TD 4

Exercice 1. Courbes rationnelles dans le tore.

Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $\mathbb{C}/\Lambda \to \overline{\mathbb{C}}$ non constante mais que toute fonction holomorphe $\overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}/\Lambda$ est constante. (*Indication :* on pourra essayer de relever l'application en une application holomorphe $\overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.)

Exercice 2. Surface de Riemann d'un germe de fonctions.

1. Construire une surface de Riemann X, munie d'une application holomorphe $p : \mathrm{X} \to \mathbb{C}^*$ et d'une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathrm{X})$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left\{ f(\tilde{z}) \,\middle|\, p(\tilde{z}) = z \right\}$ soit l'ensemble des « logarithmes » de z, c'est-à-dire l'image réciproque de z par l'exponentielle. On l'appelle *surface de Riemann du logarithme*.
2. Soit $n \geqslant 1$. Construire une surface de Riemann X, munie d'une application holomorphe p : $\mathrm{X} \to \mathbb{C}$ et d'une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathrm{X})$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left\{ f(\tilde{z}) \,\middle|\, p(\tilde{z}) = z \right\}$ soit l'ensemble des « racines n-ièmes » de z, c'est-à-dire l'image réciproque de z par $w \mapsto w^n$. On l'appelle *surface de Riemann de* $\sqrt[n]{\ }$.

   La suite de l'exercice vise à généraliser cette construction.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Une *fonction définie au voisinage de* z est un couple (U, f) où U est un voisinage ouvert de z et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est une application holomorphe. Montrer que la relation « coïncider sur un voisinage de z » est une relation d'équivalence sur l'ensemble de ces fonctions. Par définition, un *germe de fonction en* x est une classe d'équivalence pour cette relation.
4. Montrer que l'ensemble $\mathscr{O}_x$ de ces germes est naturellement muni d'une structure d'anneau. Si vous savez ce que c'est, montrer qu'il est à valuation discrète (et donc *local*) et trouvez-en une *uniformisante*. À quoi cet anneau est-il isomorphe ?

   On note $\mathscr{G} = \bigsqcup_{x \in \mathbb{C}} \mathscr{O}_x$ l'ensemble des germes de fonctions en un point du plan. Il est donc muni d'une application surjective $p : \mathscr{G} \to \mathbb{C}$ qui associe à un germe de fonction le point où ce germe est défini.
5. Si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$, on note $f_x \in \mathscr{O}_x$ le germe qu'elle définit. Montrer que la topologie engendrée par les
$$\mathscr{U}(\mathrm{U}, f) = \left\{ f_x \in \mathscr{O}_x \,\middle|\, x \in \mathrm{U} \right\}$$
   rend la fonction $p : \mathscr{G} \to \mathbb{C}$ continue et induit des homéomorphismes locaux entre $\mathscr{G}$ et $\mathbb{C}$.
6. Montrer que cette topologie sur $\mathscr{G}$ est séparée.
7. En déduire que la composante connexe $\mathscr{S}(f_x)$ de $\mathscr{G}$ qui contient un germe $f_x \in \mathscr{O}_x$ est munie d'une structure de surface de Riemann. C'est la *surface de Riemann du germe* f_x.
8. Faire le lien entre cette construction et les deux exemples du début de l'exercice.

Exercice 3. Formule de Poisson. Soit $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique sur $\mathbb{D}$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{D}, u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1-|a|^2}{|z-a|^2} u(z) dz.$$

Exercice 4. Lemme de Weyl.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. On suppose que u est *harmonique au sens des distributions*[1], c'est-à-dire que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \iint u(x) \Delta \varphi(x) = 0,$$

où $\mathscr{D}(\Omega)$ désigne comme d'habitude l'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω. Le *lemme de Weyl* affirme qu'alors u est lisse et harmonique au sens usuel. Le but de cet exercice est de démontrer ce résultat.

1. Soit K un compact dans Ω et V un voisinage compact de K. Soit enfin $k, l \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que
$$\forall z \in \mathrm{K}, \left| \partial^{(k,l)} u(z) \right| \leqslant \mathrm{C} \|u\|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{V})}.$$
2. Déduire du résultat précédent que si une suite de fonctions harmoniques converge uniformément sur les compacts de Ω, sa limite est encore harmonique.
3. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que si une suite de fonctions harmoniques sur Ω est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$, elle admet une valeur d'adhérence harmonique pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.
4. Soit $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ une fonction positive d'intégrale 1. On définit les approximations $(u_h)_{h>0}$ par la formule
$$u_h(z) = \frac{1}{h^2} \iint_{\mathbb{C}} \rho \left(\frac{z-\zeta}{h} \right) u(\zeta) d\mathrm{Leb}(\zeta).$$
Montrer que les u_h sont lisses et harmoniques, et que u_h converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, lorsque $h \to 0$, vers u.
5. Conclure la preuve du lemme de Weyl.

Exercice 5. Fonction à un point critique. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe propre telle que $\mathrm{Crit}(f) = \{0\}$ et $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $|\lambda| = 1$ tels que $f(z) = \lambda z^k$.

---

1. Dès que l'on fait de l'analyse complexe avec des distributions, on prendra particulièrement soin de distinguer Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), pionnier allemand de l'analyse complexe à qui l'on doit notamment les lemmes de Schwarz, le principe de réflexion de Schwarz et l'inégalité de Cauchy-Schwarz de Laurent Schwartz (1915-2002, médaille Fields 1950), le mathématicien français qui inventa les distributions.