TD 8 : Théorème de Riemann-Roch

Exercice 1. Quelques conséquences du théorème de Riemann-Roch.

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et $D \in \mathrm{Div}(X)$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\deg D < 0 \Longrightarrow \ell(D) = 0$;
2. $-1 \leqslant \deg D \leqslant g-1 \Longrightarrow 0 \leqslant \ell(D) \leqslant 1 + \deg D$;
3. $g-1 \leqslant \deg D \leqslant 2g-1 \Longrightarrow 1-g+\deg D \leqslant \ell(D) \leqslant g$;
4. $\deg D \geqslant 2g-1 \Longrightarrow \ell(D) = 1-g+\deg D$.

Exercice 2. Riemann-Roch sur la sphère de Riemann.

1. Quel est le groupe de Picard de $\overline{\mathbb{C}}$?
2. Soit D un diviseur quelconque sur $\overline{\mathbb{C}}$. Déterminer $\ell(D)$ et vérifier le théorème de Riemann-Roch sur ces exemples.

Exercice 3. Lacunes de Weierstraß.

Soit X une surface de Riemann et $p \in X$ un point. Un entier $n \in \mathbb{N}$ est une *lacune* (en ce point) s'il n'existe aucune fonction $f \in \mathscr{M}(X)$, holomorphe sur $X \setminus \{p\}$ et dont p soit un pôle d'ordre n.

1. Soit p un point quelconque d'une surface de Riemann de genre 0. Quelles sont les lacunes en ce point ?
2. Même question si X est de genre 1.
3. (*Lückensatz*) Soit p un point sur une surface de Riemann de genre g. Démontrer qu'il y a exactement g lacunes, comprises entre 1 et $2g-1$.