TD 7

Exercice 1. Théorème de Lüroth.

1. Soit X une surface de Riemann et $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathrm{X}$ une fonction holomorphe non constante. Montrer que X est biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Faire le lien avec le théorème de Lüroth : « Soit L un sous-corps de $\mathbb{C}(z)$ tel que l'extension $\mathbb{C}(z)/\mathrm{L}$ soit finie. Alors il existe $f \in \mathbb{C}(z)$ tel que $\mathrm{L} = \mathbb{C}(f)$. »

Exercice 2. Groupes d'automorphismes.

1. Soit k un corps. Montrer que $\mathrm{PGL}(2,k)$ agit exactement 3-transitivement sur la *droite projective* $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$. Qu'en déduire sur $\overline{\mathbb{C}}$?
2. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ agit transitivement sur $\mathbb{D}$. Déterminer $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{D})}(0)$.
3. En déduire qu'il existe une unique métrique riemannienne sur $\mathbb{D}$, à multiplication près par un scalaire, qui soit invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. C'est (une des définitions de) la *métrique de Poincaré,* ou *métrique hyperbolique.* Quel est le groupe des isométries de cette métrique ?
4. Exprimer la distance pour cette métrique riemannienne entre deux points de $\mathbb{D}$ (on pourra commencer par le cas où l'un d'eux est 0). Démontrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ agit transitivement sur les couples de points à même distance.
5. Démontrer que les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sont 1-lipschitziennes pour cette distance (*lemme de Schwarz-Ahlfors-Pick*).
6. Démontrer qu'il n'existe pas de métrique riemannienne invariante par Aut(X) dans les cas $\mathrm{X} = \mathbb{C}$, $\mathrm{X} = \overline{\mathbb{C}}$.
7. Soit maintenant Λ un réseau de $\mathbb{C}$. On définit $\mathrm{G}_\Lambda = \left\{ a \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, a\Lambda = \Lambda \right\}$. Montrer que G_Λ est isomorphe à un des groupes cycliques C_2, C_4 ou C_6 et préciser les réseaux Λ correspondant à chacun de ces trois cas.
8. En déduire les groupes d'automorphismes des tores $\mathbb{C}/\Lambda$.

   Le but de la fin de cet exercice est de démontrer que le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann compacte et revêtue par $\mathbb{D}$ est fini.
9. Soit X une surface de Riemann de revêtement universel $\pi : \mathbb{D} \to \mathrm{X} = \mathbb{D}/\Gamma$. Expliquer comment X hérite d'une métrique riemannienne par ce procédé et démontrer que la distance associée est
$$d_{\mathrm{X}}(x,y) = \inf_{\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)} d_{\mathbb{D}}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$
où $\tilde{x}$ est n'importe quel point tel que $\pi(\tilde{x}) = x$ et $d_{\mathbb{D}}$ est la distance de Poincaré.
10. On munit Aut(X) de la topologie de la convergence uniforme associée à la distance d_{X}, définie par la distance
$$d_{\mathrm{G}}(g, g') = \sup_{x \in \mathrm{X}} d_{\mathrm{X}}(g(x), g'(x)).$$
Démontrer qu'il est alors compact.

11. Soit $\Gamma^\sharp = \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Démontrer que $\delta = \inf_{a\in\mathbb{D}} \inf_{\gamma\in\Gamma^\sharp} d_{\mathbb{D}}(a,\gamma a) > 0$.

12. Démontrer que $\forall g \in \mathrm{Aut(X)}$, $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{id_X}, g) < \dfrac{\delta}{2} \Rightarrow g = \mathrm{id_X}$ et en déduire le résultat.

    Remarque. Ce résultat de finitude est parfois attribué à H. Schwarz. Les surfaces qu'il concerne sont exactement les surfaces de Riemann compactes de genre $g \geqslant 2$. Un théorème d'Hurwitz raffine alors ce résultat en démontrant que si $g = g(\mathrm{X}) \geqslant 2$, $\mathrm{Aut(X)}$ a au plus $84(g-1)$ éléments.

13. Démontrer que le groupe des difféomorphismes d'une variété réelle connexe de dimension $\geqslant 2$ agit n-transitivement, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Éléments de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et classification des anneaux.

Dans tout l'exercice, on considère $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et son action par biholomorphismes sur $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ (voire leur prolongement à $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \sqcup \mathrm{S}^1$ et $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \sqcup \mathbb{R}$.)

1. Démontrer que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit exactement transitivement sur les couples $(z,x) \in \mathbb{D} \times \mathrm{S}^1$ et 2-transitivement sur les points de S^1. Agit-il 3-transitivement sur les points de S^1 ? Déterminer le stabilisateur de $(1,-1)$.
2. Démontrer que tout élement $f \neq \pm\mathrm{id}$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, vu comme application $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, est d'un des types suivants :
   – *(elliptique)* f admet un seul point fixe, dans $\mathbb{D}$.
   – *(parabolique)* f admet un seul point fixe, dans S^1.
   – *(hyperbolique)* f admet deux points fixes, dans S^1.
3. Démontrer que dans ces cas, ils sont conjugués dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right\}$ à des éléments de la forme $z \mapsto uz$ $(u \in \mathrm{S}^1)$, $z \mapsto z+1$ ou $z \mapsto e^\tau z$ $(\tau \in \mathbb{R})$, respectivement.
4. Soit A un anneau, c'est-à-dire une surface de Riemann homéomorphe à $\mathbb{C}^*$. Montrer que A est soit biholomorphe à $\mathbb{C}^*$, soit à un quotient $\mathbb{H}/\Gamma$, avec $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On admettra que dans ce cas, Γ est engendré par un élément γ. (Cela provient du fait que le groupe fondamental de l'anneau est cyclique.)
5. Démontrer alors que tout anneau est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$ où à l'anneau rond de module m $\mathrm{A}_m = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 < |z| < e^m \right\}$. Dans ce dernier cas, préciser la valeur du module en fonction de γ. (On pourra démontrer puis utiliser que le quotient de la bande de hauteur h par la translation de longueur τ est un anneau rond de module $2\pi h/\tau$.)