TD 6

Exercice 1. Un exemple. Déterminer les singularités (dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) de la courbe plane d'équation $y^2 = x^2(x+1)$.

Exercice 2. Désingularisation du point double ordinaire. On considère pour $\varepsilon \in [0,+\infty[$ l'ensemble $V_\varepsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, xy = \varepsilon\right\}$.

1. Démontrer que pour $\varepsilon > 0$, V_ε est une sous-variété complexe de dimension 1 de $\mathbb{C}^2$. À quoi est-elle biholomorphe ?
2. Démontrer que le module [1] de $V_\varepsilon \cap B(0,1)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0.
3. Montrer que l'équation $xy = \varepsilon$ définit dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe lisse, biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.
4. À quoi est homéomorphe l'adhérence de V_0 dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?

Exercice 3. *Singular points of complex hypersurfaces*, le trailer. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe à deux variables. On suppose que $\mathrm{Crit}(f)$ a un point isolé en $(0,0)$. On définit l'ensemble $V = f^{-1}\{0\}$.

1. Démontrer que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $K = V \cap S_\varepsilon$ est une sous-variété réelle de dimension 1 de $S_\varepsilon = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z|^2 + |w|^2 = \varepsilon^2\right\}$.
2. Déterminer K quand f est un produit de termes linéaires : $f = l_1 \dots l_n$, avec $l_i \in (\mathbb{C}^2)^*$ disjoints. Le dessiner dans le cas $f(z,w) = zw$.
3. On se place maintenant dans le cas particulier $f(z,w) = z^p + w^q$ où p et q sont des entiers premiers entre eux et au moins égaux à 2 (*singularité de Brieskorn*).
4. Donner un paramétrage de K et le dessiner dans le cas $p = 2$, $q = 3$.
5. Démontrer que si $\varepsilon < \varepsilon'$, les variétés $K = V \cap S_\varepsilon$ et $K' = V \cap S_{\varepsilon'}$ sont difféomorphes et que $(V \cap B(0,\varepsilon)) \setminus \{0\}$ est difféomorphe à $K \times]0,1[$.
6. Démontrer que l'application $\pi : S_\varepsilon \setminus K \to S^1$ qui associe à un point p l'argument de $f(p)$ n'a pas de points critiques.
7. Quelle allure ont les niveaux de π au voisinage de K ?

---

1. On rappelle que le *module* d'une surface de Riemann biholomorphe à l'anneau standard $C(r,R) = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, r < |z| < R\right\}$ (avec $0 \leqslant r < R < \infty$) est $\log(R/r) \in]0,+\infty]$.