}) = \widetilde{x}$. Par unicité des relèvements, $\gamma_\circ\gamma = \mathrm{Id} = \gamma \circ \gamma_1$, donc $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}|X)$.

7.4 Groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann simplement connexes

1. Cas de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, qui agit par transformations homographiques $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}$. En effet, si f est un automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors : soit $f(\infty) = \infty$ et $f|\mathbb{C}$ induit un biholomorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $|f(z)| \leq C|z|$ pour $|z|$ assez grand (puisque ∞ n'est pas un point critique), donc $f(z) = az + b$ d'après Liouville. Soit $f(\infty) = z_0 \in \mathbb{C}$, et $g = \frac{1}{f - z_0}$ est un biholomorphisme qui fixe ∞, donc $g(z) = az + b$ soit $f(z) = z_0 + \frac{1}{az+b} = \frac{z_0az+z_0b+1}{az+b}$.

Comme toute homographie a au moins un point fixe, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ n'a pas de quotient non trivial.

2. Cas de $\mathbb{C}$. Tout biholomorphisme f de $\mathbb{C}$ est affine, $f(z)=az+b$. En effet, $g(w)=\frac{1}{f(\frac{1}{w})}$ est holomorphe sur un voisinage épointé de 0 et tend vers 0 en 0, donc est holomorphe et vaut 0 en 0. De plus, elle est injective, donc $g'(0)\neq 0$, donc $|g(w)|\geq C|w|$ près de 0 c'est-à-dire $|f(z)|\leq \frac{|z|}{C}$ pour $|z|$ assez grand, donc $f(z)=az+b$ par Liouville.

L'application $f(z)=az+b$ est sans point fixe si et seulement si $a=1$ et $b\neq 0$, donc un groupe de biholomorphismes agissant librement est un groupe de translations par les éléments d'un sous-groupe $\Lambda\subset\mathbb{C}$. Pour que l'action soit propre, il faut et il suffit que Λ soit discret, soit $\Lambda=a\mathbb{Z}$ ou $\Lambda=a\mathbb{Z}\oplus b\mathbb{Z}$ avec a,b linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ (Jacobi 1835 : une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ peut avoir au plus deux périodes indépendantes, et le rapport de celles-ci est alors non réel).

Si $\Lambda=a\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}/\Lambda$ est isomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$, et via l'exponentielle à $\mathbb{C}^*$.

Si $\Lambda=a\mathbb{Z}\oplus b\mathbb{Z}$, X est un tore. Comme on l'a dit au premier chapitre on peut supposer $a=1$, $b=\tau\in\mathbb{H}$, et τ est alors déterminé modulo l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ par homographies. Par ailleurs, $X=\mathbb{C}/\Lambda$ est alors isomorphe à une courbe elliptique $X_P=\widehat{P^{-1}(0)}\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ associée à un polynôme $P(x,y)=y^2-(x^3+px+q)$, avec $4p^3+27q^2\neq 0$.

3. Cas de Δ. Un biholomorphisme f de Δ est de la forme $h_{\theta,a}(z)=e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}z}$. En effet, $g=h_{-f(0)}\circ f$ vérifie $g(0)=0$, donc par le lemme de Schwarz on a $g(z)=e^{i\theta}z$, d'où $f=h_{\theta,-e^{-i\theta}f(0)}$. Remplaçant Δ par $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\ z>0\}$ qui lui est biholomorphe, on trouve que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ est $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agissant par homographies. Noter que dans les deux cas $X=\Delta$ et $X=\mathbb{H}$, $\mathrm{Bihol}(X)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ qui préserve X. Ceci peut aussi se montrer en appliquant le principe de réflexion de Schwarz.

Un premier exemple de quotient de Δ, ou plutôt de $\mathbb{H}$, est $\mathbb{H}/a\mathbb{Z}$, quotient par les translations $a\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}^*$. À isomorphisme près, c'est indépendant de a, et pour $a=2\pi i$ l'exponentielle donne un isomorphisme de $\mathbb{H}/2\pi\mathbb{Z}$ sur Δ^*. Nous verrons un exemple compact après avoir interprété les biholomorphismes comme des isométries.

**7.5 Métrique conforme naturelle sur une surface de Riemann*

Soit $\widetilde{X}$ une surface de Riemann simplement connexe.

1) Si $\widetilde{X}=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, elle est isomorphe à la sphère $S^2\subset\mathbb{R}^3$ par projection stéréographique, et celle-ci étant conforme on peut munir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ d'une métrique riemannienne à courbure constante 1. En coordonnées, celle-ci est $\dfrac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$ sur $\mathbb{C}$, et $\dfrac{4|dw|^2}{(1+|w|^2)^2}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dans la coordonnée $w=\frac{1}{z}$. Cette métrique n'est pas invariante par $\mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, dont elle n'est pas naturelle, c'està-dire définie par la seule structure de surface de Riemann. Mais on peut dire qu'il a une famille naturelle de métriques conformes à courbure 1, paramétrée par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SO}(3)$. Ici, $\mathrm{SO}(3)$ s'identifie à $\mathrm{PSU}(2)=\mathrm{SU}(2)/\{\text{centre}\}\subset\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\text{centre}\}$ via les quaternions.

2) Si $\widetilde{X}=\mathbb{C}$, tout biholomorphisme sans point fixe est une translation donc une isométrie de la métrique conforme plate complète $|dz|^2$. Donc tout quotient admet une métrique conforme plate complète, en fait en considérant $\lambda|dz|^2$ on voit qu'il y a une famille paramétrée par $\mathbb{R}_+^*$ de telles métriques, toutes homothétiques. Si le quotient est compact, on peut trouver une métrique naturelle en fixant l'aire totale.

3) Si $\widetilde{X}=\Delta$ ou $\mathbb{H}$, $\mathrm{Bihol}(\widetilde{X})$ est le groupe des isométries orientées $\mathrm{Isom}^+(\widetilde{X},g_{\widetilde{X}})$, où

$$g_\Delta=\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}\ ,\ g_{\mathbb{H}}=\frac{|dz|^2}{(\mathrm{Im}\ z)^2}.$$

En effet, le biholomorphisme $f:z\mapsto w=i\dfrac{1+z}{1-z}$ de Δ sur $\mathbb{H}$ vérifie

$$dw=\frac{2dz}{(1-z)^2}$$

$$\mathrm{Im}\ w=\mathrm{Re}\frac{1+z}{1-z}=\mathrm{Re}\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$$f^*g_{\mathbb{H}}=\frac{|dw|^2}{\mathrm{Im}\ w^2}=\frac{4|dz|^2}{|1-z|^4}.\frac{|1-z|^4}{(1-|z|^2)^2}=\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}=g_\Delta.$$

Donc il suffit de prouver le résultat pour $\mathbb{H}$. Si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$, on a

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{dz}{(cz+d)^2} \\
\text{Im } w &= \text{Im } \frac{az+b}{cz+d} = \text{Im } \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im } z}{|cz+d|^2} \\
f^* g_{\mathbb{H}} &= \frac{|dw|^2}{(\text{Im } w)^2} = \frac{|dz|^2}{|cz+d|^4} . \frac{|cz+d^4}{(\text{Im } z)^2} = \frac{|dz|^2}{(\text{Im } z)^2} = g_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Bihol}(\mathbb{H})$ est contenu dans $\text{Isom}(g_{\mathbb{H}})$, et il est dans $\text{Isom}^+(g_{\mathbb{H}})$ puisque tout biholomorphisme préserve l'orientation. Enfin, $\text{Bihol}(\mathbb{H})$ est transitif sur les couples (z, v) où $z \in \mathbb{H}$ et $v \in \mathbb{C}$ avec $||v||_z = \frac{2|v|}{1-|z|^2} = 1$, c'est à-dire les vecteurs unitaires tangents sur $\mathbb{H}$. En effet, en utilisant les biholomorphismes affines $az + b$, $a > 0$ (correspondant à $\left[\begin{pmatrix} a^{1/2} & a^{-1/2}b \\ 0 & a^{-1/2} \end{pmatrix} \right]$), on voit que $\text{Bihol}(\mathbb{H})$ est transitif sur $\mathbb{H}$, donc il suffit de montrer que le stabilisateur d'un point est transitif sur les vecteurs tangents unitaires en ce point. C'est évident pour le point 0, dans le modèle (Δ, g_Δ), car ce stabilisateur est formé des rotations $e^{i\theta} z$. Comme une isométrie orientée est déterminée par l'image d'un vecteur tangent unitaire, $\text{Bihol}(\mathbb{H}) = \text{Isom}^+(g_{\mathbb{H}})$.*

8 Algébricité des surfaces de Riemann compactes

Rappelons que si X est une surface de Riemann, $\mathcal{M}(X)$ est son corps des fonctions méromorphes. On le regarde comme une extension de $\mathbb{C}$ = les fonctions constantes. On a vu qu'on a toujours $\mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C} \neq \emptyset$, que X soit compacte ou non.

8.1 Fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann

Proposition. *On note z la fonction identité de $\mathbb{C}$, vue comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors*

(i) $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z)$, plus précisément l'application $R \in \mathbb{C}(T) \mapsto R(z)$ est un isomorphisme des fractions rationnelles à une variable sur $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.

(ii) Si f est non constante et $R = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont dans $\mathbb{C}[T]$ et premiers entre eux, on a $\deg(f) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Démonstration. (i) Cette application est bien définie puisque $Q(z) \neq 0$ si $Q \in \mathbb{C}[T] \setminus \{0\}$, et c'est un morphisme de corps, donc elle est injective. Il suffit de montrer qu'elle est surjective. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est non constante, soient $z_1, \cdots, z_k$ les pôles de f sur $\mathbb{C}$, d'ordres $n_1, \cdots, n_k$. Alors $g(z) = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{n_i} f(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, si $|z| \to \infty$ on a $f(z) \to C \in \mathbb{C}$ ou $f(z) \to \infty$, et dans ce dernier cas $|f(z)| = O(|z|^m$ où m est l'ordre du pôle ∞. Donc $g(z) = O(|z|^N)$, et par la généralisation du théorème de Liouville, g est un polynôme, donc $f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^k (z-z_i)^{n_i}}$ est le quotient de deux polynômes.

(ii) L'image réciproque $f^{-1}(\{\infty\})$ est formée de $P^{-1}(\{0\})$, qui donne une mulitplicité totale $\deg(P)$, et éventuellement de ∞. Si $z \to \infty$, on a $f(z) \sim C z^{\deg(P) - \deg(Q)}$, donc ∞ contribue au degré pour $\max(0, \deg(Q) - \deg(P))$. Donc $\deg(f) = \deg(P) + \max(0, \deg(Q) - \deg(P)) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

8.2 Fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte quelconque

Définition. Un *corps de fonctions d'une variable sur* $\mathbb{C}$ est une extension L du corps $\mathbb{C}$ de la forme $L = \mathbb{C}(a, b)$ avec $a \notin \mathbb{C}$, donc transcendant sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, et b algébrique sur $\mathbb{C}(a)$. Donc b vérifie une équation minimale $b^n + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(a) b^j = 0$ où les r_j sont des fonctions rationnelles. Mulitpliant par le pgcd des dénominateurs, on trouve $P(a, b) = 0$ où P est un polynôme dans $\mathbb{C}[x, y]$, nécessairement irréductible. De plus, P divise tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que $Q(a, b) = 0$.

Remarques. *1) En fait, un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{C}$ finiment engendrée et de degré de transcendance un, c'est-à-dire une extension algébrique finie de $\mathbb{C}(x)$. Par théorème de l'élément primitif, on trouve la caractérisation prise ici comme définition.*

2) On peut remplacer «finie» par «telle que tout élément $y \in L$ a un degré borné sur $\mathbb{C}(x)$». Rappelons l'argument : si y est un élément de degré maximal, tout $z \in L$ vérifie $\deg_{\mathbb{C}(x)}(z) = \deg_{\mathbb{C}(x)(y)}(z) \deg_{\mathbb{C}}(y)$, donc $\deg_{\mathbb{C}(x,y)}(z) = 1$, soit $z \in \mathbb{C}(x)(y) = \mathbb{C}(x, y)$.

Proposition. *Si X est une surface de Riemann compacte, $\mathcal{M}(X)$ est un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$. Autrement dit il existe deux fonctions méromorphes non constantes f, g et un polynôme irréductible $P \in \mathbb{C}[x, y]$, tels que $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ et P engendre l'idéal $\{Q \in \mathbb{C}[x, y] \mid Q(f, g) = 0\}$.*

Démonstration. Nous savons déjà que $\mathcal{M}(X)$ n'est pas réduit à $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}$, c'est une application holomorphe $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ d'un certain degré n. Il suffit de montrer que tout élément $g \in \mathcal{M}(X)$ vérifie $\deg_{\mathbb{C}(f)} g \leq n$. Bien sûr, on peut supposer que g n'est pas constante.

Soient $F_1 \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'ensemble des valeurs critiques de f, $F_2 = f(g^{-1}(\{\infty\}))$ et $F = F_1 \cup F_2$ qui est fini, ainsi que $f^{-1}(F)$. Si $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus F$, $f^{-1}(\{z\})$ se compose de $n = \deg(f)$ points distincts $w_1(z), \cdots, w_n(z)$, les w_i étant définies localement et holomorphes. Il en est de même des fonctions $g \circ w_i$, qui sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc les fonctions symétriques $s_j(z) = \sigma_j(g \circ w_1(z), \cdots, g \circ w_n(z))$, $1 \leq j \leq n$ sont bien définies sur $X \setminus f^{-1}(F)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et holomorphes.

Soit $z_0 \in F$ ayant une carte holomorphe centrée ζ $(= z - z_0$ ou $\dfrac{1}{z})$. On a $f^{-1}(\{z_0\}) = \{p_1, \cdots, p_m\}$ avec $m \leq n$. Soient $\eta_1, \cdots, \eta_m$ des cartes holomorphes centrées en ces points. Il existe des entiers $d_k \in \mathbb{N}^*$, $n_k \in \mathbb{Z}$ tels qu'au voisinage de p_k, on a $\zeta \circ f \sim \eta_k^{d_k}$ et $g \sim \eta^{n_k}$, où $\sim$ veut dire que le quotient a une limite non nulle.

Donc $|\eta_k \circ w_j| \sim |\zeta|^{\frac{1}{d_k}}$ si w_j est à valeurs dans le domaine de η_k, d'où $|g \circ w_j| = O(|\zeta|^{\frac{n_k}{d_k}})$. On en déduit $|s_j| = O(|\zeta|^{-n \max_k \frac{d_k}{m_k}})$, donc les s_j sont méromorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire sont des fractions rationnelles

$s_j = R_j(z)$. Par construction, on a

$$g^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (s_j \circ f) g^j = g^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j R_j(f) g^j = 0 \text{ sur } X \setminus f^{-1}(F).$$

Comme $f^{-1}(F)$ est fini, ceci veut dire $g^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j R_j(f) g^j = 0$ dans $\mathcal{M}(X)$, donc g est algébrique de degré au plus n sur $\mathbb{C}(f)$, cqfd.

Notation et définition. On note $Y_P = P^{-1}(\{0\})$, appelé *modèle algébrique* de X. Nous allons préciser en quel sens une surface de Riemann compacte est équivalente à ce modèle.

**Remarque.* On a montré $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(f)$ pour tout $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Avec un peu plus de travail, on montrerait qu'on a en fait égalité.*

8.3 Équivalence entre surfaces de Riemann compactes, corps de fonctions d'une variable et courbes algébriques irréductibles

Définitions. Une *courbe algébrique plane irréductible* est X_P = l'adhérence dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de $Y_P = P^{-1}(\{0\})$, où P est un polynôme irréductible (on verra que les données de X_P, Y_P et (P modulo un facteur constant) sont équivalentes). Deux telles courbes X_P, X_Q sont *birationnellement équivalentes* s'il existe des fractions rationnelles $R_1, R_2, S_1, S_2 \in \mathbb{C}(x, y)$ et des ensembles finis $F_1 \subset Y_P$, $F_2 \subset Y_Q$, tels que tels que (R_1, R_2) est une bijection de $Y_P \setminus F_1$ sur $Y_Q \setminus F_2$, d'inverse (S_1, S_2). *(Voir le cours de Géométrie algébrique)*

Théorème. *On a des bijections naturelles qui forment un diagramme commutatif*

$$\{\text{surfaces de Riemann compactes}\}/_{\text{biholom.}} \xrightarrow{\varphi_1} \{\text{corps de fonctions d'une variable sur } \mathbb{C}\}/_{\text{isom.}}$$

$$\varphi_3 \nwarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \varphi_2$$

$$\text{courbes algébriques planes irréductibles}/_{\text{isom.birationnel}}$$

De plus :

1) On a $\varphi_1([X]) = [\mathcal{M}(X]$, et l'on a fonctorialité *avant de passer aux classes d'isomorphisme, au sens suivant. Si φ est une application holomorphe non constante de X dans Y (notation $\varphi \in \mathrm{Hol}_{nc}(X, Y)$) et si l'on pose $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ pour $f \in \mathcal{M}(X)$, l'application $\varphi \mapsto \varphi^*$ est une bijection de $\mathrm{Hol}_{nc}(X, Y)$ sur $\mathrm{Mor}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X))$, l'ensemble des morphismes de corps $\mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ qui prolongent $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. On a alors*

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* \ , \ (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}.$$

2) Si $\mathcal{M}$ est un corps de fonctions d'une variables sur $\mathbb{C}$, $\varphi([\mathcal{M}]) = [X_P]$, où $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme irréductible tel qu'il existe $f, g \in \mathcal{M}$ avec $\mathcal{M} = \mathbb{C}(f, g)$ et $P(f, g) = 0$.

3) Si P est un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[x, y]$, il existe un ensemble fini $\mathrm{Sing}(P) = \mathrm{Sing}(X_P)$ tel que $\mathrm{Rég}(X_P) = X_P \setminus \mathrm{Sing}(X_P)$ est une surface de Riemann, et il existe une surface de Riemann compacte $\widehat{X}_P$ et une application holomorphe $\pi : \widehat{X}_P$ to $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, d'image X_P, telles que $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X_P))$ est fini et π est un biholomorphisme de $\widehat{X}_P \setminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X_P))$ sur $\mathrm{Rég}(X_P)$. De plus $(\widehat{X}_P, \pi)$ est unique à isomorphisme près. Alors $\varphi_3([X_P]) = [\widehat{X}_P]$.

Ce que nous allons prouver. Nous avons vu que la flèche φ_1 était bien définie. Nous ne dirons rien de φ_2, renvoyant au cours de Géométrie Algébrique. Pour φ_3, nous allons définir et étudier la notion de courbe algébrique plane, et définir le couple $(\widehat{X}_P, \pi)$ de l'énoncé 3).

9 Surfaces de Riemann compactes et courbes algébriques projectives

9.1 Fonctions holomorphes de plusieurs variables

Proposition (admise, cf. [C] [Gr-Ha]). Soit $f : U \to \mathbb{C}^m$ une application définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est continue et toute fonction partielle $f(z_1, \cdots, z_{i-1}, ., z_{i+1}, \cdots, z_n)$ est holomorphe.
- f est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point : pour tout $z^0 \in U$, il existe $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}$-linéaire, telle que $f(z) = f(z^0) + u(z - z^0) + o(||z - z^0||)$
- f est différentiable et $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$
- f est C^∞ et $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$
- f est est *analytique* (complexe) : tout point $z^0 = (z_1^0, \cdots, z_n^0)$ a un voisinage sur lequel f est la somme d'une série normalement convergente

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\cdots,i_n}(z_1 - z_1^0)^{i_1} \cdots (z_n - z_n^0)^{i_n} = \sum_{I\in\mathbb{N}^n} a_I(z - z^0)^i.$$

Si U et V sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$, un biholomorphisme est une application holomorphe inversible dont l'inverse est holomorphe (comme dans le cas d'une variable on peut montrer que cette holomorphie est automatique).

Exemple. Toute fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(z_1, \cdots, z_n)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus Q^{-1}(\{0\})$.

Théorème des fonctions implicites et d'inversion locale, cas holomorphe

(i) (Fonctions implicites holomorphes) Soit $f : U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ holomorphe telle que $f(x^0, y^0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Il existe des voisinages ouverts U_1 de x^0 et U_2 de y^0 et une application holomorphe $g : U_1 \to U_2$ tels que $\{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid f(x, y) = 0\} = \mathrm{graphe}(g)$.

(ii) (Inversion locale holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorphe, telle que $Df(x^0) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Il existe des voisinages ouverts U_1 de x^0 et U_2 de $f(x^0)$ tels que f est un biholomorphisme de U_1 sur U_2.

Démonstration. On peut le faire de trois façons différentes.

1) On développe le calcul différentiel sur $\mathbb{C}$ [ou sur un corps valué complet], en remplaçant partout $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

2) On utilise les théorèmes réels, et on note que dans le cas (i), $Dg(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} . \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x))$ et dans le cas (ii), $D(f^{-1})(x) = Df(f^{-1}(x))^{-1}$: ces applications sont $\mathbb{C}$-linéaires, donc g et f sont holomorphes.

*3) On travaille dans le cadre analytique (historiquement la première preuve, Newton 1676). Cela marche aussi sur tout corps valué complet. Donnons un exemple. Si $f(x, y) = y - x^2 - 2xy + y^2 - x^4$ sur $\mathbb{C}^2$ et $(x^0, y^0) = (0, 0)$, on trouve le développement en série de $y = f(x)$ en remplaçant successivement y par ses valeurs modulo $O(x^n)$ [on peut aussi faire des identifications de coefficients] :

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2xy - y^2 + x^4 = x^2 + O(x^3) \\ &= x^2 + 2x(x^2 + O(x^3)) - (x^2 + O(3))^2 + x^4 = x^2 + 2x^3 + O(x^4) \\ &= x^2 + 2x(x^2 + 2x^3 + O(x^4)) - (x^2 + O(x^3))^2 + x^4 = x^2 + 2x^3 + 4x^4 + O(x^5) \\ &= x^2 + 2x(x^2 + 2x^3 + 4x^4 + O(x^5))) - (x^2 + 2x^3 + O(x^4))^2 + x^4 \\ &= x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 + O(x^6)... \end{aligned}$$

Exercice : minorer le rayon de convergence de la série obtenue.

On peut trouver une preuve générale dans [Se2] p.73-74 (en fait deux, une par la méthode des majorantes de Cauchy, une autre plus simple dans le cas ultramétrique).

9.2 Variétés et sous-variétés complexes

Définition. Une *variété complexe de dimension n* est un espace topologique X séparé (pas forcément connexe) et muni d'un atlas holomorphe de dimension n, c'est-à-dire un recouvrement ouvert (U_i) et d'homéomorphismes $\varphi_i : U_i \to V_i$ où U_i est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et tout changement de cartes $\psi_{i,j} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$

est un biholomorphisme de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. En fait il s'agit comme d'habitude d'une classe d'équivalence de tels atlas, ou d'un atlas maximal. En dimension $n \geq 2$, on demande aussi que X soit séparable, ou ce qui revient au même : X est métrisable, X admet une métrique riemannienne, toute composante connexe de X est réunion dénombrable de compacts, X est paracompacte. En dimension un, on a vu que c'était automatique.

**Remarque.* Si $n \geq 2$, la séparabilité de X n'est pas automatique. Par exemple (cf. [Hu], p.9), on peut définir un espace séparé connexe avec un atlas holomorphe de dimension deux, qui contient un sous-ensemble discret ayant la puissance du continu.*

Définition. Soit X une variété complexe de dimension n. Une sous-variété complexe de dimension k de X est un sous-ensemble $Y \subset X$ tel que tout point $p_0 \in Y$ admet un voisinage ouvert et un biholomorphisme $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}^n$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(Y \cap U) = \mathbb{C}^p \cap V$.

Une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites holomorphe est la

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre variétés complexes de dimensions n et m, et soit $a \in f(X)$ une valeur régulière, c'est-à-dire telle que $Df(p)$ est surjective pour tout $p \in f^{-1}(\{a\})$. Alors $f^{-1}(\{a\})$ est une sous-variété complexe de dimension $n - m$.*

9.3 Espaces projectifs complexes, cas du plan

Définition. L'*espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^*$ agit par homothéties. La classe d'équivalence de $(z_0, \cdots, z_n)$ est notée $[z_0 : \cdots : z_n]$. Ce quotient est homéomorphe à S^{2n+1}/S^1 ce qui montre qu'il est séparé (puisque S^1 est compact) et compact (puisque S^{2n+1} est compacte). De plus, si $i \in \{0, 1 \cdots, n\}$, $U_i := \{|z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i \neq 0\}$ est un ouvert, et l'application $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ telle que

$$\varphi_i(|z_0 : \cdots : z_n]) = \Big(\frac{z_0}{z_i}, .., \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, .., \frac{z_n}{z_i}\Big),$$

est un homéomorphisme sur $\mathbb{C}^n$. Le changement de cartes $\psi_{i,j} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est donné par

$$\psi_{i,j}(t_1, \cdots, t_n) = \Big(\frac{t_1}{t_j}, \cdots, \frac{t_{i-1}}{t_j}, \frac{1}{t_j}, \frac{t_{i+1}}{t_i}, \cdots, \frac{t_n}{t_j}\Big).$$

Il est défini sur l'ouvert $U_{i,j} = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{C}^n \mid t_j \neq 0\}$, holomorphe puisque rationnel, et bijectif sur $U_{j,i}$, d'inverse $\psi_{j,i}$, donc biholomorphe. Donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est muni d'une structure de variété complexe compacte de dimension n. Comme elle est compcte, elle est automatiquement séparable.

Outre le cas $n = 1$ (droite projective) que nous avons déjà vu, nous considérerons surtout le *plan projectif complexe* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il est muni des trois cartes

$$\varphi_0([z_0 : z_1 : z_2]) = \Big(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\Big) = (x, y) \ , \ \varphi_1([z_0 : z_1 : z_2]) = \Big(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\Big) = (t, u)$$
$$\varphi_2([z_0 : z_1 : z_2]) = \Big(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\Big) = (v, w).$$

Le complémentaire de U_0 est la droite à l'infini, $\mathbb{P}^1_\infty(\mathbb{C}) = \{[0 : z_1 : z_2] \mid [z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$. Les changements de cartes sont

$$(t, u) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x}) \ , \ (x, y) = (\frac{1}{t}, \frac{u}{t}) \ , \ (v, w) = (\frac{1}{y}, \frac{x}{y}) \ , \ (x, y) = (\frac{w}{v}, \frac{1}{v})$$
$$(v, w) = (\frac{t}{u}, \frac{1}{u}) \ , \ (t, u) = (\frac{v}{w}, \frac{1}{w}).$$

9.4 Courbes affines planes

Définitions. Soit $P \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme non constant. On note $Y_P = P^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{C}^2$, appelé *courbe affine plane.* On note $\mathrm{Sing}(P) = \{(x, y) \in Y_P \mid DP(x, y) = 0\}$, *ensemble singulier* de P.

Proposition.

(i) L'ensemble Y_P est infini, plus précisément une des deux projections sur $\mathbb{C} \times \{0\}$ et sur $\{0\} \times \mathbb{C}$ évite au plus un nombre fini de points.

(ii) (Bézout, version faible) Si $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ sont deux polynômes premiers entre eux, $Y_P \cap Y_Q$ est fini.

(iii) Si P est sans facteur multiple, la courbe Y_P détermine P à un facteur constant près. Donc $\mathrm{Sing}(P)$ *ne dépend que de Y_P, on le note* $\mathrm{Sing}(Y_P)$*, ensemble singulier de Y_P.*

(iv) Si P est sans facteur multiple, $\mathrm{Sing}(Y_P)$ *est fini.*

(v) L'ensemble régulier $\mathrm{Rég}(Y_P) = Y_P \setminus \mathrm{Sing}(P)$ *est une courbe complexe lisse, dense dans Y_P.*

(vi) Si P est irréductible, $\mathrm{Rég}(Y_P)$ *est connexe, donc est une surface de Riemann.*

Démonstration. (i) Écrivons $P(x,y) = a_n(x)y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^i$ où les a_i sont des polynômes en x et $a_n \neq 0$. Si $n \neq 0$, $a_n(x)$ ne s'annule que pour un ensemble fini F de valeurs de x. Si $x \notin F$, il existe $y \in \mathbb{C}$ tel que $P(x,y) = 0$ puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc $\mathrm{pr}_1(Y_P) \supset \mathbb{C} \setminus \{P\}$. Et si $n = 0$, $P = a_0(x)$, polynôme non constant donc qui a un zéro, donc $\mathrm{pr}_2(Y_P) = \mathbb{C}$.

(ii) Puisque P et Q sont premiers entre eux, les résultants $R_1(x)$ et $R_2(y)$ comme polynômes dans $\mathbb{C}[x][y]$ et dans $\mathbb{C}[y][x]$ sont non nuls, et de degrés $\leq mn$. Donc $P^{-1}(\{(0,0)\}) \cap Q^{-1}(\{(0,0)\}$ est fini, avec au plus $(mn)^2$ éléments.

**Remarque.* La majoration $(mn)^2$ peut être améliorée en mn de la façon suivante. Puisque $F = P^{-1}(\{0\}) \cap Q^{-1}(\{0\})$ est fini, l'application linéaire $x + \varepsilon y$ restreinte à F est injective pour $\varepsilon > 0$ assez petit : il suffit de prendre $\varepsilon < \min \left|\frac{x-x'}{y-y'}\right|$, où le minimum est pris sur les couples $(x,y), (x',y')$ de points distincts de F. Remplaçant $P(x,y)$ par $P_\varepsilon(x,y) = P(x+\varepsilon y, y)$ et $Q(x,y)$ par $Q_\varepsilon(x,y) = Q(x+\varepsilon y, y)$ ce qui ne change pas le nombre de zéros communs, on voit que $P_\varepsilon^{-1}(\{0\}) \cap P_\varepsilon^{-1}(\{0\})$ s'injecte dans $R_{1,\varepsilon}^{-1}(\{0\})$ qui a au plus mn éléments.*

(iii) Supposons $P = P_1 \cdots P_r$, $Q = Q_1 \cdots Q_s$ où les P_i sont irréductibles non associés et de même pour les P_j. Si $Y_P = Y_Q$, chaque Y_{Q_j} rencontre un des Y_{P_i} en un ensemble infini, donc Q_j et P_i sont associés. Donc Q divise P, et de même P divise Q, cqfd.

Bien sûr, c'est aussi une conséquence du lemme des zéros de Hilbert, cf. le cours de Géométrie algébrique.

(iv) Si P et $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ sont premiers entre eux, $\mathrm{Sing}(Y_P) \subset Y_P \cap Y_{\frac{\partial P}{\partial x}}$ est fini. De même si P et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ sont premiers entre eux. Reste le cas où P a un facteur irréductible Q qui divise aussi DP. Écrivons $P = Q^n R$ avec R premier avec Q, alors Q divise $Q^{n-1}RDQ$. Donc si $n = 1$, Q divise DQ, et comme $\deg(DQ) \leq \deg(Q) - 1$ et Q est irréductible, $DQ = 0$ soit Q constant, contradiction. Donc $n \geq 2$, c'est-à-dire que P a un facteur multiple.

(v) Puisque $\mathrm{Rég}(Y_P) = P^{-1}(\{0\}) \cap DP^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est défini par une équation holomorphe régulière, et qu'il est non vide puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, c'est une courbe complexe lisse.

Montrons la densité de $\mathrm{Rég}(Y_P)$ dans Y_P. Quitte à faire un changement de variables affine on peut supposer $P(x,y) = y^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^j = P_x(y)$. On a $Y_P = \bigcup_{x \in \mathbb{C}} \{x\} \times P_x^{-1}(\{0\})$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{Sing}(Y_P)$. La continuité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients dit que

• pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $P_x^{-1}(\{0\})$ est contenu dans le ε-voisinage de $P_{x_0}^{-1}(\{0\})$ si $|x - x_0| < \delta$: ceci par propreté de la projection $P^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C} \times \{0\}$

• pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\delta \in]0, \varepsilon[$ tel que pour tout $x \in \Delta(x_0, \delta)$, $P_x^{-1}(\{0\}) \cap \Delta(y_0, \varepsilon) \neq \emptyset$: en effet, $P_{x_0}|\partial\Delta(y_0,\varepsilon)$ a un indice autour de 0 égal à l'ordre du zéro y_0 de P_{x_0}, donc $P_x|\partial\Delta(y_0,\varepsilon)$ a le même indice si $x - x_0| < \delta$, donc $P_x(\Delta(y_0,\varepsilon))$ contient 0.

Comme $\mathrm{Sing}(Y_P)$ est fini, pour $\delta > 0$ assez petit $\mathrm{Sing}(Y_P) \cap (\Delta(x_0,\delta) \setminus \{x\}) = \emptyset$, donc $\Delta(x_0,\varepsilon) \times \Delta(y_0,\varepsilon)$ rencontre $\mathrm{Rég}(Y_P)$, cqfd.

(vi) Nous prouvons la connexité de $\mathrm{Rég}(Y_P)$ dans la section suivante.

9.5 Preuve de la connexité de $\mathrm{Rég}(Y_P)$

À un changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que le terme homogène de degré maximal $n = \deg(P)$ contient y^n, donc que $P(x,y) = y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^i$, avec de plus $\deg a_i \leq n - i$. En effet, ce terme homogène est de la forme $c\prod_{i=1}^m (y-\alpha_i x)x^{n-m}$, il suffit de poser $x = x' + \varepsilon y'$, $y = y'$ avec $\varepsilon \neq 0$, $1 - \alpha_i\varepsilon \neq 0$.

Lemme. *Il existe $K > 0$ telle que $|y| \leq K \max(|x|, 1)$ sur Y_P.*

Preuve du lemme. En effet, si $P(x, y) = 0$, on a soit $|y| \leq \max(|x|+1)$, soit $|y| > \max(|x|, 1)$. Dans ce dernier cas, on a

$$|a_i(x)| \leq C_i \max(|x|^{n-i}, 1) \leq C_i |y|^{n-i+1}. \max(|x|, 1),$$

d'où

$$|y| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i(x) y^{i-n+1}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} C_i \max(|x|, 1),$$

donc dans tous les cas on a $|y| \leq \max(1, \sum C_i). \max(|x|, 1)$.

Notons $R = \text{Rég}(Y_P)$. Considérons la projection $\pi = x : R \to \mathbb{C}$. Ses points critiques sont ceux où la tangente est verticale soit $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$. Par la version faible de Bézout, il forment un ensemble fini F, et $\pi^{-1}(\pi(F))$ est aussi fini. Par le même argument qu'en (iv), $R \setminus \pi^{-1}(\pi(F))$ est dense dans R, donc il suffit de montrer que $R \setminus \pi^{-1}(\pi(F))$ est connexe.

Soit C une composante de $R \setminus \pi^{-1}(\pi(F))$. On considère la restriction $\pi_C : C \to \mathbb{C} \setminus F$. C'est une application holomorphe sans point critique, et la propriété $|y| \leq K(|x| + 1)$ montre qu'elle est propre, c'est donc un revêtement à d feuillets, avec $d \leq n$. Donc $\pi_C^{-1}(\{x\})$ a toujours d éléments si $x \in \mathbb{C} \setminus F$, et si $\sigma_i(x)$ est leur i-ième fonction symétrique, c'est une fonction holomorphe de x. De plus, $|\sigma_i(x)| \leq C_i(|x|^d + 1)^i$, donc par la généralisation du théorème de Liouville les $\sigma_i(x)$ sont des polynômes en x. Donc la fonction

$$f(x, y) = \prod_{z \in p^{-1}(\{x\})} (y - z) = y^d + \sum_{i=1}^{d} (-1)^i \sigma_i(p^{-1}(\{x\})).y^{d-i}$$

est un polynôme $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Enfin, $f^{-1}(\{0\}) \cap P^{-1}(\{0\})$ contient C donc est infini, donc P divise f puisque P est irréductible, d'où $d = n$ et $f = aP$. Donc $C \subset R \subset P^{-1}(\{0\}) = \overline{C}$, donc R est bien connexe.

Remarque. La preuve de la connexité de $\text{Rég}(Y_P)$ est presque la même que celle du *théorème de Chow* : tout ensemble analytique fermé $F \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est algébrique. On se ramène à montrer que tout ensemble analytique fermé $F \subset \mathbb{C}^2$ tel que $|y| \leq K(|x| + 1)$ sur F est algébrique.

9.6 Courbes projectives planes : partie régulière, singularités

Définition. Une *courbe projective plane projective* est

$$X_{\widetilde{P}} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \widetilde{P}(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

oì $\widetilde{P} \in \mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]$ est un polynôme homogène non constant, sans facteur multiple.

La propriété suivante se démontre comme dans le cas affine, en considérant les trois courbes affines associées dans les trois cartes canoniques.

Propriété. *Le polynôme $\widetilde{P}$ est déterminé à un facteur constant près par la courbe $X_{\widetilde{P}}$. Noter que puisque $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est compact, $X_{\widetilde{P}}$ est compacte.*

On peut donc définir $\deg(X_{\widetilde{P}} = \deg(P)$.

Courbes affines associées dans les trois cartes canoniques. Rappelons que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est équipé des trois cartes canoniques

$$\varphi_0([z_0 : z_1 : z_2]) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = (x, y) = (\frac{1}{t}, \frac{u}{t}) = (\frac{w}{v}, \frac{1}{v})$$
$$\varphi_1([z_0 : z_1 : z_2]) = \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right) = (t, u) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$$
$$\varphi_2([z_0 : z_1 : z_2]) = \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) = (v, w) = (\frac{1}{y}, \frac{x}{y}).$$

Le polynôme $\widetilde{P}$ donne trois polynômes non homogènes :

$$P_0(x,y) = P(x,y) = \widetilde{P}(1,x,y)\ ,\ P_1(t,u) = \widetilde{P}(t,1,u)\ ,\ P_2(v,w) = \widetilde{P}(v,w,1),$$

ce qui donne (en identifiant $\varphi_0 = \mathrm{Id}$)

$$X_{\widetilde{P}} = Y_P \cup \varphi_1^{-1}(Y_{P_1}) \cup \varphi_2^{-1}(Y_{P_2}).$$

Si $\widetilde{P}$ n'est pas divisible par x_0, P est de degré d et détermine $\widetilde{P}$ par l'opération d'homogénéisation

$$\widetilde{P}(x_0,x_1,x_2) = x_0^d P(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}).$$

On note alors $X_{\widetilde{P}} = X_P$. Les polynômes P_1 et P_2 sont alors donnés par

$$P_1(t,u) = t^d P(\frac{1}{t}, \frac{u}{t})\ ,\ P_2(v,w) = v^d P(\frac{w}{v}, \frac{1}{v}).$$

De même, si $\widetilde{P}$ n'est pas divisible par x_i ($i = 1$ ou 2), P_i détermine $\widetilde{P}$.

De plus, si $\widetilde{P}$ n'est pas divisible par x_0, $X_{\widetilde{P}} \setminus X_P = X_P \cap \mathbb{P}^1_\infty$ est fini (par application de la version faible de Bézout dans U_1 et U_2), et comme Y_{P_1} et Y_{P_2} n'ont aucun point isolé, on a la

Propriété. *Si $\widetilde{P}$ n'est pas divisible par x_0, $X_{\widetilde{P}}$ est l'adhérence de $Y_P = P^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{C}^2$.*

Points à l'infini. On suppose $\widetilde{P}$ non divisible par x_0, donc $X_{\widetilde{P}} = X_P$. Les points de X_P sont

$$X_P \cap \mathbb{P}^1_\infty = \{(0,u) \mid P_1(0,u) = 0 \cup \{(v,0) \mid P_2(v,w) = 0\}.$$

Ils correspondent aux directions asymptotiques de X_P, ceux dans U_1 étant celles qui sont non verticales et ceux dans U_2 celles qui sont non horizontales.

Points singuliers et points réguliers. On définit

$$\mathrm{Sing}(X_{\widetilde{P}}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \widetilde{P}(x_0,x_1,x_2) = 0 \text{ et } \widetilde{P}(x_0,x_1,x_2) = 0\}.$$

Les points réguliers sont $\mathrm{Rég}(X_{\widetilde{P}}) = X_{\widetilde{P}}) \setminus \mathrm{Sing}(X_{\widetilde{P}})$.

Propriétés. *(i) Les points singuliers de $X_{\widetilde{P}}$ sont la réunion des points singuliers dans les trois cartes :*

$$\mathrm{Sing}(X_{\widetilde{P}} = \mathrm{Sing}(Y_P) \cup \varphi_1^{-1}(\mathrm{Sing}(Y_{P_1})) \cup \varphi_1^{-1}(\mathrm{Sing}(Y_{P_2})).$$

(ii) L'ensemble Rég($X_{\widetilde{P}}$) est une courbe lisse connexe, donc une surface de Riemann. Démonstration. (i) Cela résulte de la formule d'Euler exprimant l'homogénéité de $\widetilde{P}$:

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_2} = d\widetilde{P}(z_0,z_1,z_2).$$

Donc si $p = [x_0 : x_1 : x_2] \in X_{\widetilde{P}} \cap U_i$, p est singulier si et seulement si $\dfrac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_j} = 0$ pour $j \neq i$, ce qui équivaut au fait que $\varphi_i(p)$ est singulier sur Y_{P_i}.

(ii) Cet ensemble est une courbe lisse puisque c'est vrai dans les trois cartes. Son intersection avec ces cartes est connexe ou vide (si $\widetilde{P} = \lambda x_i$), et si $X_{\widetilde{P}}$ rencontre deux cartes U_i et U_j (soit $\widetilde{P} \neq \lambda x_i i, \lambda x_j$), Rég$X_{\widetilde{P}} \cap U_i \cap U_j$ est non vide puisque les $X_{\widetilde{P}} \cap U_i$ sont infinis et $\mathrm{Sing}(X_{\widetilde{P}})$ est fini. Donc $\mathrm{Rég}(X_{\widetilde{P}})$ est connexe, donc c'est une surface de Riemann.

9.7 Étude d'une courbe projective plane près d'un point singulier

Soit $X_{\widetilde{P}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe projective, et soit $p_0 \in \mathrm{Sing}(X_P)$ un point singulier. L'étude de la courbe dans un voisinage de p_0 est un monde en soi (cf. par exemple [Mi3], chap. 10, [Ko]), nous nous contenterons ici de montrer les deux propriétés suivantes :

Proposition. *(i) Il existe un voisinage U de $X_{\widetilde{P}}$, contenu dans Rég$(\widetilde{X}_P) \cup \{p_0\})$, qui est la réunion d'un nombre fini de composantes, appelées* branches, *$B_1, \cdots, B_k$, telles que*

- *chaque B_i admet un homéomorphisme φ_i sur Δ, qui induit un biholomorphisme de $B_i \setminus \{p_i\}$ sur Δ^*.*
- *deux branches distinctes ne se rencontrent qu'en p_0*

Démonstration. On peut supposer $p_0 = (0,0)$, donc $P(x,y) = P_m(x,y) + \cdots + P_d(x,y)$, décomposition en composantes homogènes, avec $P_m \neq 0$ et $2 \leq m \leq d$ puisque $P(0,0) = 0 = DP(0,0)$. Le nombre m est la *multiplicité* du point singulier. *Géométriquement, c'est le nombre d'intersections proches de X_P avec une droite générique passant par un point proche de p_0 et différent de p_0.*

Quitte à changer de coordonnées linéaires, on peut supposer que P_m contient y^m [«pas de tangente verticale»], donc en posant $y = tx$ on a

$$P_m(x,y) = x^m(t^m + \sum_{i=1}^{k} a_i t^{m-i}) = x^m \prod_{i=1}^{m}(t - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{m}(y - \alpha_i x).$$

Toujours quitte à changer de coordonnées linéaires, on peut supposer $\max(\alpha_i) < \frac{1}{4}$. Et aussi que $|P_{m+1}(x,y) + \cdots + P_d(x,y)| \leq \frac{1}{2}\max(|x|,|y|)^{k+1}$ si $\max(|x|,|y|) \leq 1$. Donc si $\varepsilon > 0$ est assez petit, tout point de $(x,y) \in P^{-1}(\{0\}) \cap (\Delta_\varepsilon)^2$ vérifie $|y| \leq \dfrac{1}{2}|x|$.

Comme P n'est pas équivalent à une puissance de y, P et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ n'ont pas de facteur commun, donc $P^{-1}(\{0\}) \cap \big(\dfrac{\partial P}{\partial y}\big)^{-1}(\{0\})$ est fini. Donc quitte à diminuer ε, on a $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ sur $C_\varepsilon \setminus \{p_0\}$. Donc $C_\varepsilon \setminus \{p_0\}$ est une courbe lisse, à tangente non verticale, et la projection $\pi : (x,y) \mapsto x$ induit une application holomorphe sans point critique de $B_\varepsilon \setminus \{p_0\}$ dans Δ.

a propriété $|y| \leq \dfrac{1}{2}|x|$ montre que π envoie $C_\varepsilon \setminus \{p_0\}$ dans Δ^* et est propre. C'est donc un revêtement fini (pas forcément connexe). D'après la classification des revêtements connexes du disque épointé, C_ε est donc une réunion disjointe de composantes connexes $C_1, \cdots, C_k$ biholomorphes à Δ^*, telles que $C_i, \pi|C_i, \Delta^*)$ est isomorphe à $(\Delta^*, z^{d_i}, \Delta^*)$.

Comme $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$, l'adhérence de C_i dans $(\Delta_\varepsilon)^2$ est $B_i = C_i \cup \{(0,0)\}$.

Enfin, par construction on a $B_i \cap B_j = \{p_0\}$.

**Complément.* Le point p_0 est vraiment singulier, plus précisément un au moins des deux cas suivants se produit :

- $k > 1$ c'est-à-dire qu'il y a plusieurs branches
- une des branches B_i n'est pas une sous-variété complexe.*(ii) Si $k = 1$ et que la seule branche B_1 est une sous-variété complexe, sa tangente est non verticale donc elle est localement un graphe $y = f(x)$, avec f holomorphe et $f(0) = 0$. On peut supposer que la composante de degré maximal P_d contient le terme y^d. Considérons $P(x,y) = y^d + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} a_i(x) y^{d-i}$ comme un élément de $\mathbb{C}\{x\}[y]$, où $\mathbb{C}\{x\}$ désigne les séries convergeant au voisinage de 0. On peut faire la division euclidienne de $P(x,y)$ par $y - f(x)$, et comme $P(x, f(x)) = 0$ on trouve $P(x,y) = (y - f(x))Q(x,y)$, avec $Q(x,y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$. On peut appliquer le raisonnement de (i) à $Q(x,y)$, qui est holomorphe et dont la plus petite composante homogène est de degré $k-1$ et contient y^{k-1} : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $Q^{-1}(\{0\}) \cap (\Delta_\varepsilon)^2$ contient une branche B_2. Par hypothèse cette branche coïncide avec B_1, donc $y - f(x)$ divise encore $Q(x,y)$ dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$. Continuant ainsi, on arrive à $P(x,y) = (y - f(x))^m$, ce qui implique $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ et contredit le fait que P est irréductible.

Remarques. 1) On a en fait un énoncé beaucoup plus précis (Newton 1676, Puiseux 1850, cf. [Br-K] pp. 370-454). Si l'on suppose comme ci-dessus que $p_0 = (0,0)$ et que la composante homogène minimale de P contient une puissance de y, chaque branche B_i est l'image de $t \mapsto (t^{p_i}, \sum_{n=p_i}^{\infty} a_n^{(i)} t^n)$ où $p_i \in \mathbb{N}^*$, la série converge localement et le pgcd de p_i et des entiers n tels que $a_n^{(i)} \neq 0$ est 1. Autrement dit, B_i est le graphe de la série (dite de Puiseux) $\displaystyle\sum_{n=p_i}^{\infty} a_n^{(i)} x^{\frac{n}{p_i}}$. De plus, s'il n'y a qu'une seule branche $y = \displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n x^{\frac{n}{p}}$, alors $p > 1$

donc on a un point de rebroussement. Noter que chaque branche a une tangente, donnée par $y = a_{p_i}x$. Newton a de plus décrit un algorithme («polygone de Newton») pour trouver toutes les branches et les séries associées.

2) On peut avoir $P^{-1}(\{0\})$ localement homéomorphe à $\mathbb{C}$ même si $(0,0)$ est un point singulier. Exemple : $P(x,y) = y^2 - x^3$, X_P est homéomorphe à $\mathbb{C}$ via $t \mapsto (t^2, t^3)$. Mais $P^{-1}(\{0\})$ n'est alors jamais une sous-variété *localement plate* c'est-à-dire qu'on n'a pas d'homéomorphisme de couples $(U, P^{-1}(\{0\} \cap U) \approx (\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$. En fait, l'intersection de $P^{-1}(\{0\})$ avec n'importe quelle petite sphère topologique S^3 entourant zéro est nouée. Dans le cas de $y^2 - x^3$, l'intersection $P^{-1}(\{0\}) \cap S^3_\varepsilon$ est le nœud de trèfle, cf. [Br-K] p. 223.*

9.8 Modèle non singulier d'une courbe algébrique plane

Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe plane irréductible. On a vu que $\mathrm{Sing}(X_P)$ est un ensemble fini tel que $\mathrm{Rég}(X_P) = X_P \setminus \mathrm{Sing}(X_P)$ est une surface de Riemann et que tout point $p \in \mathrm{Sing}(X_P)$ a un voisinage U_p tel que $U_p \setminus \{p\} = \coprod_{i=1}^{k_p} C_{p,i}$, $i = 1, \cdots, k_p$, où $C_{p,i}$ est muni d'un biholomorphisme $\varphi_{p,i}$ sur Δ^*.

On pose

$$\widehat{X}_P = X_P \coprod_{p \in \mathrm{Sing}(X_P), 1 \leq i \leq p} \{x_{p,i}\}$$

et on prolonge $\varphi_{p,i}$ par 0 en $x_{p,i}$ pour définir $\widehat{\varphi}_{p,i} : \widehat{C}_{p,i} = C_{p;i} \cup \{x_{p,i}\} \to \Delta$. On complète ainsi un atlas holomorphe de X_P en un atlas holomorphe de $\widehat{X}_P$. La structure de surface de Riemann ainsi définie sur $\widehat{X}_P$ est indépendante du choix des U_p. Cette surface est munie d'une application holomorphe naturelle $\pi : \widehat{X}_P \to X_P$ qui est l'identité sur X_P. Cette application est propre puisque sa restriction à chaque ouvert du recouvrement fini $X_P \cup_{p,i} \widehat{C}_{p,i}$ est propre. Donc $\widehat{X}_P$ est compacte.

Définition. Tout couple (X, f), où X est une surface de Riemann compacte et f une application holomorphe de X dans X_P, qui est est isomorphe à $(\widehat{X}_P, \pi)$, est appelé *modèle non singulier* de X_P.

**Proposition. Le couple (X, f) est un modèle non singulier de X_P si et seulement si $F = f^{-1}\mathrm{Sing}(X_P)$ est fini et f induit un isomorphisme entre $X \setminus F$ et $\mathrm{Rég}(X_P)$.*

Démonstration. La condition est clairement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Si (X, f) vérifie cette condition, l'application $g = \pi^{-1} \circ f$ est un isomorphisme de $X \setminus F$ sur $\widehat{X}_P \setminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X_P)) = \widehat{X}_P \setminus \widehat{F}$. Il faut montrer qu'il se prolonge en un isomorphisme de X sur $\widehat{X}_P$. Il suffit de montrer qu'il se prolonge holomorphiquement, son inverse se prolongera par le même argument.

Le fait que g s'étend holomorphiquement résulte du

Lemme. Une application holomorphe injective $h : \Delta^* \to X$ dans une surface de Riemann compacte s'étend holomorphiquement en 0.

Preuve du lemme. Il suffit de montrer qu'elle s'étend continûment (une fonction continue, holomorphe hors d'un point, est holomorphe). On munit X d'une métrique riemannienne conforme, d'où une forme d'aire ω. L'injectivité de h implique $\displaystyle\int h^*\omega \leq \int_X \omega < +\infty$. Soient

$$\ell(r) = \mathrm{long}(h(\partial\Delta_r) = \int_0^{2\pi} r||h'(re^{i\theta}||d\theta$$
$$a(r) = \mathrm{aire}(h(\Delta_r^*)) = \int_0^r s ds \int_0^{2\pi} ||h'(se^{i\theta}||^2 d\theta.$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$a'(r) = r\int_0^{2\pi} ||h'(re^{i\theta}||^2 d\theta \geq \frac{\ell(r)^2}{2\pi r}.$$

Puisque $a(1) = \displaystyle\int_0^1 a'(r)dr$ est fini, il existe une suite $r_n \to 0$ telle que $\dfrac{\ell(r_n)^2}{2\pi r_n}$ reste borné, donc $\ell(r_n) \to 0$. La courbe $h(\partial\Delta_{r_n})$ borde donc un disque D_n dont le diamètre tend vers 0, et $h(\Delta^*_{r_n})$ est disjoint de ∂D_n, donc contenu dans D_n ou dans son extérieur. Mais ce dernier cas est impossible pour n assez grand car les $h(\Delta^*_{r_n})$ forment une suite décroissante.

Donc $\mathrm{diam}(h(\Delta^*_{r_n}))) \to 0$, et comme X est complète cela veut dire que h s'étend continûment en 0.

Remarques. 1) L'hypothèse d'injectivité peut être remplacée par la finitude de l'aire de l'image (comptée avec multiplicités). Le lemme demeure vrai si X est une variété complexe compacte de dimension quelconque, voire une variété presque complexe. Sous cette forme, il joue un rôle important dans la théorie des courbes pseudo-holomorphes de Gromov.

2) Du point de vue de la géométrie algébrique, un modèle non singulier est caractérisé par le fait que π est un isomoprhisme birationnel, cf. [Fu] p.180.

10 Genre d'une surface de Riemann compacte, théorème de Riemann-Roch

10.1 Diviseurs, diviseurs principaux, groupe de Picard, diviseur canonique

Définitions. Soit X une surface de Riemann compacte. Un *diviseur* sur X est une somme formelle finie $\sum_{P \in X} n_P P$, où $n_P \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, c'est un élément de $\mathbb{Z}^{(D)}$, l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{Z}$ à support fini. L'ensemble des diviseurs forme donc un groupe abélien noté $\mathrm{Div}(X) \subset \mathbb{Z}^X$, qui est librement engendré par les points de X. Le diviseur associé au point P sera noté P ou (P).

Soit $D = \sum_{P \in X} n_P P$ un diviseur sur X. Son degré en un point $P \in X$ est n_P, autrement dit sa valeur si sa valeur en P si D est vu comme une fonction sur X. On note $\mathrm{supp}(D) = \{P \in X \mid \deg_P(D \neq 0\}$ le support de D. Si $\deg_P(X) \geq 0$ pour tout $P \in X$, D est dit *effectif*, on note $D \geq 0$.

Le degré de D est $\deg(D) = \sum_{P \in X} \deg_P(D)$, la somme étant finie par définition. On obtient ainsi un morphisme surjectif de groupes $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$, son noyau est noté $\mathrm{Div}_0(X)$.

Si f est une fonction méromorphe nulle, on définit son diviseur

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in f^{-1}(\{0\})} \deg_P(f) P - \sum_{P \in f^{-1}(\{\infty\})} \deg_P(f) P.$$

L'application $f \mapsto \mathrm{div}(f)$ est un morphisme du groupe multiplicatif $\mathcal{M}^*(X)$ dans $\mathrm{Div}(X)$. Son image est le sous-groupe $\mathrm{Divprinc}(X)$ des *diviseurs principaux*. Le quotient $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Divprinc}(X)$ est appelé *groupe de Picard* de X, et noté $\mathrm{Pic}(X)$. Deux diviseurs qui diffèrent d'un diviseur principal sont dits *linéairement équivalents*.

Soit $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Alors $\sum_{P \in f^{-1}(\{0\})} \deg_P(f) = \sum_{P \in f^{-1}(\{\infty\})} \deg_P(f) = \deg(f)$, donc $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$, donc $\mathrm{Divprinc}(X) \subset \mathrm{Div}_0(X)$.

Diviseur d'une différentielle méromorphe, diviseur canonique. Soit $\omega \in \mathcal{M}_X^1$ une différentielle méromorphe non nulle. Si $P \in X$, on a $\omega = f(z)dz$ dans une carte holomorphe centrée. On pose $\deg_P(\omega) = \deg_P(f)$, c'est clairement indépendant de la carte. Le diviseur de ω est $\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in X} \deg_P(\omega) p$.

Si ω' est une autre différentielle méromorphe non nulle, il existe $f \in \mathcal{M}^*(X)$ telle que $\omega' = f\omega$, donc $\mathrm{div}(\omega') - \mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(f) \in \mathrm{Divprinc}(X)$. Donc la classe $[\omega] \in \mathrm{Pic}(X)$ est bien définie. Tout représentant de cette classe est appelée *un diviseur canonique* de X, ou par abus de langage, *le* diviseur canonique de X. On le note K_X.

10.2 Espaces de fonctions et de formes à pôles contrôlés et à zéros imposés

Notations. Soit X une surface de Riemann compacte, et soit $D \in \mathrm{Div}(X)$. On définit $\mathcal{L}_X(D)$ ou $\mathcal{L}(D)$, l'espace des fonctions méromorphes f telles que $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$. Autrement dit, $f \in \mathcal{L}(D)$ équivaut à l'ensemble des trois propriétés suivantes :

- f est holomorphe sur $X \setminus \mathrm{supp}(D)$
- si $P \in \mathrm{supp}(D)$ et $\deg_P(D) = n_P > 0$, f a au plus un pôle d'ordre n_P en P
- si $P \in \mathrm{supp}(D)$ et $\deg_P(D) = n_P < 0$, f a un zéro en P d'ordre au moins $|n_P|$.

En particulier, $\mathcal{L}_X(0) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$. Si $\mathcal{L}_X(D)$ est de dimension finie (on verra que c'est toujours le cas), on note $\ell_X(D)$ ou $\ell(D)$ sa dimension.

Ensuite, on définit $\Omega_X^1(D)$ ou $\Omega^1(D)$, l'espace des différentielles méromorphes ω telles que $\mathrm{div}(\omega) + D \geq 0$. En particulier, $\Omega_X^1(0) = \Omega_X^1$.

Propriétés (évidentes).

(i) Si f est une fonction méromorphe non nulle, l'application $g \mapsto fg$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(D)$ sur $\mathcal{L}(D + \mathrm{div}(f))$. Donc la classe d'isomorphisme de $\mathcal{L}(D)$ ne dépend que de la classe $[D] \in \mathrm{Pic}(X)$, donc $\ell(D) = \ell([D])$.

(i) Si f est une fonction méromorphe non nulle et ω une différentielle méromorphe non nulle, $\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$.

(ii) Si ω est une différentielle méromorphe non nulle, l'application $f \mapsto f\omega$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}_X(D+\mathrm{div}(\omega))$ sur $\Omega^1_X(D)$.

(iii) Si K_X est le diviseur canonique, on a un isomorphisme $\mathcal{L}_X(D+K_X) \approx \Omega^1(D)$. En particulier, $\mathcal{L}(K_X) \approx \Omega^1_X$.

10.3 Théorème de finitude, définition du genre

Théorème. *Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X.*

(i) L'espace $\mathcal{L}_X(D)$ est de dimension finie. Plus précisément, on a

$$\ell_X(D) \leq \max(\deg(D) + 1, 0).$$

(ii) L'espace $\Omega^1_X(D)$ est aussi de dimension finie.

Démonstration. (i) Si $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$, $\deg(\mathrm{div}(f) + D) = \deg(D) \geq 0$. Donc si $\deg(D) < 0$, $\ell(D) = 0 = \max(\deg(D) + 1, 0)$.

Ensuite, si $\deg(D) \geq 0$, en prenant $P_1, \cdots, P_N \in X\backslash\mathrm{supp}(D)$ distincts avec $N = \deg(D)+1$, l'application d'évaluation

$$f \in \mathcal{L}(D) \mapsto (f(P_1), \cdots, f(P_N)) \in \mathbb{C}^N$$

a pour noyau $\mathcal{L}(D - (P_1 + \cdots + P_N)) = \{0\}$, donc $\dim \mathcal{L}(D) \leq N = \deg(D) + 1$.

(ii) Cela résulte de (i) et du fait que si ω est une différentielle méromorphe non nulle, $f \mapsto f\omega$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}_X(\mathrm{div}(\omega) + D)$ sur $\Omega^1_X(D)$.

Définition. Si X est une surface de Riemann compacte, son *genre* (au sens d'Abel) est

$$g(X) = g_X = \dim \Omega^1_X,$$

la dimension de l'espace des différentielles holomorphes (ou : de première espèce). Noter qu'on a aussi $g(X) = \ell(K_X)$.

10.4 Isomorphisme entre $H^1(X, \mathbb{R})$ et les formes harmoniques

Soit X une surface de Riemann, compacte ou non. Rappelons que si $\mathcal{H}^1(X, \mathbb{R})$ désigne l'espace des formes harmoniques réelles, on a un isomorphisme $\Omega^1_X \approx \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R})$ donné par $\omega \mapsto \mathrm{Re}(\omega)$. Si X est compacte de genre g, on a donc

$$g = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_X) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}).$$

On note $H^1(X, \mathbb{R}) = \dfrac{\{\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{R}) \mid d\alpha = 0\}}{dC^\infty(X, \mathbb{R})}$ le premier groupe de cohomologie de de Rham. Puisque toute forme harmonique est fermée, on a une application naturelle $i_X : \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(X, \mathbb{R})$. Puisque X est compacte, toute fonction harmonique est constante, donc i_X est injective.

L'énoncé suivant est un cas particulier du théorème général de Hodge que sur une variété riemannienne compacte l'inclusion des formes harmoniques dans la cohomologie de de Rham est un isomorphisme.

Théorème. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors toute classe de cohomologie dans $H^1(X, \mathbb{R})$ admet un représentant harmonique. Donc $i_X : \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(X, \mathbb{R})$ est un isomorphisme. Donc*

$$\dim_{\mathbb{R}} H^1(X, \mathbb{R}) = 2g(X).$$

Démonstration. On va trouver le représentant harmonique par minimisation d'une intégrale de Dirichlet. La preuve est semblable à la construction d'un potentiel dipolaire, mais beaucoup plus simple puisque X est compacte et qu'on n'a pas à renormaliser l'intégrale de Dirichlet.

Soit $\alpha_0 \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$ un représentant de la classe donnée, on cherche une forme harmonique $\alpha = \alpha_0 + du$ où $u \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Pour $u, w \in C^1(X, \mathbb{R})$, notons

$$\mathcal{D}_{\alpha_0}(u) = ||\alpha_0 + du||^2_{L^2(X)} = \iint_X ||\alpha_0 + du||^2$$
$$\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u, w) = \langle \alpha_0 + du, dw \rangle_{L^2(X)} = \iint_X (\alpha_0 + du, dw).$$

On a donc la propriété

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\alpha_0}(u + w) &= ||\alpha_0 + du + dw||^2_{L^2(X)} \\ &= ||\alpha_0 + du||^2_{L^2(X)} + 2\langle \alpha_0 + du, dw\rangle_{L^2(X)} + ||dw||^2_{L^2(X)} \\ &= \mathcal{D}_{\alpha_0}(u) + 2\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u, w) + \mathcal{D}_X(w).\end{aligned}$$

Le principe de Dirichlet dans ce cas s'énonce ainsi.

Proposition. *Soit $u \in C^2(X, \mathbb{R})$. Sont équivalents :*

(i) $\alpha_0 + du$ est harmonique

(ii) u minimise $\mathcal{D}_{\alpha_0}$ sur $C^1(X, \mathbb{R})$

(iii) Pour tout $w \in C^1(X)$, on a $\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u, w) = 0$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Si $w \in C^1(X, \mathbb{R})$, on a, en posant $\alpha = \alpha_0 + du$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u, w) = \iint_X (\alpha, dw) &= \iint_X dw \wedge *\alpha = \iint_X d(w *\alpha) - wd(*\alpha) \\ &= -\iint_X wd(*\alpha) \quad \text{par Stokes.}\end{aligned}$$

Ceci est nul pour tout w si et seulement si $d(*\alpha) = 0$. Puisque $d\alpha = 0$, ceci équivaut au fait que α est harmonique.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (ii) équivaut à : pour tout $w \in C^1(X, \mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \mathcal{D}_{\alpha_0}(u + tw) = \mathcal{D}_{\alpha_0}(u) + 2t\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u, w) + t^2\mathcal{D}_{\alpha_0}(w)$ a un minimum en 0. Puisque $\mathcal{D}_X(w) \geq 0$, ceci équivaut à (iii).

Remarques. En fait, comme avant cette proposition est vraie dès que u est de classe C^1.

Preuve du théorème. On considère une suite minimisante (u_n) de classe C^2 pour $\mathcal{D}_{\alpha_0}$, c'est-à-dire

$$\lim \mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n) = \inf_{C^2(X,\mathbb{R})} \mathcal{D}_{\alpha_0} = \inf_{C^1(X,\mathbb{R})} \mathcal{D}_{\alpha_0} =: d.$$

Nous allons trouver une fonction $u \in C^\infty(X)$ telle que $\alpha_0 + du$ est harmonique et du_n converge vers du dans $L^2\Omega^1(X)$.

1) On montre d'abord la propriété de suite de Cauchy L^2. La formule du parallélogramme

$$\Big|\Big|\frac{\alpha - \beta}{2}\Big|\Big|^2_{L^2(X)} + \Big|\Big|\frac{\alpha + \beta}{2}\Big|\Big|^2_{L^2(X)} = \frac{1}{2}(||\alpha||^2_{L^2(X)} + ||\beta||^2_{L^2(X)})$$

implique

$$||du_n - du_m||^2_{L^2(X)} = 2(\mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n) + \mathcal{D}_{\alpha_0}(u_m)) - 4\mathcal{D}_{\alpha_0}(\frac{u_n + u_m}{2}).$$

Or $\mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n)$ et $\mathcal{D}_{\alpha_0}(u_m)$ tendent vers d, et $\mathcal{D}_{\alpha_0}(\frac{u_n+u_m}{2}) \geq d$. Donc le terme de droite tend vers 0, cqfd.

2) Soit q un point de X. Il est contenu dans l'intérieur d'un disque conforme lisse $D \subset X$. Sur D, α_0 est exacte, $\alpha_0 = dv_0$. Comme en 4.7, en utilisant le corollaire de la section 4.1, on peut trouver $\widetilde{u}_n \in C^2(X, \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{D}_D(v_0 + \widetilde{u}_n) \leq \mathcal{D}_D(v_0 + u_n)$, $\widetilde{u}_n = u_n$ hors de D, et $v_0 + \widetilde{u}_n$ est harmonique sur D_n, où D_n est un sous-disque conforme de D tel que $D_n \subset \mathrm{Int}(D_{n+1})$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathrm{Int}(D)$. On a

$$\mathcal{D}_{\alpha_0}(\widetilde{u}_n) = \mathcal{D}_D(v_0 + \widetilde{u}_n) + \iint_{X\setminus D} ||\alpha_0 + du_n||^2 \leq \mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n),$$

donc $(\widetilde{u}_n)$ est encore une suite minimisante pour $\mathcal{D}_{\alpha_0}$, donc $d(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0 dans $L^2(X)$, et a fortiori dans $L^2(D)$. Puisque (du_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(D)$, il en est de même de $(d\widetilde{u}_n)$. Exactement comme en 4.7, le contrôle des normes C^k des fonctions harmoniques par l'intégrale de Dirichlet implique que $\alpha_0 + du_n$ converge dans $L^2\Omega^1(X)$ vers une forme harmonique α, et aussi que $\alpha - \alpha_0$ est exacte. Ceci achève la preuve du théorème.

10.5 Majoration de $\ell(D+D')$

Proposition. *Soient D et D' deux diviseurs sur X compacte, avec D effectif. Alors*

$$\ell(D+D') \leq \deg(D) + \ell(D').$$

Démonstration. Écrivons $D = \sum_{i=1}^{k} d_i p_i$ avec les P_i distincts, $d_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum d_i = \deg(D)$. Fixons des cartes holomorphes centrées z_i en les P_i. Soit $d'_i = \deg_{p_i}(D')$. Si $f \in \mathcal{L}(D+D')$, $z^{d_i+d'_i} f$ est holomorphe en z_i, donc on peut définir $T_{p_i}(f) \in \mathbb{C}_{d_i-1}[z_i]$, son développement de Taylor de degré $d_i - 1$ en z_i. Alors l'application d'évaluation

$$f \in \mathcal{L}(D+D') \mapsto (T_{p_1}(f), \cdots, T_{p_k}(f)) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{C}_{d_i-1}[z_i] \approx \mathbb{C}^{\deg(D)}$$

a pour noyau $\mathcal{L}(D')$, donc

$$\ell(D+D') = \dim \mathcal{L}(D+D') \leq \deg(D) + \dim \mathcal{L}(D') = \deg(D) + \ell(D').$$

10.6 Minoration de $\ell(D)$

Théorème (Riemann). *Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X de genre g. Alors*

$$\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g.$$

Corollaire. *Il existe toujours une fonction méromorphe non constante de degré au plus $g+1$.*

Démonstration. On suppose d'abord D positif et de degré $d \geq g+1$. On écrit $D = \sum_{i=1}^{g+1} d_i P_i$ avec les P_i distincts, $d_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum d_i = d$. Pour $1 \leq i \leq g+1$, $1 \leq j \leq d_i$, on sait qu'il existe une différentielle méromorphe sans résidus, ayant exactement un pôle d'ordre $j+1$ en P_i et holomorphe ailleurs.

Lemme. *Si $\mathcal{M}^{1,sr}(X)$ est l'espace des différentielles méromorphes sans résidus («de seconde espèce»), la dimension complexe de $\dfrac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d(\mathcal{M}(X)) \oplus \Omega^1_X}$ est au plus g.*

Preuve du lemme. Puisque $\Omega^1_X \cap d(\mathcal{M}(X)) = \{0\}$, il revient au même de prouver que $\dfrac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d(\mathcal{M}(X))}$ est de dimension complexe au plus $2g$.

Soit $\omega \in \mathcal{M}^{1,sr}(X)$, de pôles $Q_1, \cdots, Q_m$. Au voisinage de chaque pôle Q_i, choisissons une carte holomorphe centrée z_i définie sur U_i et l'envoyant sur Δ_2, de sorte que les U_i soient disjoints. Alors ω admet une primitive méromorphe u_i sur U_i. Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ de classe C^∞ qui vaut 1 hors de $[0, \frac{1}{2}]$ et 0 près de 0. Alors la forme $\widetilde{\omega}$ qui vaut ω hors des U_i et $d(\rho(|z_i|)u_i)$ sur U_i est lisse. De plus, $\widetilde{\omega} \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ et $d\widetilde{\omega} = 0$.

On a ainsi associé à ω une forme fermée $\widetilde{\omega} \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ telle que $\widetilde{\omega} - \omega$ est exacte, c'est-à-dire de la forme df où f est localement la somme d'une fonction C^∞ et d'une fonction méromorphe. Donc la classe $[\widetilde{\omega}] \in H^1(X,\mathbb{C})$ est bien définie et ne dépend que de la classe $\dfrac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d(\mathcal{M}(X))}$, et l'on obtient ainsi une application linéaire de $\dfrac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d(\mathcal{M}(X))}$ dans $H^1(X,\mathbb{C})$. Cette application est injective, car si $\widetilde{\omega}$ est exacte, $\omega = \widetilde{\omega} - df$ l'est aussi. Donc

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d(\mathcal{M}(X))} \leq \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(X,\mathbb{R}) = 2g.$$

**Remarque.* En fait cette application est un isomorphisme. Le groupe $\dfrac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d(\mathcal{M}(X))}$ est appelé *groupe de de Rham algébrique*, cf. [Gr-Ha] p.453 sqq.*

Fin de la preuve du théorème. Les classes $[\omega_{i,j}] \in \dfrac{\mathcal{M}_X^1}{d(\mathcal{M}(X)) \oplus \Omega_X^1}$ sont en nombre $\sum d_i = d$. D'après le lemme, il existe $d-g$ relations linéaires

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j}^{(r)} \omega_{i,j} = df^{(r)} + \omega_i,$$

où $\omega_i \in \Omega_X^1$ qui sont indépendantes c'est-à-dire : si $(\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(d-g)}) \in \mathbb{C}^{d-g} \setminus \{0\}$, il existe un (i,j) tel que $\sum_{r=1}^{d-g} \mu^{(r)} \lambda_{i,j}^{(r)} \neq 0$. Donc la forme $\sum_{r=1}^{d-g} \mu^{(r)} df^{(r)}$ est non nulle, donc la fonction $\sum \mu^{(r)} df^{(r)}$ est non nulle, donc la fonction $\sum_{r=1}^{d-g} \mu^{(r)} f^{(r)}$ est non constante. Comme elle est dans $\mathcal{L}(D)$, on a montré que $\mathcal{L}(D)$ contient les fonctions linéairement indépendantes $1, f^{(1)}, \cdots, f^{(d-g)}$, cqfd.

Dans le cas général, il existe D effectif tel que $D + D'$ est effectif, et de degré $\geq g+1$. D'après 1) et la majoration $\deg(D+D') \leq \ell(D) + \deg(D')$, on a

$$\ell(D) \geq \ell(D+D') - \deg(D') \geq \deg(D+D') + 1 - g - \deg(D') = \deg(D) + 1 - g.$$

Preuve du corollaire. *Soit D un diviseur effectif de degré $g+1$. Le théorème donne $\ell(D) \geq 2$, donc il existe une fonction méromorphe non constante telle que* $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$. *Donc*

$$\deg(f) = \sum_{P \in f^{-1}(\{\infty\})} \deg_P(f) \leq \deg(D) = g+1.$$

Remarque. Si $D = \sum_{i=1}^{k} d_i P_i$ avec les P_i distincts et $\sum d_i = g+1$, on a trouvé une fonction ayant en chaque P_i au plus un pôle d'ordre d_i, et pas de pôles ailleurs. Par exemple, pour tout $P \in X$ il existe une fonction méromorphe ayant au plus un pôle d'ordre $g+1$ en P et pas de pôle ailleurs. Et si $P_1, \cdots, p_{g+1}$ sont distincts, il existe une fonction méromorphe ayant au plus un pôle simple en chaque P_i et pas de pôle ailleurs.

10.7 Surfaces de genre zéro

Théorème. *Toute surface de Riemann compacte de genre zéro est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On dit aussi qu'elle est* rationnelle.

Démonstration. D'après la section précédente, une telle surface X admet une fonction méromorphe f non constante avec au plus un pôle simple. Comme application de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, elle est donc de degré un c'est-à-dire un isomorphisme.

Proposition. *Si X est de genre zéro,* $\ell(D) = \max(0, \deg(D)+1)$.

Démonstration. Ceci résulte de la majoration $\ell(D) \leq \max(0, \deg(D)+1)$ et de la minoration $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1$ de 10.6.

Exercice. Si $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $D = \sum_{i=1}^{k} d_i(z_i) + d_\infty(\infty)$ avec $z_i \in \mathbb{C}$, décrire explicitement $\mathcal{L}(D)$.

Corollaire (théorème de Lüroth, version géométrique). *Soit X une surface de Riemann admettant une application holomorphe non constante $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to X$. Alors X est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Démonstration. D'abord, X est compacte puisque f est ouverte et fermée donc surjective. Soit $\omega \in \Omega_X^1$, alors $f^*\omega \in \Omega^1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$, donc $f^*\omega = 0$, donc $\omega = 0$ puisque df est presque partout non nulle. Donc $\Omega_X^1 = 0$, c'est-à-dire que X est de genre zéro, donc $X \approx \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

10.8 Théorème de Riemann-Roch

Remarque. Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X. Nous avons vu que $\deg(D)$ ne dépend que de $[D] \in \operatorname{Pic}(X)$. Donc $\ell(D + K_X)$ est bien défini.

Théorème de Riemann-Roch. *Pour tout diviseur D sur une surface de Riemann compacte X de genre g, on a*

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $g = 0$, soit $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors Ω^1_X contient la forme dz qui a un pôle double en l'infini et aucun zéro, donc $\deg(K_X) = -2 = 2g - 2$. Distinguons deux cas :

- $\deg(D) \geq -1$: alors $\ell(D) = \deg(D) + 1$ et $\ell(K_X - D) = 0$, donc

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg(D) + 1 = \deg(D) + 1 - g$$

- $\deg(D) < -1$: alors $\ell(D) = 0$ et $\ell(K_X - D) = \deg(K_X - D) + 1 = -\deg(D) - 1$, donc

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = 0 - (\deg(D) - 1) = \deg(D) + 1 = \deg(D) + 1 - g.$$

Supposons maintenant $g \geq 1$. Considérons la fonction

$$f(D) = \ell(D) - \ell(K_X - D) - \deg(D).$$

Il s'agit de montrer que $f(D) = 1 - g$. Le point clé est le

Lemme. *Si $D \in \mathrm{Div}(X)$ et $P \in X$, on a $f(D + P) \leq f(D)$.*

Preuve du lemme. On a

$$f(D + P) - f(D) = \big(\ell(D + P) - \ell(D)\big) + \big(\ell(K_X - D) - \ell(K_X - D - p)\big) - 1,$$

et les deux premiers termes à droite sont dans $\{0, 1\}$ d'après la majoration $\ell(D + D') \leq \ell(D) + \deg(D')$. Il faut donc montrer qu'ils ne sont pas tous les deux égaux à 1. Mais ceci voudrait dire qu'il existe $f \in \mathcal{L}(D + P) \setminus \mathcal{L}(D)$, et $\omega \in \Omega^1(-D) \setminus \Omega^1(-D - p)$, ce qui implique que $f\omega \in \Omega^1(P) \setminus \Omega^1_X$: une telle forme aurait une somme des résidus non nulle, ce qui est impossible.

Ensuite, on prouve successivement les propriétés :

1) On a $f(0) = 1 - g$: en effet,

$$f(0) = \ell(0) - \ell(K_X) - \deg(0) = 1 - g - 0 = 1 - g.$$

2) Si $\deg(D) > \deg(K_X)$, $f(D) \geq 1 - g$. En effet, $\deg(K_X - D) < 0$ donc $\ell(K_X - D) = 0$. Et $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ d'après 10.6. Donc

$$f(D) \geq \deg(D) + 1 - g - 0 - \deg(D) = 1 - g.$$

3) Si $\deg(D) \gg 0$, $f(D) = 1 - g$: en effet, $f(D) \geq 1 - g$ d'après 2). Et $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g > 0$, donc D est linéairement équivalent à D' effectif, donc $f(D) = f(D')$. Enfin, d'après le lemme, $f(D') \leq 1 - g$, donc $f(D) = 1 - g$.
4) On a $f(D) \geq 1 - g$ pour tout D : en effet, $\deg(D + nP) > \max(\deg(K_X), g)$ pour n assez grand, donc $f(D) \geq f(D + nP) = 1 - g$ d'après le lemme et 3).
5) Si $D \geq 0$, $f(D) = 1 - g$: en effet, $f(0) = 1 - g \geq f(D) \geq 1 - g$ d'après 1), le lemme et 4).
6) On a $\deg(K_X) = 2g - 2$: en effet, $K_X \geq 0$ puisque $g \geq 1$, donc

$$1 - g = f(K_X) = \ell(K_X) - \ell(0) - \deg(K_X) = g - 1 - \deg(K_X).$$

7) Si $\deg(D) \ll 0$, $f(D) = 1 - g$: en effet, $\ell(D) = 0$ et $\deg(K_X - D) \gg 0$, donc $\ell(K_X - D) = \deg(K_X - D) + 1 - g$, donc

$$f(D) = 0 - (\deg(K_X - D) + 1 - g) - \deg(D) = -\deg(K_X) + g - 1 = 1 - g.$$

Fin de la preuve. Si D est quelconque, on a $f(D+nP) = 1-g = f(D-nP)$. Le lemme donne enfin

$$1-g = f(D-nP) \geq f(D) \geq f(D+nP) = 1-g.$$

10.9 Premiers corollaires de Riemann-Roch

Théorème 1. *(i) Le degré du diviseur canonique est* $\deg(K_X) = 2g-2$.
(ii) Si $g=1$ toute différentielle holomorphe non nulle est non singulière (n'a pas de zéros).

Démonstration. (i) On l'a obtenu au cours de la preuve. Cela résulte aussi du théorème appliqué à $D = K_X$:

$$\ell(K_X) - \ell(0) = g-1 = \deg(K_X) + 1 - g,$$

d'où la valeur de $\deg(K_X)$.

(ii) On a $\deg(K_X) = 0$, donc si ω est une différentielle holomorphe non nulle, $\operatorname{div}(\omega) = 0$ c'est-à-dire que ω n'a pas de zéros.

Théorème 2 (Riemann). *Si* $\deg(D) \geq 2g-1$, $\ell(D) = \deg(D) + 1 - g$.

Démonstration. On a $\deg(K_X - D) < 0$ d'après le théorème 1, donc $\ell(K_X - D) = 0$, d'où

$$\ell(D) = \ell(K_X - D) + \deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1 - g.$$

Théorème 3 (formule de Riemann-Hurwitz). *Soit $f : X \to Y$ est un revêtement ramifié entre deux surfaces de Riemann compactes. On note*

$$\mathfrak{R}(f) = \sum_{P \in R(f)} (\deg_P(f) - 1)P,$$

appelé diviseur de ramification. *Alors*

$$\begin{aligned} 2g_X - 2 &= \deg(f)(2g_Y - 2) + \deg \mathfrak{R}(f) \\ &= \deg(f)(2g_Y - 2) + \sum_{P \in R(f)} (\deg_P(f) - 1). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega^1_Y$ non nulle. Pour tout $P \in X$, il existe des cartes holomorphes centrées z en P et w en $f(P)$ telles que f soit donnée par $w = z^k$, $k = \deg_P(f)$ et $\omega = w^j dw$, $j = \deg_{f(P)}(\omega)$. Donc $f^*\omega = kz^{k(j+1)-1}dz$, d'où

$$\deg_P(f^*\omega) = k(j+1) - 1 = \deg_P(f).(\deg_{f(P)}(\omega) + 1) - 1.$$

Puisque $f^*\omega$ est une différentielle méromorphe non nulle sur X, on a

$$\begin{aligned} 2g_X - 2 = \deg(f^*\omega) &= \sum_{P \in X} \deg_P(f).(\deg_{f(P)}(\omega) + 1) - 1) \\ &= \sum_{Q \in Y} \Big(\sum_{P \in f^{-1}(\{Q\})} \deg_P(f) \Big) \deg_Q(\omega) + \sum_{P \in X} (\deg_P(f) - 1) \\ &= \sum_{Q \in Y} \deg(f) \deg_Q(\omega) + \sum_{P \in X} (\deg_P(f) - 1) \\ &= \deg(f) \sum_{Q \in Y} \deg_Q(\omega) + \sum_{P \in R(f)} (\deg_P(f) - 1) \\ &= \deg(f) \deg(\omega) + \deg \mathfrak{R}(f) \\ &= \deg(f)(2g_Y - 2) + \deg \mathfrak{R}(f). \end{aligned}$$

10.11 Formule du genre d'une courbe plane lisse

Théorème. *Soit $X_{\widetilde{P}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe projective plane lisse (donc irréductible), de degré d. Alors son genre est*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{d(d-3)}{2} + 1.$$

Démonstration. (i) Traitons d'abord les cas $d = 1$, $d = 2$. Si $d = 1$, $X_{\widetilde{P}}$ est toujours lisse, c'est une droite projective [géométriquement et biholomorphiquement] donc $g = 0 = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Si $d = 2$, $X_{\widetilde{P}}$ est une conique non dégénérée. Si elle est lisse, elle est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: fixant $p_0 \in X_{\widetilde{P}}$ qu'on peut supposer égal à $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, l'application $\varphi : (x,y) \in X_{\widetilde{P}} \mapsto \frac{y}{x} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [géométriquement une projection centrale] est un biholomorphisme, car la droite $y = tx$ coupe la conique en deux points, l'un étant $(0,0)$, donc l'autre est fonction rationnelle de t.

On suppose maintenant $d \geq 3$. La courbe est déterminée par $P(x,y) = \widetilde{P}(1,x,y)$, puisque $\widetilde{P}$ est irréductible donc non divisible par x_0. Soit $\omega = \frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}}$, différentielle méromorphe non nulle. Nous allons montrer qu'elle est holomorphe non nulle, et calculer son nombre de zéros (avec multiplicités) $\deg(\omega)$, que nous savons par ailleurs être égal à $2g-2$.

Puisque $dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy$ s'annule sur X_P, on a $\omega = -\frac{dy}{\frac{\partial P}{\partial x}}$. Comme dP ne s'annule pas sur $X_P \cap \mathbb{C}^2 = Y_P$, et que x (resp. y) est une coordonnée holomorphe si $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ (resp. $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$), ω est holomorphe et non singulière sur Y_P.

Reste à voir ce qui se passe à l'infini. Quitte à remplacer $P(x,y)$ par $(1+\varepsilon y)^d P(\frac{x}{1+\varepsilon y}, \frac{y}{1+\varepsilon y})$ avec $\varepsilon \neq 0$ assez petit (ce qui revient à remplacer la droite à l'infini par $(y = -\varepsilon^{-1})$), on peut supposer que la composante homogène de degré d est de la forme $\lambda \prod_{i=1}^{d}(y - \alpha_i x)$ avec les α_i distincts. Géométriquement, les points de $X_P \cap \mathbb{P}^1_\infty$ sont différents de $[0:0:1]$ et transverses. Si $(t,u) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$ sont les coordonnées de U_1, on a

$$P_1(t,u) = t^d P(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}) = \lambda \prod_{i=1}^{d}(u - \alpha_i) + tQ(t,u).$$

Donc les points à l'infini de X_P sont tous dans U_1, donnés par $t = 0, u = \alpha_1, \cdots, \alpha_d$. Ils sont au nombre de d et pour chacun d'eux, t est une carte holomorphe centrée.

Par ailleurs, écrivant $(x,y) = (\frac{1}{t}, \frac{u}{t})$, $P(x,y) = x^d P_1(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}) = x^d P_1(t,u)$, il vient

$$dx = -t^{-2}dt\ , \ \frac{\partial P}{\partial y} = x^d . \frac{1}{x}\frac{\partial P_1}{\partial u}(t,u) = t^{1-d}\frac{\partial P_1}{\partial u}(t,u),$$

donc

$$\omega = \frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}} = t^{d-3}\frac{dt}{\frac{\partial P_1}{\partial u}}.$$

Puisque la forme $\frac{dt}{\frac{\partial P_1}{\partial u}}$ est holomorphe et non singulière sur U_1, ω est non singulière partout si $d = 3$, et si $d = 4$ elle a pour zéros les points de $X_L \cap \mathbb{P}^1_\infty$, qui sont au nombre de d et d'ordre $d-3$. Dans tous les cas, on a

$$\deg(\mathrm{div}(\omega)) = d(d-3) = 2g-2,$$

ce qui donne la formule annoncée.

*$\textit{Genre d'une courbe plane quelconque.}$ Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique plane irréductible, de degré d. Le genre du modèle non singulier $\widehat{X}_P$ est

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(P)} \delta_p,$$

où $\delta_p \in \mathbb{N}^*$, avec δ_p. Le nombre δ_p admet les descriptions suivantes :

- (M. Noether) δ_p est le nombre de points *infiniment proches de* p, c'est-à-dire les points des $Y_j \cap E_j$ où Y_j est la j-ième transformée stricte de X_P et E_j le j-ième diviseur d'éclatements, dans une suite d'éclatements (blowing ups, σ-processes) désingularisant le point p : cf. [Br-Kn] p.475 sqq et 614 sqq, ou [Ko] p.26 sqq.
- δ_p est le nombre de points doubles proches d'une déformation générique de X_P. Plus précisément, supposant que p n'est pas à l'infini, δ_p est le nombre de solutions de $P(x,y) = \varepsilon$ qui sont proches de p, pour un $\varepsilon \in \mathbb{C}$ non nul avec $|\varepsilon|$ assez petit pour qu'en particulier ε soit une valeur régulière. Voir [Mi3], p.85 sqq.
- (J. Milnor, cf [Mi3] p.93 sqq) : si X_P a une seule branche en p, $\delta_p = \frac{1}{2}\mu$ où μ est le *nombre de Milnor* c'est-à-dire le degré de $\dfrac{\nabla P}{||\nabla P||} : S^3_\varepsilon \to S^3$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit (on suppose que p n'est pas à l'infini). [Attention, Milnor l'appelle multiplicité]. Si $(t^{a_0}, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j t^{a_j})$ est un paramétrage de Puiseux, $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - 1)(D_j - D_{j-1})$, $D_j = \mathrm{pgcd}(a_0, a_1, \cdots, a_{j-1})$. Si X_P a r branches $B_1, \cdots, B_r$ donnant les nombres $\delta_1, \cdots, \delta_r$, on a $\delta_p = \sum_{i=1}^{r} \delta_i + \sum_{i<j} \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est la mutliplicité d'intersection entre B_i et B_j en p.

  Cas particuliers :
- Si p a r branches lisses et deux à deux transverses, $\delta_p = \dfrac{r(r-1)}{2}$.
- Si p a r branches non toutes lisses ou non deux à deux transverses, $\delta_p > \dfrac{r(r-1)}{2}$.
- Si p est un point cusp ordinaire [point de rebroussement de première espèce], soit $P(x,y) \sim y^2 - x^3 + O(||(x,y)||^4)$, on a $\delta_p = 1$.
- Si p est un cusp généralisé, soit $P(x,y) \sim y^a - x^b + O(||(x,y)||^{b+1})$ avec $1 < a < b$ et a, b premiers entre eux, $\delta_p = \dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$.*

11 Courbes elliptiques

11.1 Réalisation d'une surface de genre un comme cubique plane

Notation. Si $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont distincts, on pose $C_{a,b,c} = X_P$ où $P(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)$. Cette courbe est irréductible, sa partie finie Y_P est lisse puisque a, b, c sont distincts. Elle est aussi lisse à l'infini, puisqu'elle a un seul point à l'infini, $p_0 = [0 : 0 : 1]$, et que dans les coordonnées $(t, u) = (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$, p_0 a pour coordonnées $(0, 0)$ et l'équation de X_P devient $P_1(t, u) = 0$, où

$$P_1(t,u) = u^3 P(\frac{t}{u}, \frac{1}{u}) = u^3\Big(\frac{1}{u^2} - (\frac{t}{u} - \frac{a}{u})(\frac{t}{u} - \frac{b}{u})(\frac{t}{u} - \frac{c}{u})\Big) = u - (t-au)(t-bu)(t-cu).$$

Notons que t est une carte holomorphe centrée en $[0 : 0 : 1]$.

Théorème. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre un. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts tels que X est isomorphe à la cubique $C_{a,b,c}$. On peut imposer $a + b + c = 0$.*

Démonstration. Nous savons que X admet une fonction méromorphe f de degré au plus 2, en fait exactement 2 sinon X serait biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donc de genre zéro. Par Riemann-Hurwitz, cette fonction a une ramification totale de 4, et les ramifications sont simples, donc il y a 4 valeurs critiques distinctes a, b, c, d. Remplaçant f par $\varphi \circ f$ où $\varphi \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et utilisant la transitivité de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et celle de $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$, on peut imposer que $d = \infty$ et $a + b + c = 0$.

D'après l'étude générale de $\mathcal{M}(X)$, on a $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ où g vérifie une équation $g^2+P(f)g+Q(f) = 0$, avec $P, Q \in \mathbb{C}(x)$. Remplaçant g par $g + \frac{1}{2}P(f)$, on peut supposer $P = 0$. Puis remplaçant g par $\lambda D(f)g$ où D est le dénominateur de Q, on peut supposer $Q \in \mathbb{C}[x]$ et unitaire.

Puis remplaçant g par $\dfrac{g}{R(f)}$ où R est le plus grand polynôme unitaire tel que R^2 divise Q, il vient $g^2 = \prod_{i=1}^{k}(f - a_i)$ avec les a_i distincts. Ceci implique que si $f(p) = a_i$ on a $\deg_P(g) = \frac{1}{2}\deg_p(f - a_i)$, donc $\{a_1, \cdots, a_k\} \subset \{a, b, c, \}$. Donc $k = 1, 2$ ou 3.

Si $k \leq 2$, en paramétrant rationnellement la conique $y^2 = x-a_1$ ou $(x-a_1)(x-a_2)$, on a $\mathbb{C}(f, g) = \mathbb{C}(h)$, ce qui implique que le genre de X est nul par le théorème de Lüroth. Donc $k = 3$, d'où $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)$.

On sait que $f^{-1}(\{\infty\})$ est réduit à un point q_0 avec $\deg_{q_0}(f) = 2$, et $g^{-1}(\{\infty\}) = \{q_0\}$ puisque $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)$. Les fonctions $\dfrac{g}{f}$ et $t = \dfrac{y}{x}$ sont des cartes holomorphes centrées en q_0 et en p_0 de X et de $C_{a,b,c}$ respectivement. L'application $\varphi = (f, g) : X \setminus \{q_0\} \to \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vérifie $t \circ (f, g) = \dfrac{g}{f}$, donc se prolonge par $\varphi(q_0) = [0 : 0 : 1]$ en une une application holomorphe de X dans $C_{a,b,c}$. De plus, $\varphi^{-1}(\{p_0\}) = \{q_0\}$, et $\deg_{q_0}(\varphi) = 1$, donc φ est un isomorphisme de X sur $C_{a,b,c}$.

11.2 Isomorphisme sur un tore

Soit X une surface de Riemann de genre un. Par définition, $\Omega^1_X = \mathbb{C}\omega$ avec ω différentielle holomorphe non nulle. De plus, $\deg(\omega) = 0$ donc ω est non singulière.

Définitions. Une *période* de ω est un nombre complexe de la forme $\lambda = \int_\gamma \omega$, où γ est un lacet C^1 par morceaux sur X (ou C^∞). L'ensemble des périodes est noté Λ_ω. C'est un sous-groupe de $\mathbb{C}$, bien défini par X à multiplication par un scalaire près.

Théorème. *L'ensemble des périodes Λ_ω est un* réseau*, c'est-à-dire $\Lambda_\omega = \lambda_1\mathbb{Z} \oplus \lambda_2\mathbb{Z}$ avec $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De plus, si $p \in X$ est fixé, l'application d'intégration*

$$q \in X \mapsto [I]_p(q) = \Big[\int_p^q \omega\Big] \in \mathbb{C}/\Lambda_\omega$$

est un biholomorphisme. Ici, $\Big[\int_p^q \omega\Big] = \Big[\int_\gamma \omega\Big]$, où γ est n'importe quel chemin C^1 de p à q dans X.

Démonstration. Soit v le champ de vecteurs sur X tel que $\langle \omega, v \rangle = 1$. Puisque ω est non singulière, il est bien défini et holomorphe, et il en est de même de zv pour tout $z \in \mathbb{C}$. Puisque X est compacte, l'équation différentielle $\dot{\gamma} = zv(\gamma)$ a un flot $(\varphi_z^t)_{t\in\mathbb{R}}$ bien défini. De plus, zv dépend holomorphiquement de z, donc l'application $(p, z) \in X \times \mathbb{C} \mapsto \varphi_z^t(p) \in X$ est holomorphe pour tout t.

Pour $p \in X$ fixé, on pose $\psi_p(z) = \varphi_z^1(p)$, c'est une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans X, donc $\psi_p^*\omega = f_p(z)dz$, avec f_p holomorphe. Par construction,

$$z\psi_p'(z) = \frac{d}{dt}_{|t=1}\varphi_z^t(p) = zv(\varphi_z^1(p)) = zv(\psi_p(z)),$$

donc $\psi_p'(z) = v(\psi_p(z))$. Donc, identifiant $T_z\mathbb{C} = \mathbb{C}$, il vient

$$\begin{aligned} f_p(z) &= \langle \psi_p^*\omega(z), 1 \rangle = \langle \omega(\psi_p(z)), D\psi_p(z).1 \rangle \\ &= \langle \omega(\psi_p(z)), \psi_p'(z) \rangle \\ &= \langle \omega(\psi_p(z)), v(\psi_p(z)) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Donc $\psi_p^*\omega = dz$. Ensuite, considérons le chemin $c(t) = \psi_p(z + tw)$, il vérifie

$$\dot{c}(t) = w\psi_p'(z + tw) = wv(\psi_p(z + tw)) = wv(c(t)).$$

Donc $c(t) = \varphi_w^t(c(0))$, d'où $\psi_p(z + w) = \psi_{\psi_p(z)}(w)$. Donc si $\psi_p(z_1) = \psi_p(z_2)$, $\psi_p(z_1 + w) = \psi_p(z_2 + w)$ pour tout w. Donc

$$\Lambda := \{w \in \mathbb{C} \mid \psi_p(w) = \psi_p(0) = p\} = \psi_p^{-1}(\{p\})$$

est l'ensemble des périodes de ψ_p. C'est donc un sous-groupe de $\mathbb{C}$, discret puisque ψ_p n'est pas constante. De plus, ψ_p passe au quotient pour donner une application holomorphe injective $\overline{\psi}_p : \mathbb{C}/\Lambda \to X$.

Si p, q sont deux points de X, et si $\psi_p(z) = \psi_q(z_1) = r$, alors

$$(\forall w \in \mathbb{C}) \quad \psi_p(z + w) = \psi_r(w) = \psi_q(z_1 + w).$$

Donc les images $\psi_p(\mathbb{C})$, $p \in X$, sont disjointes ou confondues. Comme elles ont ouvertes et que X est connexe, elles sont confondues, donc chaque ψ_p est surjective. Donc $\overline{\psi}_p$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C}/\Lambda$ sur X, et on a encore $\overline{\psi}_p^*\omega = dz$, où cette fois dz est une forme sur $\mathbb{C}/\Lambda$. Comme X est compacte, Λ est un réseau.

Enfin, puisque $\overline{\psi}_p^*\omega = dz$, on a $\Lambda_\omega = \Lambda$. Et si γ est un chemin C^1 de p à q dans X, on a

$$[I]_p(q) = \Big[\int_\gamma \omega\Big] = \Big[\int_{\psi_p^{-1}(\gamma)} \overline{\psi}_p^*\omega\Big] = \Big[\int_{\overline{\psi}_p^{-1}(\gamma)} dz\Big] = \overline{\psi}_p^{-1}(q).$$

Corollaire. *Si X est une surface de Riemann compacte de genre un, son groupe d'automorphismes est transitif.*

11.3 Forme de Weierstrass, j-invariant

Nous avons vu que toute surface de genre un se représente comme une cubique lisse. Réciproquement :

Proposition. *Toute cubique lisse $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est de genre un.*

Démonstration. L'argument de la formule du genre montre que la différentielle $\omega = \dfrac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}}$ est holomorphe et non singulière. Donc $\deg(K_{X_P}) = 0$, donc X_P est de genre un.

D'après la section précédente, il existe donc $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts tels que X_P est isomorphe à $C_{a,b,c}$. Nous allons montrer qu'il existe un tel isomorphisme qui est de plus *projectif*, c'est-à-dire est la restriction d'un élément $\Phi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}) = \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, agissant sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ par le quotient de l'action de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^3$. De plus, nous allons décrire un invariant de biholomorphisme complet des cubiques lisses, donc des surfaces de Riemann compactes de genre un.

Définition. Une cubique $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est *sous forme de Weierstrass* si son équation est $y^2 = x^3 + px + q$ avec $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. Cette condition dit que le polynôme $x^3 + px + q$ est à racines simples, donc $C = C_{a,b,c}$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts avec $a + b + c = 0$. Donc C est lisse. On la notera $W_{p,q}$.

Théorème. *Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une cubique projective lisse.*

(i) Il existe $\Phi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ et $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $4p^3 + 27q^2 \neq 0$ et $\Phi(X_P) = W_{p,q}$.

(ii) Soient $W_{p,q}$ et $W_{p',q'}$ deux cubiques lisse sous forme de Weierstrass. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $W_{p,q}$ et $W_{p',q'}$ sont biholomorphes

2) $W_{p,q}$ et $W_{p',q'}$ sont équivalentes sous l'action de $\Phi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$

3) $\dfrac{p^3}{q^2} = \dfrac{p'^3}{q'^2} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\dfrac{4}{27}\}$

3') $1728\dfrac{4p^3}{4p^3 + 27q^2} = 1728\dfrac{4p'^3}{4p'^3 + 27q'^2} \in \mathbb{C}$. (le facteur 1728 sera expliqué plus tard)

Corollaire. *Il existe une unique bijection $[X] \mapsto j(X)$ entre les classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann compactes de genre un et $\mathbb{C}$, telle que*

$$j(W_{p,q}) = 1728\frac{4p^3}{4p^3 + 27q^2}.$$

Le nombre $j(X)$ est appelé le j-invariant *de X.*

Démonstration. (i) Montrons d'abord un

Lemme. *Toute courbe lisse $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 3$ a un* point d'inflexion*, c'est-à-dire un point p_0 tel que le contact entre la cubique et la droite projective tangente est au moins 3.*

Preuve du lemme. Soit $\widetilde{P}(x_0, x_1, x_2) = x_0^d P(\dfrac{x_1}{x_0}, \dfrac{x_2}{x_0})$ l'homogénéisé de P. On définit le *déterminant hessien* $H_P(x_0, x_1, x_2) = \det(D^2\widetilde{P}(x_0, x_1, x_2))$. Il est de degré $d-2$ donc non constant. Notons que si $g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$, on a $H_{P\circ g} = \det(g)(H_P \circ g)$.

Montrons que $p = [x_0 : x_1 : x_2] \in X_P$ est un point d'inflexion si et seulement si $H_P(x_0, x_1, x_2) = 0$. Quitte à remplacer P par $P \circ g^{-1}$ où $g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ envoie p sur $[1 : 0 : 0]$ (soit $(0, 0)$ en coordonnées non homogènes) et la tangente à p sur la droite $X_2 - X_0 = 0$ (soit $y = 0$ en coordonnées non homogènes), on peut supposer que $p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ et que sa tangente est $y = 0$. Alors, à un facteur constant non nul près,

$$P = y + ax^2 + bxy + cy^2 + R(x, y),$$

où les monômes de R sont de degrés ≥ 3. Le point $(0, 0)$ est d'inflexion si et seulement si $a = 0$. On a

$$\widetilde{P} = x_0^{d-1}x_2 + x_0^{d-2}(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) + x_0^3 S(x_0, x_1, x_2),$$

d'où

$$D^2\widetilde{P}(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d-1 \\ 0 & 2a & b \\ d-1 & b & 2c \end{pmatrix}.$$

Donc $H_P(1, 0, 0) = 2a(d-1)^2$, qui s'annule si et seulement si $a = 0$, cqfd.

Donc l'ensemble des points d'inflexion est $X_P \cap X_{H_P}$, lieu des zéros communs dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de deux polynômes homogènes non constants. D'après le théorème de Bézout (cf. [Fu] p.112), il est non vide.

Revenons à la preuve de (i). Soit p_0 un point d'inflexion de X_P. Quitte à remplacer X_P par $\Phi(X_P)$ avec $\Phi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ convenable, on peut supposer que $p = p_0 = [0 : 0 : 1]$, et que la tangente en p_0 à X_P est la droite à l'infini.

Dans la carte sur U_2 donnée par $(v, w) = (\dfrac{1}{y}, \dfrac{x}{y})$, on a $p_0 = (0, 0)$, la tangente est $v = 0$, et le fait qu'il y a un point d'inflexion se traduit par le fait que la composante de degré 2 de P_2 est divisible par v et celle de degré 3 contient w^3 avec un coefficient non nul, qu'on peut imposer égal à -1. On a donc

$$P_2(v, w) = (v + a_1vw + a_2v^2) - (w^3 + b_1vw^2 + b_2v^2w + b_3v^3),$$

soit en revenant aux coordonnées (x,y) :

$$P(x,y) = (y^2 + a_1xy + a_2y) - (x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3).$$

Remplaçant y par $y + \frac{1}{2}(a_1x + a_2)$, on peut supposer $a_1 = a_2 = 0$. Puis remplaçant x par $x + \frac{1}{3}b_1$, on peut supposer $b_1 = 0$. Posant $(p,q) = (b_2, b_3)$, on a $X_P = W_{p,q}$, avec $4p^3 + 27q^2 \neq 0$ puisque X_P est lisse.

(ii) L'équivalence de 3) et 3') est claire. Montrons l'implication de 3) sur 2) : si 2) est vrai, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $p' = \alpha^4 p$, $q' = \alpha^6 q$. Alors $(x,y) \mapsto (\alpha^2 x, \alpha^3 y)$ donne un isomorphisme projectif de $W_{p,q}$ sur $W_{p',q'}$. L'implication de 2) sur 1) est triviale. Reste à prouver que 1) implique 3).

Supposons donc qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : W_{p,q} \to W_{p',q'}$. Puisque le $\mathrm{Aut}(W_{p',q'})$ est transitif, on peut supposer $\varphi(p_0) = p_0$ où $p_0 = [0:0:1]$.

Les fonctions méromorphes x et $x \circ \varphi : W_{p,q} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont de degré 2 et ont un pôle double au point p_0. Donc il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $x\varphi - ax\circ$ a au plus un pôle simple en p_0, et est holomorphe ailleurs. Elle est forcément constante car sinon $W_{p,q}$ serait de genre 0, donc

$$x \circ \varphi = ax + b.$$

De même, y et $y \circ \varphi$ sont de degré 3 et ont un pôle triple en p_0, donc il existe $c \in \mathbb{C}^*$, $d, e \in \mathbb{C}$ tels que

$$y \circ \varphi = cy + dx + e.$$

Donc $W_{p',q'} = \Phi(W_{p,q})$ où Φ est l'automorphisme projectif $\Phi(x,y) = (ax+b, cy+dx+e)$. Ceci prouve déjà 2). Ensuite, le fait que X_P détermine P à un facteur près dit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$(cy + dx + e)^2 - ((ax+b)^3 + p'(ax+b) + q') = \lambda(y^2 - (x^3 + px + q)).$$

Comparant les coefficients de y^2 et x^3, on a $\lambda = c^2 = a^3$. Les coefficients de xy et de y donnent $d = e = 0$, celui de x^2 donne $b = 0$. Enfin, les coefficients de x et de 1 donnent $p' = a^2p, q' = a^3q$, donc $\dfrac{p'^3}{q'^2} = \dfrac{p^3}{q^2}$.

Preuve du corollaire. Toute surface de Riemann X compacte de genre un est isomorphe à une cubique $W_{p,q}$. De plus, d'après l'équivalence de 1) et de 3'), le nombre $j(p,q) = 1728\dfrac{4p^3}{4p^3 + 27q^2}$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de X, et caractérise cette classe d'isomorphisme.

Enfin, si $w \in \mathbb{C}$ est quelconque, il existe $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $4p^3 + 27q^2 \neq 0$ et $j(p,q) = w$: si $w = 0$, on pose $(p,q) = (0,1)$, et si $w \neq 0$ on pose $p = 1$ et $q =$ une racine carrée de $\frac{4}{27}((1728w)^{-1} - 1)$.

11.4 Courbes elliptiques, loi de groupe

Définition. Une *courbe elliptique* (sur $\mathbb{C}$) est un couple (X, p_0) où X est une surface de Riemann compacte de genre un et $p_0 \in C$.

Si ω est une différentielle holomorphe non nulle, l'application $[I_p]$ est un isomorphisme de X sur $\mathbb{C}/\Lambda_\omega$, qui permet de transporter la structure de groupe de $\mathbb{C}/\Lambda_\omega$ à X. Comme toutes les différentielles holomorphes sont des multiples constants de ω, cette structure de groupe sur X est canonique. Elle fait de X un *groupe de Lie complexe*, c'est-à-dire que les opérations de mulitplication et de passage à l'inverse sont holomorphes.

Autre description de la structure de groupe. Si $p, q \in X$, le diviseur $p + q - p_0$ est de degré $1 = 2g - 1$, donc $\ell(p + q - p_0) = 1$ c'est-à-dire qu'il existe une fonction méromorphe, unique à un facteur près, telle que $\mathrm{div}(f) + p + q - p_0 \geq 0$, soit

$$\mathrm{div}(f) + p + q - p_0 = r \in X.$$

On note $r = p \oplus q$, ce qui définit une loi commutative sur X, avec p_0 pour élément neutre. Autrement dit, $p \oplus q$ est caractérisé par la propriété $[p \oplus q] = [p + q - p_0] \in \mathrm{Pic}(X)$.

Notons $\mathrm{J}(X)$ le sous-groupe $\mathrm{Div}_0(X)/\mathrm{Divprinc}(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$, appelé *jacobienne* de X *(cette définition est valable pour une courbe de genre quelconque, on obtient alors un tore $\mathbb{C}^g/\Lambda$)*. On a une application naturelle

$$\varphi : p \in X \mapsto [p - p_0] \in \mathrm{J}(X),$$

qui est bijective. En effet, si $[p - p_0] = [q - p_0]$, on a $[p - q] = 0$, donc $q = q$, puisque sinon il existerait une fonction méromorphe ayant uniquement un pôle simple. Donc φ est injective. Et φ est surjective, puisque si D est un diviseur de degré 0, $p_0 + D$ est de degré 1 donc il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $\mathrm{div}(f) + p_0 + D \geq 0$, soit $\mathrm{div}(f) + p_0 + D = p \in X$, soit $[p - p_0] = D$. Par construction, on a

$$\varphi(p \oplus q) = [(p \oplus q) - p_0] = [p - p_0 + q - q_0] = \varphi(p) + \varphi(q).$$

Donc $(X, \oplus)$ est un groupe et φ est un isomorphisme de groupes de X sur $\mathrm{J}(X)$. Noter que l'élément neutre de $\oplus$ est p_0.

Théorème (Abel-Jacobi). *Soit ω une différentielle holomorphe non nulle sur X. Le biholomorphisme d'intégration $[I]_{p_0} : X \to \mathbb{C}/\Lambda_\omega$ est un isomorphisme des groupes $(X, \oplus)$ et $(\mathbb{C}/\Lambda, +)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que c'est un homomorphisme. Soient $p, q, r \in X$, il s'agit de montrer que si $p + q \sim r + p_0$, alors $[I]_{p_0}(p) + [I]_{p_0}(q) = [I]_{p_0}(r)$. Cela revient à montrer que si f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et Λ-périodique, avec $f^{-1}(\{0\}) = \{p, q\} + \Lambda$ (zéros simples), $f^{-1}(\{\infty\}) = \{p_0, r\} + \Lambda$ (pôles simples), alors $p + q - p_0 - r \in \Lambda$.

On peut supposer que p, q, r, p_0 sont dans l'intérieur d'un parallélogramme fondamental $D = \mathrm{conv}(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$. Par le théorème des résidus,

$$p + q - r - p_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \frac{df}{f} = -\lambda_2 \int_0^{\lambda_1} \frac{df}{2\pi i f} + \lambda_1 \int_0^{\lambda_2} \frac{df}{2\pi i f}.$$

Les deux intégrales sont entières puisque f est Λ-périodique, cqfd.

11.5 Loi de groupe sur une cubique lisse

Proposition. *Soit $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique lisse de degré $d \geq 2$. Toute droite projective $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ coupe X en d points, comptés avec multiplicités, où par définition la multiplicité $(X.L)_p$ est l'ordre de contact de L et de X.*

Démonstration. D'après la version faible de Bézout, $X \cap L$ est fini, donc il existe une droite L_0 disjointe de $X \cap L$. Faisant agir $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$, on peut supposer $L_0 = \mathbb{P}^1_\infty$. Puis faisant agir $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{C}) \subset \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$, on peut supposer que L est l'axe des x. Si $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est une équation de $\mathbb{C}$, la propriété $X \cap L \cap \mathbb{P}^1_\infty = \emptyset$ dit que P contient un terme en x^d.

Donc $P(x, 0)$ est de degré d. Il a donc d racines comptées avec multiplicités. Si x_0 est une telle racine, de multiplicité $k \geq 1$, on a $p = (x_0, 0) \in X \cap L$. Il y a deux cas :

- $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, 0) \neq 0$: alors X a une équation locale $y = a(x - x_0)^k(1 + o(1))$, donc $(X.L)_p = k$.
- $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, 0) = 0$: alors $k = 1$ puisque la courbe est lisse, donc X a une équation locale $x - x_0 = f(y)$. Donc $(X.L)_p = 1 = k$.

Donc $(X.L)_p$ est la multiplicité de x_0, d'où $\displaystyle\sum_{p \in X \cap L} (X.L)_p = d$, qcfd.

Diviseur d'intersection. On pose $X.L = \displaystyle\sum_{p \in X \cap L} (X.L)_p(p) \in \mathrm{Div}(X)$, appelé *diviseur d'intersection* de X et de L.

Proposition. *La classe $[X.L] \in \mathrm{Pic}(X)$ ne dépend que de X.*

Démonstration. Soient L et L' deux droites projectives. On peut supposer que $X \cap L$ et $X \cap L'$ sont disjoints de $\mathbb{P}^1_\infty$, et que X est transverse à $\mathbb{P}^1_\infty$. Soient $f_L = ax + by + c$ et $f_{L'} = a'x + b'y + c'$ des équations de $L \cap \mathbb{C}^2$ et $L' \cap \mathbb{C}^2$, de sorte que $f_L|X$ et $f_{L'}|X$ sont des fonctions méromorphes non constantes.

Si $p \in X \cap L$, on a $(X.L)_p = \deg_p(f_L|X)$: en effet, $(X.L)_p = k$ équivaut à l'existence de coordonnées holomorphes locales (t, u) telles que $P = u$ et $f_L(t, 0) = t^k$. Alors $t|X$ est une carte centrée sur X telle que $f_L|X = (t|X)^k$, donc $\deg_p(f_L|X) = k$.

Par ailleurs, si $p \in X \cap \mathbb{P}^1_\infty$, les propriétés ($p \notin L$ et X est transverse à $\mathbb{P}^1_\infty$) impliquent que $f_L|X$ a un pôle simple en p. Donc $X.L = \mathrm{div}(f_L|X) + X.\mathbb{P}^1_\infty$. De même, $X.L' = \mathrm{div}(f_{L'}|X) + X.\mathbb{P}^1_\infty$, donc $X.L - X.L' = \mathrm{div}(f_L|X) - \mathrm{div}(f_{L'}|X)$, cqfd.

Description géométrique de la loi de groupe sur une cubique lisse. Soit $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une cubique lisse. On fixe un point $p_0 \in X$, donc (X, p_0) est une courbe elliptique. Si p et q sont deux points de X, on définit $L_{p,q}$ la droite projective passant par p et q, $L_{p,p}$ étant la droite projective tangente en p. Il existe alors un unique point $s \in X$ tel que

$$X.L_{p,q} = p + q + s.$$

Autrement dit, s est le troisième point d'intersection de X et de L, en comptant les multiplicités. De même, il existe un unique point $r \in X$ tel que

$$X.L_{p_0,s} = p_0 + s + r.$$

On définit une loi de composition $\oplus'$ sur X par $p \oplus' q = r$. Puisque $[X.L_{p,q}] = [X.L_{p_0,s}]$, il vient $[p+q+s] = [p_0 + s + r] \in \mathrm{Pic}(X)$, donc $[r] = [p + q - p_0] = [p \oplus q]$, où $\oplus$ est la loi de groupe définie à la section précédente. Donc $\oplus' = \oplus$: la loi de composition $\oplus'$ est donc une loi de groupe, et c'est la même que celle définie abstraitement.

Remarque. On peut prouver «à la main» l'associativité de cette loi, mais ce n'est pas trivial, cf. par exemple [Kn] pp. 67-74.

11.6 Réalisation d'un tore complexe de dimension un comme cubique lisse

Tout tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$ de dimension un est de genre un puisque dz est une 1-forme holomorphe non singulière, donc se réalise comme cubique lisse. Nous en donnons une réalisation explicite.

Définition. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. La *fonction* $\wp_\Lambda$ *de Weierstrass* est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ définie par

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}.$$

Elle est bien définie et holomorphe car $\dfrac{1}{(z+\omega)^2} - \dfrac{1}{\omega^2} = O(|\omega|^{-3})$ uniformément sur le complémentaire de tout ϵ-voisinage de Λ et que la série $S_a = \sum_{\omega \in \Lambda} |\omega|^{-a}$ converge pour $a > 2$ comme l'intégrale de $|z|^{-a}$. Pour le voir, on peut remarquer que le nombre c_n de points de Λ de norme comprise entre n et $n+1$ est $\leq Cn$, d'où $S_a \leq C \sum n^{1-a}$. Il est clair que $\wp_\Lambda$ est périodique par rapport à Λ et a un pôle double en chaque point de Λ. Elle induit donc une fonction méromorphe que nous noterons y sur $\mathbb{C}/\Lambda$, avec un pôle double en $p_0 = [0]$.

La dérivée de $\wp_\Lambda$ s'obtient en dérivant chaque terme : $\wp'_\Lambda(z) = -\sum_{\lambda \in \Lambda} \dfrac{2}{(z+\omega)^3}$. Elle induit une fonction méromorphe x sur $\mathbb{C}/\Lambda$, avec un pôle triple en p_0. Notons $x = \wp_\Lambda$, $y = \wp'_\Lambda$, et cherchons une relation linéaire entre les fonctions $1, x, x^3, y^2$. Près de 0, on a, puisque x est paire en z :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + o(z^4) \\ y &= -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + o(z^4). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} y^2 - 4x^3 &= (\frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + o(1))^2 - 4(\frac{1}{z^6} + \frac{3a}{z^2} + 3b + o(1))^3 \\ &= -20\frac{a}{z^2} - 28b + o(1). \end{aligned}$$

Donc $y^2 - 4x^3 + 20ax + 28b = o(1)$, la relation cherchée est donc $y^2 = 4x^3 - 20ax - 28b$. Reste à calculer a et b. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{\omega^2} \left((1 + (\frac{z}{\omega}))^{-2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(-2\frac{z}{\omega} + 3(\frac{z}{\omega})^2 - 4(\frac{z}{\omega})^3 + 5(\frac{z}{\omega})^4 + o((\frac{z}{\omega})^4) \right) \\ &= -2\frac{z}{\omega^3} + 3\frac{z^2}{\omega^4} - 4\frac{z^3}{\omega^5} + 5\frac{z^4}{\omega^6} + o(\frac{z^4}{\omega^6}). \end{aligned}$$

En sommant sur $\omega \in \Lambda \setminus \{0\}$ les second et quatrième terme, il vient $a = 3G_2(\Lambda)$, $b = 5G_3(\Lambda)$ où

$$G_k(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}.$$

Finalement, on a l'équation de Weierstrass $y^2 = 4x^3 - 60G_2(\Lambda)x - 140G_3(\Lambda)$, qu'on écrit traditionnellement sous la forme

$$y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda).$$

Ceci définit une cubique X dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (irréductible, mais peut-être singulière), isomorphe via $(x,y) \mapsto (x, \frac{1}{2}y)$ à $W_{p,q}$ avec $p = -\frac{1}{4}g_2(\Lambda)$, $q = -\dfrac{1}{4}g_3(\Lambda)$, donc

$$\frac{4p^3}{4p^3 + 27q^2} = \frac{-g_2(\Lambda)^3}{-g_2(\Lambda)^3 + 27g_3(\Lambda)^2} = \frac{g_2(\Lambda)^3}{g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2}.$$

L'application $\varphi = (x,y)$ donne une application holomorphe de $\mathbb{C}/\Lambda$ dans X. En effet, près du pôle on a

$$[1 : x : y] = [1 : z^{-2} + o(z^{-2}) : 2z^{-3} + o(z^{-3})] = [z^3 : z + o(z) : 1 + o(1)]$$

qui s'étend holomorphiquement en envoyant 0 sur $p_0 = [1 : 0 : 0]$ le point à l'infini de X.

Cette application se relève en une application holomorphe $\widehat{\varphi}$ de $\mathbb{C}/\Lambda$ dans la désingularisée $\widehat{X}$. Enfin, p_0 est un point lisse de X et il a une unique image réciproque, qui est un point régulier de φ. Donc $\widehat{\varphi}$ est de degré un, ce qui prouve que X est lisse (sinon, $\widehat{X}$ serait de genre 0 par la formule du genre), soit $g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2 \neq 0$, et que φ est un biholomorphisme.

Explication du facteur 1728. Soit $X_\tau = \mathbb{C}\Lambda_\tau$, où Λ_τ est le réseau $\langle 1, \tau \rangle$ avec $\tau \in \mathbb{H}$. On a $\Lambda_{\tau+1} = \Lambda_\tau$, donc $j(\Lambda_\tau) = \widetilde{j}(q)$ où $q = \exp(2\pi i \tau) \in \Delta^*$ et $\widetilde{j}$ est une fonction définie sur Δ^*. La formule

$$j(\mathbb{C}/\Lambda) = 1728 \frac{g_2(\Lambda)^3}{g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2}$$

montre que $j(\Lambda_\tau)$ est holomorphe en τ, donc $\widetilde{j}$ est holomorphe. Donc on a un développement en série de Laurent $\widetilde{j}(q) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n$. En fait, $\widetilde{j}$ a un pôle simple en 0, et le choix du coefficient 1728 assure que le résidu est 1 et que les a_n sont entiers (cf. [Se1], p.146) :

$$\widetilde{j}(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$$

Bibliographie

[Ah] L.V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mapping*, second edition, Univ. Lect. Series 38, Amer. Math. Soc., 2006.

[Br-K] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, traduit de l'allemand, Birkhäuser, 1986.

[C] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe. Tome 2, fonctions de plusieurs variables*, traduit du russe, Mir, 1990.

[Fa] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 71, Springer 1980.

[For] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 81, Springer 1981.

[Go] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.

[Gr-Ha] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.

[Hu] J.H. Hubbard, *Teichmüller theory*, vol. 1, Matrix Editions, 2006.

[Kl] F. Klein, *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, traduit de l'allemand, Dover, 1963 et réimpressions fréquentes.

[Kn] A.W. Knapp, *Elliptic curves*, Princeton Math. Notes 40, 1992.

[Ko] J. Kollar, *Lectures on Resolution of Singularities*, Princeton Ann. of Math. Stud. 166, 2007.

[Mi1] J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 272-280. In Collected papers IV, Amer. Math. Soc., 2009, pp. 35-43.

[Mi2] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University of Virginia Press, 1965.

[Mi3] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton Annals of Math. Studies 61, 1968.

[R] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Math. 77, Birkhäuser, 1989.

[SG] H.-P. de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann - Retour sur un théorème centenaire*, ENS Éditions, 2010.

[Se1] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1959.

[Se2] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Springer Lect. Notes in Math., 1500, 1991 (originellement publié en 1965).

[Se3] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, 1970.

[Si] L. Siegel, *Topics in complex function theory*, traduit de l'allemand, vol. I Elliptic functions and uniformization theory, Addison- Wesley, 1969.

[Sp] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 1, Publish or Perish, 1970. Nouvelle édition, 2005.

[W] H. Weyl, *The concept of a Riemann surface*, translated from the German, Third edition, Addison-Wesley 1955. Fréquentes réimpressions Dover.

[Zy] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Second edition, reprinted with corrections and some additions, Volume I, Cambridge Univ. Pres, 1959.