Modules des tores : correction

1. Par hypothèse, on a un biholomorphisme $\widehat{f} : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Lambda$. Ce biholomorphisme vérifie $f([0]_\Gamma) = [z_0]_\Lambda$ pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. Par ailleurs, les translations $\widetilde{\tau}_v : z \mapsto z + v$ sont clairement des biholomorphismes de $\mathbb{C}$ et, si $z = z' + \lambda$ avec $\lambda \in \Lambda$, on a $\tau_v(z) = \tau_v(z') + \lambda$. Elles définissent donc des biholomorphismes $\tau_v : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$. Le biholomomorphisme $f = \tau_{-z_0} \circ \widehat{f}$ répond alors à la question.

2. Convenons de noter $p_\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ et $p_\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ les surjections canoniques. D'après l'exercice 2 du TD 2, question 4, ce sont des revêtements. On peut alors appliquer la question 5 de ce fameux exercice à la fonction $f \circ p_\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ et au revêtement $p_\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$, ce qui donne bien $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle p_\Gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\Lambda} \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Lambda. \end{array}$$

3. Si $\widetilde{\mathrm{U}}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ suffisamment petit pour être disjoint de tous ses translatés $\widetilde{\mathrm{U}} + \lambda$, $(\lambda \in \Lambda)$, la projection restreinte $(p_\Lambda)_{|\widetilde{\mathrm{U}}} : \widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ est injective. Par définition, les cartes $\mathbb{C}/\Lambda$ sont les inverses $(\mathrm{U}, \varphi_\mathrm{U})$ de ces projections restreintes. La même chose est évidemment vraie pour $\mathbb{C}/\Gamma$. Dans ces cartes, f a exactement la même forme que $\widetilde{f}$. Puisque f est holomorphe, il en est de même pour $\widetilde{f}$. (Si on veut, la condition d'holomorphie est locale et f et $\widetilde{f}$ sont la même chose d'un point de vue local).

Si maintenant $\gamma \in \Gamma$, on doit avoir $(f \circ p_\Gamma)(\gamma) = (p_\Lambda \circ \widetilde{f})(\gamma)$, c'est-à-dire $[\widetilde{f}(\gamma)]_\Lambda = f([\gamma]_\Gamma) = f([0]_\Gamma) = [0]_\Lambda$. On a donc bien $\widetilde{f}(\gamma) \in \Lambda$ et $\widetilde{f}(\Gamma) \subset \Lambda$. Si réciproquement $z \notin \Gamma$, le même calcul montre que $[\widetilde{f}(z)]_\Lambda = f([z]_\Gamma) \neq [0]_\Lambda$ donc $\widetilde{f}(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Il reste à comprendre pourquoi $\widetilde{f}$ est une bijection. On va ruser et démontrer que $\widetilde{f}$ est à croissance linéaire. Puisqu'une fonction entière à croissance linéaire est affine, cela démontrera que $\widetilde{f}$ est soit un biholomorphisme soit une fonction constante. Mais ce dernier cas est exclu, car il impliquerait que f soit également constante.

Si $\gamma \in \Gamma$, $z \mapsto \widetilde{f}(z + \gamma) - \widetilde{f}(z)$ est une fonction continue (et même holomorphe) $\mathbb{C} \to \Lambda$: elle est donc constante. Cette construction définit une fonction $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ telle que $\widetilde{f}(z + \gamma) = \varphi(\gamma) + \widetilde{f}(z)$. On vérifie immédiatement que φ est un morphisme. C'est donc une application C-lipschitzienne.

Soit maintenant $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ un compact dont les translatés $(\mathrm{K} + \gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ recouvrent $\mathbb{C}$. Tout point $z \in \mathbb{C}$ est donc à distance $\leqslant \operatorname{diam} \mathrm{K}$ d'un élément $z_\Gamma \in \Gamma$. Cela permet d'utiliser la croissance linéaire de $\widetilde{f}_{|\Gamma} = \widetilde{f}(0) + \varphi$ pour obtenir celle de $\widetilde{f}$. Plus précisément, si z et z' sont dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{f}(z') - \widetilde{f}(z)| &\leqslant |\widetilde{f}(z') - \widetilde{f}(z'_\Gamma)| + |\widetilde{f}(z'_\Gamma) - \widetilde{f}(z_\Gamma)| + |\widetilde{f}(z_\Gamma) - \widetilde{f}(z)| \\
&\leqslant 2\,\mathrm{diam}\,\widetilde{f}(\mathrm{K}) + |\varphi(z'_\Gamma - z_\Gamma)| \\
&\leqslant 2\,\mathrm{diam}\,\widetilde{f}(\mathrm{K}) + \mathrm{C}|z'_\Gamma - z_\Gamma| \\
&\leqslant 2\,\mathrm{diam}\,\widetilde{f}(\mathrm{K}) + 2\mathrm{C}\,\mathrm{diam}\,\mathrm{K} + \mathrm{C}|z' - z| \\
&\leqslant \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2|z' - z|.
\end{aligned}$$

L'application $\widetilde{f}$ est donc à croissance linéaire, ce qui clôt la preuve.

4. On a vu que les biholomorphismes de $\mathbb{C}$ étaient les similitudes directes $z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$). C'est donc le cas de $\widetilde{f}$ et, quitte à composer par $\tau_{-\widetilde{f}(0)}$ (qui est un biholomorphisme de $\mathbb{C}$ préservant Λ, puisque $\widetilde{f}(0) \in \Lambda$), on peut supposer $\widetilde{f}(0) = 0$. On a donc démontré que si $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Gamma$ sont biholomorphes, il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a\Gamma = \Lambda$.

La réciproque est évidente : si $a \neq 0$, $z \mapsto az$ est un biholomorphisme de $\mathbb{C}$ envoyant Γ sur Λ donc il passe au quotient en un biholomorphisme $\mathbb{C}/\Gamma \simeq \mathbb{C}/\Lambda$.

5. Un réseau quelconque peut s'écrire $\langle z_1, z_2\rangle$ avec z_1 et z_2 non colinéaires. Quitte à permuter les deux éléments de cette base, on peut supposer que l'angle orienté entre z_1 et z_2 est dans $]0, \pi[$. Le réseau s'écrit alors $z_1\langle 1, \tau\rangle$ où $\tau = z_2/z_1$ est un élément de $\mathbb{C}$ tel que l'angle entre 1 et τ soit dans $]0, \pi[$, c'est-à-dire $\tau \in \mathbb{H}$.

Deux réseaux $\langle z_1, z_2\rangle$ et $\langle z'_1, z'_2\rangle$ sont égaux si et seulement s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ tel que $\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\langle 1, \tau\rangle \text{ et } \langle 1, \tau'\rangle \text{ semblables } &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}^* : \langle 1, \tau'\rangle = \mu\langle 1, \tau\rangle \\
&\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}^*, \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu\tau \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : \tau' = \frac{\tau'}{1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on peut écrire $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ comme l'union $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \sqcup \sigma\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ où $\sigma = \mathrm{diag}(1,-1)$. La matrice σ correspond à l'homographie $z \mapsto -z$. On voit alors que les élements de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ préservent le demi-plan $\mathbb{H}$ alors que ceux de $\sigma\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ échangent $\mathbb{H}$ et $-\mathbb{H} = [\mathrm{Im}\, z < 0]$. Si on part de $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, on a donc bien

$$\langle 1, \tau\rangle \text{ semblable à } \langle 1, \tau'\rangle \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$