TD 9 : Points de Weierstraß

Exercice 1. Lückensatz.

Soit X une surface de Riemann et $p \in X$ un point. Un entier $n \in \mathbb{N}$ est une *lacune* (en ce point) s'il n'existe aucune fonction $f \in \mathscr{M}(X)$, holomorphe sur $X \setminus \{p\}$ et dont p soit un pôle d'ordre n.

1. Soit p un point quelconque d'une surface de Riemann de genre 0. Quelles sont les lacunes en ce point ?
2. Montrer que si $g \geqslant 1$, 1 est une lacune.
3. Soit p un point sur une surface de Riemann de genre g. Démontrer qu'il y a exactement g lacunes, comprises entre 1 et $2g-1$.
4. Un point dont les g lacunes ne sont pas les g premiers entiers $1,2,\ldots,g$ est appelé un *point de Weierstraß*. Montrer que l'ensemble des points de Weierstraß est invariant sous l'action de Aut(X) et que si $g=1$, il est vide.

Exercice 2. Poids des points de Weierstraß.

1. On reprend les notations de l'exercice précédent et on note $n_1,\ldots,n_g$ les g lacunes au point p. On appelle *poids* du point p la somme $w(p)=\sum(n_i-i)$, de telle sorte que les points de Weierstraß sont exactement les points de poids >0. Démontrer l'égalité
$$w(p)=\sum_{n=1}^{2g-2}\ell_n-\frac{g(g+1)}{2}+1,$$
où l'on a noté $\ell_n=\ell(np)$.
2. Montrer l'inégalité $\forall n \leqslant 2g, \ell_n \leqslant 1+\lfloor n/2 \rfloor$.
3. Un point p est dit *hyperelliptique* si 2 n'est pas une lacune. Montrer que dans ce cas, la suite des lacunes est donnée par $n_i=2i-1$ et que l'inégalité de la question précédente est une égalité.
4. Déduire de ce qui précède l'inégalité $w(p)\leqslant \dfrac{g(g-1)}{2}$ et que le cas d'égalité caractérise les points hyperelliptiques.

Exercice 3. Critère wronskien.

1. Soit $q \geqslant 1$. On appelle q-différentielle holomorphe une expression de la forme « $f(z)(dz)^q$ ». Plus précisément, une q-différentielle η est la donnée pour chaque carte z d'une fonction holomorphe f_z définie sur l'ouvert de carte telle que les changements de cartes soient de la forme $f_w=f(z(w))\left(\dfrac{dz}{dw}\right)^m(dw)^m$. Que sont les 1-différentielles ? Donner des exemples de q-différentielles pour $q\geqslant 2$. Les q-différentielles méromorphes sont définies de la même façon, *mutatis mutandis*.
2. Soit n_j une lacune en p. Montrer qu'il existe une différentielle holomorphe $\omega_j \in \Omega_X$ d'ordre exactement n_j-1 en p.

3. Si z est une carte, on écrit les différentielles holomorphes de la question précédente sous la forme $\omega_j = f_j\, dz$ et on définit leur *wronskien* (par rapport à la carte z)

$$\mathscr{W}_z = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_g \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_g' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(g-1)} & f_2^{(g-1)} & \cdots & f_g^{(g-1)} \end{vmatrix}.$$

   Démontrer que cela définit une q-différentielle holomorphe, pour une certaine valeur de q que l'on précisera.

4. Démontrer que l'ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une q-différentielle en un point est bien défini. Quel est le degré du diviseur correspondant

$$\mathrm{div}(\eta) = \sum_p \mathrm{ord}_p(\eta)\, p \in \mathrm{Div}(\mathrm{X})\ ?$$

5. Démontrer que l'ordre d'annulation de la q-différentielle holomorphe $\mathscr{W}$ en tout point de X est égal au poids de ce point.

6. En déduire la formule

$$\sum_{p\in \mathrm{X}} w(p) = (g-1)g(g+1).$$

7. En déduire que le nombre N de points de Weierstraß de X satisfait l'inégalité

$$2g+2 \leqslant \mathrm{N} \leqslant g^3 - g$$

   et que le cas d'égalité $\mathrm{N} = 2g+2$ correspond au cas où tous les points de Weierstraß sont hyperelliptiques (on dit alors que la surface de Riemann elle-même est hyperelliptique).