TD 1 : premiers exemples

Exercice 1. Biholomorphismes. Soit X et Y deux surfaces de Riemann. Montrer qu'une fonction $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un biholomorphisme si et seulement si c'est une bijection holomorphe.

Exercice 2. Sphère de Riemann. On rappelle que la *sphère de Riemann* est l'ensemble $\mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de l'atlas $\{(\mathbb{C}, \mathrm{id}), (\mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}, z \mapsto 1/z)\}$. C'est une surface de Riemann compacte (difféomorphe à la sphère).

1. Si f est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann X dont l'ensemble des pôles est P, on définit $\widetilde{f} : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{C}}$ par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \notin \mathrm{P}$ et $f(x) = \infty$ pour $x \in \mathrm{P}$. Montrer que $f \mapsto \widetilde{f}$ définit une bijection entre l'ensemble $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ des fonctions méromorphes sur X et l'ensemble $\mathrm{Hol}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$ des fonctions $\mathrm{X} \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorphes (et non identiquement égales à ∞). À partir de maintenant, on identifiera $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ à cette partie de $\mathrm{Hol}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{C}})$.
2. Si $p \in \mathrm{X}$ et $f \in \mathscr{M}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Hol}(\mathrm{X}, \overline{\mathbb{C}})$ sont tels que $f(p) = \infty$, que vaut $\deg_p(f)$?
3. Montrer que $\mathscr{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\mathrm{T})$ et déterminer $\mathscr{O}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$.

Exercice 3. Automorphismes. Le but de cet exercice est de déterminer les groupes d'automorphismes (*i.e.* de biholomorphismes) de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, de la droite $\mathbb{C}$ et du disque $\mathbb{D}$.

1. Soit $f \in \mathbb{C}(\mathrm{T}) = \mathscr{M}(\overline{\mathbb{C}})$ non constante, $\mathrm{P} = f^{-1}[\{\infty\}]$ l'ensemble de ses pôles et $\mathrm{Z} = f^{-1}[\{0\}]$ celui de ses zéros. Montrer que P et Z sont finis et déterminer $\displaystyle\sum_{p \in \mathrm{P}} \deg_p(f)$ et $\displaystyle\sum_{z \in \mathrm{Z}} \deg_z(f)$.
2. En déduire que tout automorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$ s'écrit sous la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ (on dit que c'est une *homographie*).
3. On note $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ le quotient du groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ par son centre $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})) = \left\{\lambda \mathrm{id} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C}^*\right\}$. Montrer que $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.
4. Montrer $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{z \mapsto az+b \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\right\}$.
5. À l'aide du lemme de Schwarz, montrer qu'un automorphisme de $\mathbb{D}$ fixant 0 est une rotation.
6. En déduire $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{z \mapsto u\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \,\middle|\, |u| = 1, a \in \mathbb{D}\right\}$.

Exercice 4. Uniformisation du demi-plan.

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} = \{\mathrm{Im}\, z > 0\} & \to & \mathbb{D} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$ est un biholomorphisme.
2. Déduire de l'exercice et de la question précédents le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{H}]$.

Exercice 5. Modules des anneaux. On appelle *anneau rond* tout domaine de la forme

$$C(r_1, r_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, r_1 < |z| < r_2 \right\},$$

où $0 \leqslant r_1 < r_2$. Le *module* d'un tel anneau est le réel $\log(r_2/r_1)$ (ou $+\infty$ si $r_1 = 0$).

1. Montrer que deux anneaux (ronds) de même module sont conformément équivalents (c'est-à-dire qu'il existe un biholomorphisme entre eux).
2. En utilisant le principe de réflexion de Schwarz, démontrer que tout biholomorphisme $f : C(r, 1) \to C(r', 1)$ s'étend en un biholomorphisme $\widetilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.
3. En déduire que deux anneaux ronds sont biholomorphes si et seulement s'ils ont même module.