TD 2

Exercice 1. Formes différentielles et $\mathbb{C}$-linéarité. On rappelle que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, dont $(dx = \text{Ré}, dy = \text{Im})$ et $(dz = dx + i dy, d\overline{z} = dx - i dy)$ sont deux bases.

1. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ lisse (U est un ouvert de $\mathbb{C}$) et $z \in \mathrm{U}$. Sa différentielle est une application $\mathbb{R}$-linéaire $d_z f : \mathrm{T}_z\mathrm{U} \simeq \mathbb{C} \to \mathrm{T}_{f(z)}\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$. La décomposer dans les deux bases évoquées dans le préambule.
2. Exprimer $dz \wedge d\overline{z}$ et $dx \wedge dy$ l'un en fonction de l'autre.
3. Que sont les 1-formes différentielles réelles, les 1-formes différentielles complexes, les 1-formes différentielles complexes de type $(1,0)$ et les différentielles holomorphes sur $\mathbb{C}$?
4. En considérant l'atlas standard à deux cartes, montrer que la seule différentielle holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ est la forme nulle.
5. Pour tout entier $k \geqslant 0$, construire une forme méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ n'ayant qu'un pôle, d'ordre k, en 0 ou démontrer que c'est impossible.

Exercice 2. Revêtement. Si $\widetilde{\mathrm{X}}$ et X sont deux surfaces de Riemann, une application $p : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ est un revêtement si tout point $x \in \mathrm{X}$ admet un voisinage ouvert $x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ tel que l'image réciproque $\mathrm{V} = p^{-1}[\mathrm{U}]$ est une union disjointe (finie ou dénombrable) d'ouverts $\mathrm{V} = \bigsqcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{V}_i$ pour lesquels les applications restreintes $p_{|\mathrm{V}_i} : \mathrm{V}_i \to \mathrm{U}$ sont des homéomorphismes. Par connexité, le cardinal de I ne dépend pas du point y considéré et on l'appelle le *degré* ou *le nombre de feuillets* du revêtement.

1. Soit $k \geqslant 2$. Montrer que $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^k \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \exp z \end{array}$ sont des revêtements mais que $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^k \end{array}$ n'en est pas un.
2. Soit $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann. Montrer que si p a un point critique, ce n'est pas un revêtement et que si X est compacte et que p n'a pas de point critique, c'est un revêtement.
3. Donner des exemples justifiant qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse de compacité dans l'énoncé précédent.
4. Soit X une surface de Riemann. Soit Γ un sous-groupe du groupe Aut(X) des biholomorphismes de X. On suppose qu'il *agit proprement et sans point fixe*, c'est-à-dire que tout point $x \in \mathrm{X}$ admet un voisinage ouvert U dont les translatés $(g(\mathrm{U}))_{g\in \mathrm{G}}$ sont disjoints. Montrer qu'alors X/G est une surface de Riemann et que la projection canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{G}$ est un revêtement holomorphe.
5. Soit $\widetilde{\mathrm{X}}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et Γ un groupe agissant sur $\widetilde{\mathrm{X}}$ comme à la question précédente. On a donc un revêtement holomorphe $p : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. Montrer que toute application holomorphe $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *se relève à* $\widetilde{\mathrm{X}}$, c'est-à-dire qu'il existe $\widetilde{f} : \mathrm{U} \to \widetilde{\mathrm{X}}$ telle que $f = p \circ \widetilde{f}$.

Exercice 3. Modules des tores. Soit Γ et Λ deux réseaux.

1. Soit $f : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Lambda$ un biholomorphisme. Montrer qu'il existe $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que le diagramme suivant commute (les flèches verticales sont les projections canoniques) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\ \mathbb{C}/\Gamma \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Lambda \end{tikzcd}$$

2. Montrer qu'un tel $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est nécessairement un biholomorphisme tel que $f(\Lambda) = \Gamma$.
3. En déduire que deux tores $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Gamma$ sont holomorphes si et seulement si les réseaux Λ et Γ sont images l'un de l'autre par une similitude directe.
4. Montrer que tout réseau est semblable à un réseau $\langle 1, \tau \rangle$ avec $\tau \in \mathbb{H}$ et que deux réseaux $\langle 1, \tau \rangle$ et $\langle 1, \tau' \rangle$ sont semblables si et seulement si

$$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) : \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

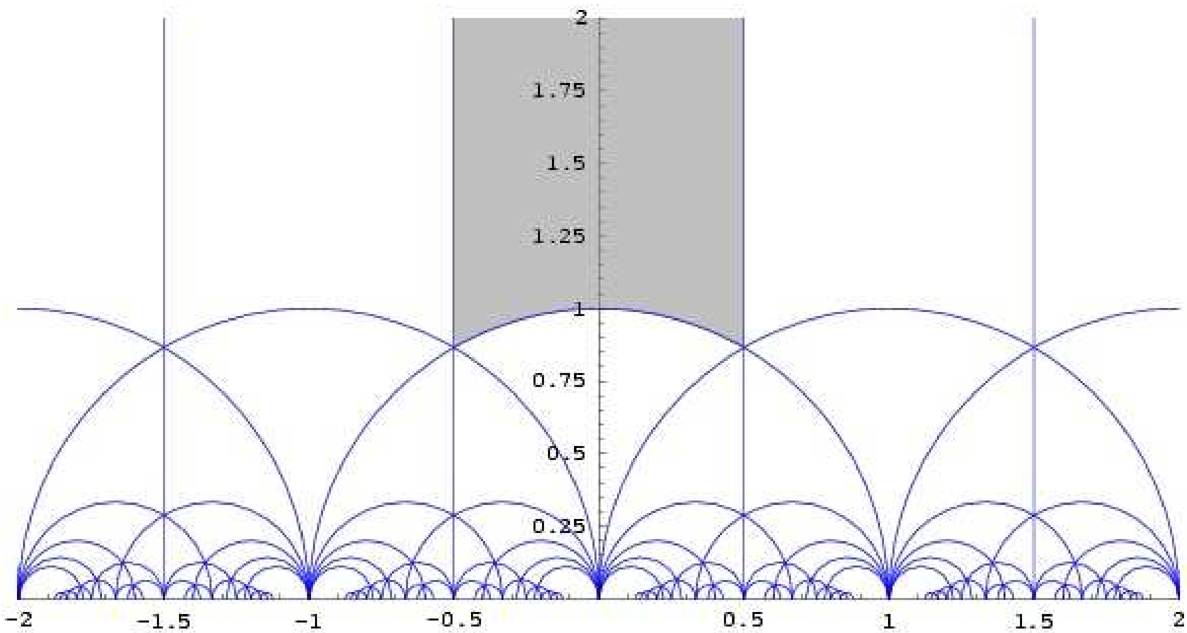

FIGURE 1 – Domaine fondamental de l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ (tiré de `wikipedia`).

Exercice 4. Deux uniformisations explicites.

– (*Uniformisation de la bande*) Montrer que $z \mapsto \operatorname{th} z$ définit un biholomorphisme de la bande $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im} z| < \pi/4 \right\}$ sur $\mathbb{D}$.

– (*Fonction de Žukóvskij*) Montrer que $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ définit un biholomorphisme de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.