Points de Weierstraß : correction

Lückensatz

1. Si X est de genre nul, elle est biholomorphe à la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Puisque Aut($\overline{\mathbb{C}}$) agit transitivement sur $\overline{\mathbb{C}}$, il suffit de répondre à la question pour un point p particulier, par exemple $p = \infty$. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto x^n$ a un seul pôle, d'ordre n, en p. Donc, en genre nul, aucun entier n'est une lacune.

2. Soit X une surface de Riemann. S'il existe une fonction méromorphe f possédant un seul pôle et que ce pôle est simple, f, vue comme fonction holomorphe $X \to \overline{\mathbb{C}}$ donne un biholomorphisme $X \simeq \overline{\mathbb{C}}$. En particulier, g ne peut pas être $\geqslant 1$. Donc, en genre $\geqslant 1$, 1 est nécessairement une lacune. (C'est l'argument que l'on avait utilisé pour démontrer à l'aide du théorème de Riemann-Roch qu'une surface de Riemann de genre 0 était biholomorphe à la sphère de Riemann).

3. Par définition, un entier n n'est pas une lacune si et seulement si $\ell(np) > \ell((n-1)p)$. Or, d'après le théorème de Riemann-Roch appliqué à ces deux diviseurs :

$$\begin{aligned} \ell((n-1)p) - \ell(K_X - (n-1)p) &= n - g \\ \ell(np) - \ell(K_X - np) &= n - g + 1 \end{aligned}$$

En particulier, $\ell(np) - \ell((n-1)p) = 1 + \ell(K_X - np) - \ell(K_X - (n-1)p) \leqslant 1$. On a donc l'encadrement :

$$\ell((n-1)p) \leqslant \ell(np) \leqslant \ell((n-1)p) + 1.$$

En outre, dès que $n \geqslant 2g-1$, le diviseur $K_X - np$ est de degré strictement négatif, ce qui prouve que $\ell(K_X - np) = n - g + 1$.

En résumé, $\ell(np)$ est une fonction de n qui ne croît que de 1 en 1, qui vaut 1 quand n vaut 0 et $n - g + 1$ dès que $n \geqslant 2g-1$ (en particulier, $\ell((2g-1)p) = g$. Il y a donc exactement g valeurs de n pour lesquelles $\ell(np) = \ell((n-1)p)$, c'est-à-dire exactement g lacunes, comprises entre 1 et $2g-1$.

4. Si f est une fonction méromorphe possédant un seul pôle, d'ordre n, en p et que φ est un automorphisme, $f \circ \varphi$ possède les mêmes propriétés pour le point $\varphi^{-1}(p)$. Les points possédant certaines lacunes, et donc *a fortiori* les points de Weierstraß, forment donc bien des orbites pour l'action naturelle de Aut(X) sur X.

Dans le cas du genre 1, le Lückensatz ne laisse pas de possibilité : tout point n'a qu'une lacune, égale à 1. Il n'y a donc pas de point de Weierstraß.

Poids des points de Weierstraß

1. D'après ce qu'on a vu précédemment, ℓ_n vaut $n+1$ moins le nombre de lacunes $\leqslant n$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2g-2} \ell_n &= \sum_{n=1}^{2g-2} n+1 - \sum_{n=1}^{2g-2} |\{\text{lacunes } \leqslant n\}| \\
&= \sum_{n=1}^{2g-2} n+1 - \sum_{i=1}^{g} \left| \left\{ 1 \leqslant n \leqslant 2g-2 \,\middle|\, n_i \leqslant n \right\} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{2g-2} n+1 - \sum_{i=1}^{g} (2g-1-n_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{g} n_i \right) - 1 \\
&= \frac{g(g+1)}{2} + \left(\sum_{i=1}^{g} n_i - i \right) - 1 \\
&= \frac{g(g+1)}{2} + w(p) - 1,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule désirée.

2. Cela vient du fait que par définition, le placement des lacunes ne peut pas être arbitraire. En effet, si i et j ne sont pas des lacunes, cela veut dire qu'il existe des fonctions holomorphes sur $\mathrm{X} \setminus \{p\}$ et ayant un pôle d'ordre i ou j respectivement en p. Le produit de ces fonctions montre que $i+j$ n'est pas non plus une lacune. En termes plus pompeux, les non-lacunes forment un sous-monoïde de $\mathbb{N}$.

On va utiliser cela pour démontrer que pour tout n, il n'y a pas plus de $\lceil n/2 \rceil$ lacunes $\leqslant n$. Cette propriété est vraie pour $n = 1$. Imaginons qu'il existe un n minimal pour lequel la propriété est fausse. Cela veut dire qu'il y a strictement plus de $\lceil n/2 \rceil$ lacunes $\leqslant n$ mais au plus $\lceil (n-1)/2 \rceil$ lacunes $< n$. Cela implique que n est pair et que c'est une lacune. Plus précisément, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il y ait exactement k lacunes entre 1 et $2k-1$, et que $2k$ soit également une lacune. Cela implique que $2k-1$ est également une lacune (sinon, il y aurait k lacunes $\leqslant 2k-2$, ce qui contredit la propriété). On utilise maintenant la propriété évoquée au début : dès que l'on écrit $2k = i+j$, i ou j est forcément une lacune. Puisqu'il y a $k-1$ manières d'écrire $2k = i+j$ avec $i \leqslant j$ et $i > 1$, on a donc $k-1$ lacunes entre 2 et $2k-2$, et donc $k+1$ en comptant 1 et $2k-1$, ce qui constitue une contradiction et prouve la propriété pour tout n.

On a donc

$$\begin{aligned}
\ell_n &= n+1-(\text{nombre de lacunes} \leqslant n) \\
&\geqslant n+1-\lceil n/2 \rceil \\
&\geqslant 1+\lfloor n/2 \rfloor.
\end{aligned}$$

3. Si 2 n'est pas une lacune, il existe une fonction méromorphe f n'ayant qu'un pôle, double, en p. Ses puissances f^i montrent qu'aucun nombre pair n'est une lacune. D'après le Lückensatz, les lacunes ne peuvent donc être que les g entiers impairs compris entre 1 et $2g-1$. La suite des ℓ_n est alors 1, 1, 2, 2, 3, 3, etc. c'est-à-dire que $\ell_n = 1+\lfloor n/2\rfloor$.

4. D'après la formule $w(p)=\sum_{n=1}^{2g-2}\ell_n-\dfrac{g(g+1)}{2}+1$, le poids d'un point est toujours inférieur au poids donné dans le cas maximal $\ell_n = 1+\lfloor n/2\rfloor$. Or ce cas correspond au cas hyperelliptique $n_i = 2i-1$.

En résumé, $w(p)\leqslant \sum_{i=1}^{g}(i-1)=\dfrac{g(g-1)}{2}$, avec égalité uniquement dans le cas hyperelliptique.

Critère wronskien

1. Par définition, une 1-différentielle holomorphe n'est rien d'autre qu'une différentielle holomorphe. Si ω est une différentielle holomorphe, ω^q (définie par $f(z)^q$ dans toute carte où ω s'écrit $f(z)\,dz$) est une q-différentielle holomorphe.

2. D'après le théorème de Riemann-Roch, $\ell(np)-\ell((n-1)p)=1+\ell(\mathrm{K_X}-np)-\ell(\mathrm{K_X}-(n-1)p)$. Ainsi, si n est une lacune, $\ell(\mathrm{K_X}-(n-1)p)-\ell(\mathrm{K_X}-np)=1$, ce qui implique qu'il existe une forme $\omega\in\Omega^1(-(n-1)p)\setminus\Omega^1(-np)$, c'est-à-dire une différentielle holomorphe possédant un zéro d'ordre $n-1$ en p.

3. Cette propriété ne dépend pas du choix des différentielles holomorphes. Si les formes ω_i s'écrivent $f_i(z)\,dz$ dans la carte z, elles s'écrivent $f_i(z(w))\dfrac{dz}{dw}dw$ dans une autre carte dw. On a donc :

$$\mathscr{W}_w = \text{dét}\left(\frac{d^i}{dw^i}\left[f_j(z(w))\frac{dz}{dw}\right]\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant g-1\\ 1\leqslant j\leqslant g}}.$$

Or, d'après la formule de Leibniz, $\dfrac{d^i}{dw^i}\left[f_j(z(w))\dfrac{dw}{dz}\right]$ est la somme d'un terme « maximal » $\dfrac{d^i}{dw^i}\left[f_j(z(w))\right]\dfrac{dw}{dz}$ et d'une combinaison linéaire (à coefficients indépendants de j) de dérivées $\dfrac{d^k}{dw^k}[f_j(z(w))]$ d'ordre $k<i$. En partant du haut de la matrice, des opérations sur les lignes suppriment ces termes d'ordre inférieur.[1] On a donc

$$\mathscr{W}_w = \text{dét}\left(\frac{d^i}{dw^i}\left[f_j(z(w))\right]\frac{dz}{dw}\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant g-1\\ 1\leqslant j\leqslant g}}.$$

De même, $\dfrac{d^i}{dw^i}(f_j\circ z)$ est la somme de $f_j^{(i)}\circ z\cdot\left(\dfrac{dz}{dw}\right)^i$ et d'une combinaison linéaire à

1. On laisse la première ligne intacte, le terme superfétatoire de la deuxième ligne est simplement $f_j(z(w))\dfrac{d^2z}{dw^2}$ qui est un multiple de la première ligne, donc on peut remplacer par la première ligne par $\dfrac{d}{dw}(f_j(z(w))$, ce qui permettra de supprimer les dérivées d'ordre 1 de la troisième ligne, etc.

coefficients indépendants de j de dérivées d'ordre inférieur $f_j^{(k)} \circ z$ donc

$$\mathscr{W}_w = \text{dét}\left(f_j^{(i)}(z(w)) \left(\frac{dz}{dw}\right)^{i+1} \right) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^q \text{dét}\left(f_j^{(i)}(z(w))\right),$$

avec $q = g(g+1)/2$ et $\mathscr{W}$ est bien une q-différentielle holomorphe.

4. Le changement de cartes dans leur expression se faisant par multiplication par un nombre complexe non nul, l'annulation ou le pôle d'une q-différentielle méromorphe ne dépend pas de la carte choisie. En outre, si ω est une différentielle méromorphe sur X, ω^q est une q-différentielle méromorphe. Les différentes expressions dans une carte de η/ω^q définissent alors une fonction méromorphe sur X donc $\text{div}(\eta)$ et $\text{div}(\omega^q)$ sont égaux modulo DivPrinc(X). En particulier, ils ont même degré :

$$\deg \text{div}(\eta) = \deg \text{div}(\omega^q) = q \deg \text{div}(\omega) = (2g-2)q.$$

5. Commençons par calculer l'ordre d'annulation de $\mathscr{W}$ au point p auquel il est associé. Si on écrit chaque fonction f_j localement au voisinage de p comme la somme d'un terme principal en z^{n_j-1} et de termes d'ordre supérieur, le wronskien sera la somme d'un terme principal en z^w et de termes d'ordre supérieur, où $w = \sum n_j - 1$. Il faut simplement démontrer que la constante devant ce terme principal est non nulle. Cela provient simplement du fait que ce terme n'est rien d'autre que le wronskien des z^{n_i-1}, qui ne s'annule pas car ces monômes sont linéairement indépendants.

En un point différent, on pourrait refaire la même construction et obtenir une nouvelle q-différentielle $\mathscr{W}'$ dont l'ordre d'annulation serait le poids de ce nouveau point. Mais ce $\mathscr{W}'$ serait alors le wronskien d'une autre famille de g différentielles holomorphes. Mais il n'y a, à constante près, qu'une forme g-linéaire alternée sur $\Omega^1(\text{X})$, qui est de dimension p. Donc l'ordre d'annulation de $\mathscr{W}$ est le même que celui de $\mathscr{W}'$, qui est donc bien le poids du point.

6. D'après la formule que nous avons obtenue pour le degré du diviseur d'une q-différentielle et la question précédente, on a

$$\sum_p w(p) = (2g-2)\frac{g(g+1)}{2} = (g-1)g(g+1).$$

7. On a clairement $\text{N} = \sum_p [w(p) > 0] \leqslant \sum_p w(p) = g^3 - g$ et

$$\text{N} = \sum_p \frac{w(p)}{w(p)} \geqslant \frac{2}{g(g-1)} \sum_p w(p) = 2g+2,$$

Le cas d'égalité étant obtenu dans le premier cas quand tous les points de Weierstrass sont de poids un et dans le second quand ils sont tous de poids maximal $\dfrac{g(g-1)}{2}$, c'est-à-dire quand X est hyperelliptique.