M1 Mathématiques Avancées, année 2010-2011

Corrigé du partiel de Surfaces de Riemann

1 (i) Rappelons que les biholomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont les homographies $\frac{az+b}{cz+d}$, $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. Il suffit de montrer que si z_1, z_2, z_3 sont distincts, il existe un unique biholomorphisme qui envoie $(0,1,\infty)$ sur (z_1,z_2,z_3) ou (z_1,z_2,z_3) sur $(0,1,\infty)$.

Existence. Si $z_3 \neq \infty$, on pose $f(z) = \frac{1}{z-z_3}$ qui envoie z_3 sur ∞, donc on peut supposer $z_3 = \infty$. Les biholomorphismes fixant ∞ sont les $az+b$, et pour $a = z_2 - z_1$, $b = z_1$ ça envoie bien $(0,1)$ sur (z_1,z_2) [le groupe affine de la droite est simplement transitif sur deux points].

Unicité. Il suffit de montrer que si $f(0,1,\infty) = (0,1\infty)$, $f = \mathrm{Id}$. D'abord, $f(\infty) = \infty$ donc $f(z) = az+b$. Ensuite, $f(0) = 0$ donc $b = 0$, et $f(1) = 1$ donc $a = 1$, cqfd.

Remarques. 1) Le même raisonnement montre que pour n'importe quel corps K (commutatif), l'action de $\mathrm{PGL}(2,K)$ par homographies sur $\mathbb{P}^1(K)$ est simplement transitive sur trois points. Si tout élément de K a une racine carrée, $\mathrm{PGL}(2,K) = \mathrm{PSL}(2,K)$.

2) Les homographies sont caractérisées par le fait qu'elles préservent le birapport

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Noter que

$$[0 : \infty : z : 1] = \frac{z-0}{z-\infty} : \frac{1-0}{1-\infty} = z.$$

Donc l'homographie f qui envoie (z_1,z_2,z_3) sur $(0,1,\infty)$ est caractérisée par

$$f(z) = [0 : \infty : f(z) : 1] = [z_1 : z_3 : z : z_2] = \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}.$$

Si $z_1 = \infty$, ça fait $\frac{z_2-z_3}{z-z_3}$. Si $z_2 = \infty$, ça fait $\frac{z-z_1}{z-z_3}$. Si $z_3 = \infty$, ça fait $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

(ii) Rappelons que les biholomorphismes de Δ sont les homographies $h_{\theta,a}(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}}$, $e^{i\theta} \in S^1$, $a \in \Delta$. Il suffit de montrer que si l'on fixe $a \in]0,1[$ et $z_1, z_2 \in \Delta$ tels que $f(z_1,z_2) = a$, il existe un unique biholomorphisme de Δ qui envoie $(0,a)$ sur (z_1,z_2).

Existence. L'homographie $h_{0,-z_1}$ envoie z_1 sur 0 et z_2 sur $z_2' = \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}$, qui a pour module $f(z_1,z_2) = a$, donc vaut $ae^{i\theta}$. Puis la rotation $h_{-\theta,0}$ envoie $(0,z_2')$ sur $(0,a)$.

Unicité. Il suffit de prouver que si $f(0,a) = (0,a)$, $f = \mathrm{Id}$. D'abord, $f(0) = 0$, donc par le lemme de Schwarz on a $|f(z)| \leq |z|$, avec $f(z) = e^{i\theta}z$ s'il existe un point $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Comme $f(a) = a$, on a bien $f(z) = z$.

*Question subsidiaire. Puisque les biholomorphismes sont les isométries orientées de la métrique riemannienne, dite hyperbolique, $ds^{\Delta}_{hyp}\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$, la quantité $f(z_1,z_2)$ est probablement une fonction de la distance hyperbolique $d^{\Delta}_{hyp}(z_1,z_2)$.

Montrons-le et trouvons quelle fonction : par invariance, on a

$$d^{\Delta}_{hyp}(z_1, z_2) = d^{\Delta}_{hyp}(0, h_{-z_1}(z_2)) = d_{hyp}(0, |h_{-z_1}(z_2)|).$$

Reste à calculer $d^{\Delta}_{hyp}(0, a)$. Si l'on sait que les diamètres sont des géodésiques minimisantes, on a

$$d^{\Delta}_{hyp}(0, a) = \int_0 \frac{2dr}{1-r^2} = 2\tanh^{-1} a.$$

Sinon, on passe au plan, muni de $ds^{\mathbb{H}}_{hyp} = \dfrac{|dz|}{y}$, et en utilisant le biholomorphisme $z \in \Delta \mapsto ii\dfrac{1+z}{1-z}$, qui est aussi une isométrie. En effet, la forme de ds montre clairement que les demi-droites verticales sont des géodésiques minimales, donc

$$d^{\Delta}_{hyp}(0, a) = d^{\mathbb{H}}_{hyp}(i, i\frac{1+a}{1-a}) = \int_1^{\frac{1+a}{1-a}} \frac{dy}{y} = \log\frac{1+a}{1-a} = 2\tanh^{-1} a.$$

Finalement, on a montré $d_{hyp}(z_1, z_2) = 2\tanh^{-1} f(z_1, z_2)$, donc

$$f(z_1, z_2) = \tanh\frac{1}{2} d_{hyp}(z_1, z_2).$$

2. (i) Non, comme le montre l'exemple $f(z) = \Im z$, qui est harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe (ou calcul direct !) et nulle sur $\mathbb{R}$.

(ii) Bien sûr, la formule de Poisson donnée par l'énoncé ne pouvait être correcte, puisque'elle donnait 0 ! Il fallait remplacer $g(\zeta)$ par $g(z)$, cf le cours.

Soit $w = \varphi(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$, biholomorphisme de Δ sur $\mathbb{H}$, d'inverse $z = \dfrac{w-i}{w+i}$, et soit $g = f \circ \varphi$. On a $f(z) = g(w)$, et g est harmonique sur Δ. Comme de plus φ est un difféomorphisme de $\overline{\Delta} \setminus \{1\}$ sur $\overline{\mathbb{H}}$, g est continue sur $\overline{\Delta} \setminus \{1\}$.

Supposons d'abord que f a une limite en ∞. Alors g a une limite en 1. Elle est donc continue sur $\overline{\Delta}$, on peut lui appliquer la formule de Poisson. Changeant de variables $\zeta = \dfrac{t-i}{t+i}$ (qui envoie $]-\infty, +\infty[$ sur $S^1 \setminus \{1\}$ dans le sens trigonométrique], il vient $g(\zeta) = f(t)$, donc

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = d\log\zeta = (\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i})dt = \frac{2idt}{t^2+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} g(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1-|\frac{w-i}{w+i}|^2}{|\frac{t-i}{t+i} - \frac{w-i}{w+i}|^2}\frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{|w+i|^2 - |w-i|^2}{|(t-i(w+i)-(t+i)(w)-i)|^2}\frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{|w+i|^2 - |w-i|^2}{|(t-i)(w+i)-(t+i)(w-i)|^2}\frac{dt}{t^2+1} \end{aligned}$$

Si $w = x + iy$, le numérateur vaut $4y$ et le dénominateur vaut $4|t - w|^2 = 4(t - x)^2 + y^2$, d'où le résultat.

3. (i) On sait que A est biholomorphe à $\widetilde{A} : \Gamma$, où $\widetilde{A} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ ou Δ. Le premier cas est exclus car A n'est pas compact.

(ii) Soit γ un générateur de Γ. On a $\gamma(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Comme γ n'a pas de point fixe, l'équation $cz^2 + (d - a)z + b = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{H}$, donc elle a deux racines réelles (peut-être confondues), ou une si $c = 0$.

Supposons d'abord qu'elle a deux racines réelles distinctes, ou une racine réelle et que $\gamma(\infty) = \infty$ (cas où $c = 0$). À conjugaison près, on peut supposer $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\infty) = \infty$ (on utilise le fait que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est 2-transitif sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ce qui se prouve de façon analogue au 1)(i)). Donc $\gamma(z) = \lambda z$, avec $\lambda > 0$ puisque γ préserve $\mathbb{H}$. Quitte à passer à γ^{-1}, $\lambda > 1$.

Le logarithme donne un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur la bande $B = \mathbb{R} + i] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui transforme γ en la translation par $\log \lambda = \tau > 0$. Donc $\mathbb{H}/\langle\gamma\rangle$ est biholomorphe à $B/\tau\mathbb{Z}$, qui via l'application $z \mapsto \exp(\frac{2\pi i z}{\tau})$ est biholomorphe à l'anneau rond $A_{-\frac{\pi^2}{\tau}, \frac{\pi^2}{\tau}} \approx A_{1, 2\frac{\pi^2}{\tau}}$.

Enfin, supposons qu'elle a une racine réelle et que $c \neq 0$. À conjugaison près, $\gamma(\infty) = \infty$ donc $\gamma(z) = az + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Comme γ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{H}$, $a = 1$, donc $\mathbb{H}/\langle\gamma\rangle = \mathbb{H}/b\mathbb{Z}$, qui est biholomorphe par $z \mapsto \exp \frac{2\pi i z}{b}$ à Δ^*.

Remarque. Géométriquement, une isométrie γ de $\mathbb{H}$ sans point fixe (qui préserve nécessairement l'orientation, et agit toujours proprement) est

- soit *hyperbolique* : elle préserve une droite (géodésique hyperbolique), sur laquelle elle agit comme une translation de longueur τ. Alors $\mathbb{H}/\langle\gamma\rangle$ est biholomorphe à $A_{1, 2\frac{\pi^2}{\tau}}$, anneau de module $\frac{2\pi}{\tau}$ (voir le (iv)). De plus, $\tau = \min_{z \in \mathbb{H}} d_{hyp}(z, \gamma(z))$.
- soit *parabolique* : dans le modèle $z \mapsto z + b$ vu ci-dessus, elle préserve les *horocycles* $\Im z = cste$, qui sont les courbes orthogonales aux droites passant par le point fixe à l'infini. Alors $\mathbb{H}/\langle\gamma\rangle$ est biholomorphe à Δ^*. On a $\inf_{z \in \mathbb{H}} d_{hyp}(z, \gamma(z)) = 0$.

(iii) Si on avait un biholomorphisme $f : \mathbb{C}^* \to A$ (ou seulement une application holomorphe non constante), $f \circ \exp$ serait une application holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ dans A, ce qui est impossible par le petit théorème de Picard.

(iv) Par homothétie, $A_{r,R} \approx A_{1, \frac{R}{r}}$, et $A_{s,S} \approx A_{1, \frac{S}{s}}$. Donc les deux anneaux sont biholomorphes si $\frac{R}{r} = \frac{S}{s}$.

Monrtrons la réciproque. Ecrivant $\frac{R}{r} = 2\frac{\pi^2}{\tau}$, on voit d'après (ii) que $A_{r,R}$ est biholomorphe à $\mathbb{H}/(z \sim \lambda z)$ avec $\log \lambda = 2\frac{\pi^2 r}{R}$. De même, $A_{s,S} \approx \mathbb{H}/(z \sim \lambda' z)$ avec $\log \lambda' = 2\frac{\pi^2 s}{S}$. Reste à montrer que si $f : \mathbb{H}/(z \sim \lambda z) \to \mathbb{H}/(z \sim \lambda' z)$ est un biholomorphisme, $\lambda = v'$.

Par prolongement analytique, puisque $\mathbb{H}$ est contractile [ou simplement connexe, en utilisant un peu de théorie des revêtements], $f \circ \pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/(z \sim \lambda' z)$ se relève à $\widetilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, qui est un biholomorphisme par symétrie, et vérifie $\widetilde{f}(\lambda z) = \lambda' \widetilde{f}(z)$. Représentant $\widetilde{f}$ par $A \in \mathrm{PSL}(2, /R)$, $z \mapsto \lambda z$ par $\mathrm{diag}(\lambda^{1/2}, \lambda^{-1/2})$, et $z \mapsto \lambda' z$ par $\mathrm{diag}((\lambda')^{1/2}, \sqrt{(}\lambda')^{-1/2})$, on a

$$A\mathrm{diag}(\lambda^{1/2}, \lambda^{-1/2})A^{-1} = \pm\mathrm{diag}((\lambda')^{1/2}, (\lambda')^{-1/2}).$$

Prenant les traces, il vient $\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} = \pm(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})$ donc $\lambda = \lambda'$.

Remarque. Géométriquement, $\tau = \log \lambda$ est la longueur de la seule géodésique fermée sur la surface riemannienne $\mathbb{H}/(z \sim \lambda z)$, cette géodésique étant $i\mathbb{R}_+^*/(y \sim \lambda y)$.

4. (i) Si $P(x,y)=x^n+y^n-1$, on a $\frac{\partial P}{\partial x}=nx^{n-1}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}=ny^{n-1}$. Donc P, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ ne s'annulent pas simultanément, donc $Y_n=P^{-1}(\{0\}$ est une courbe complexe. Pour montrer que c'est une surface de Riemann, il faut prouver qu'elle est connexe (point admis jusqu'ici dans le cours).

Avant de le faire, donnons des uniformisantes en tout point $(x,y)\in Y_n$. Si $y\neq 0$, Y_n est localement le graphe d'une branche de $\sqrt[n]{1-x^n}$. Donc la fonction x est une uniformisante. De même, si $x\neq 0$, Y_n est localement le graphe d'une branche de $x=\sqrt[n]{1-y^n}$ et y est une uniformisante.

Montrons maintenant la connexité de Y_n. Il suffit pour cela de relier tout point $p=(x,y)\in Y_n$ à $p_0=(1,0)$. Puisque Y_P n'a qu'un nombre fini de points où $y=0$, ceux pour lesquels x est une racine de l'unité, et que ceux-ci sont dans l'adhérence du reste, on peut supposer $y\neq 0$. Alors Y_P est localement le graphe d'une branche d'une branche de $\sqrt[n]{1-x^n}$. On considère un chemin γ de x à 1 évitant les racines de l'unité. Puisque $\sqrt[n]{|1-x^n|}$ est borné le long de γ, on peut pronger analytiquement cette branche, obtenant ainsi un chemin de p à p_0 dans Y_n, cqfd.

Remarque. Comme promis, nous prouverons dans le cours que $P^{-1}(\{0\}$ est connexe dès que P est un polynôme irréductible. Noter que la géométrie algébrique dit $P^{-1}(\{0\}$ est connexe pour la topologie de Zariski mais ne dit rien pour la topologie euclidienne : il faut utiliser un argument «transcendant».

(ii) L'application $(x,y)\mapsto x$ est holomorphe bijective de Y_1 sur $\mathbb{C}$, donc Y_1 est biholomorphe à $\mathbb{C}$. C'est aussi une droite complexe affine du point de vue de la géométrie algébrique.

La surface Y_2 est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$, comme toute conique affine non singulière [plus généralement et plus précisément, toute conique affine non singulière sur un corps K algébriquement clos, ou non vide, est isomorphe à K^*, réalisé comme l'hyperbole $xy=1$] :

- Première preuve : on décompose $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$, et on change linéairement de variables :
$$x+iy=t\ ,\ x-iy=u\ ,\ x=\frac{t+u}{2}\ ,\ y=\frac{t-u}{2i}.$$
Ceci donne $tu=1$. Donc $(x,y)\mapsto u=x+iy$ est un biholomorphisme de Y_2 sur $\mathbb{C}^*$, d'inverse $t\mapsto(x,y)=(\frac{t+t^{-1}}{2},\frac{t-t^{-1}}{2i})$.
- Deuxième preuve, plus générale. On choisit un point $p_0=Y_2$, disons $p_0=(1,0)$ [ce qui donnera les calculs les plus simples]. Si $t\in\mathbb{C}$, la droite $(x,y)=(1+u,tu)$ de pente t passant par p_0, recoupe Y_1 au point donné par $((1+u)^2+(tu)^2=1,u\neq 0)$, soit $((1+t^2)u^2+2u=0,u\neq 0)$, soit $u=-\frac{2}{1+t^2}$, donc $(x,y)=(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{-2t}{1+t^2})=f(t)$. L'application f, étendue par $f(\infty)=p_0$ [noter que la tangente en p_0 est verticale] est bijective de $\mathbb{P}^1(C)\setminus\{i,-i\}$ sur Y_2. Elle est aussi holomorphe hors de ∞, ainsi qu'en ∞ puisque dans l'uniformisante $v=t^{-1}$ on a $f(v)=(\frac{v^2-1}{v^2+1},\frac{-2v}{v^2+1})$. C'est donc un biholomorphisme. Son inverse est $(x,y)\mapsto t=\frac{y-1}{x}$, étendu par $(1,0)\mapsto\infty$. Donc Y_2 est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de deux points, qui est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$.

  [Explicitement, un biholomorphisme $Y_2\to\mathbb{C}^*$ est donné par
$$(x,y)\mapsto w=\frac{t-i}{t+i}=\frac{y-1-ix}{y-1+ix}\ ,\ (1,0)\mapsto 1.$$
Puisque $t=i\frac{1+w}{1-w}$, son inverse est
$$\begin{aligned}w\in\mathbb{C}^*\mapsto&(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{-2t}{1+t^2})\\&=(\frac{(1-w)^2+(1+w)^2}{(1-w)^2+(1+w)^2},\frac{2i(1+w)(1-w)}{(1-w)^2-(1+w)^2})\\&=(-\frac{1+w^2}{2w},i\frac{w^2-1}{2}).]\end{aligned}$$

(iii) En fait $\varepsilon = 1$ convient. En effet, si $|x| > 1$, on peut écrire $\sqrt[n]{1-x^n} = -x\sqrt[n]{1-x^{-n}}$. La série du binôme de Newton $s(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \binom{-\frac{1}{n}}{p} x^{-p}$ converge pour $|x| > 1$, et définit une branche holomorphe de $\sqrt[n]{1-x^{-n}}$ sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_{\varepsilon^{-1}}}$. Donc $Y_n \cap \{|x| > 1\}$ est la réunion disjointe des

$$C_k = \{(x, -\omega^k x s(x)) \mid x \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_{\varepsilon^{-1}}}\}, 1 \leq k \leq n \ , \ \omega = \exp\frac{2\pi i}{n}.$$

L'application x est donc un biholomorphisme de C_k sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_{\varepsilon^{-1}}}$. Donc $Y_n(1)$ a n composantes, toutes biholomorphes à $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_{\varepsilon^{-1}}}$.

Posant $t = x^{-1}$, on obtient un biholomorphisme de C_k sur Δ^*. Donc si $X_n = Y_n \amalg \{p_1, \cdots, p_n\}$, on définit une structure de surface de Riemann étendant celle de Y_n en prenant pour uniformisante sur $C_k(1) \cup \{p_k\}$ la fonction $t = x^{-1}$ étendue par 0 en p_k.

La surface X_k est compacte car elle est la réunion de $\overline{Y_n(\frac{1}{2})}$ qui est compact [fermé borné dans $\mathbb{C}^2$] et des disques fermés $\{|t| \leq \frac{1}{2}\} \subset C_k$, $1 \leq k \leq n$. [Ou parce qu'elle est un fermé de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, cf la suite du cours].

(iv) X_1 et X_2 sont toutes les deux biholomorphes à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: les formules du (ii) s'étendent de façon évidente aux points rajoutés [=points à l'infini]. (On donnera plus de détails dans le cours, cf aussi le cours de Géométrie algébrique).

(v) Elles sont holomorphes sur Y_n, et dans l'uniformisante $t = x^{-1}$ près de p_k, on a $x = t^{-1}, y = -\omega^k t^{-1} s(t^{-1})) \sim -\omega^k t^{-1}$ donc elles sont méromorphes près de p_k, avec un pôle d'ordre un en p_k. Le degré de x et de y est donc n.

(vi) Question trop dure, preuve proche de celle donnée dans le cours pour le fait que toute fonction méromorphe est algébrique de degré borné sur $\mathbb{C}(f)$.

(vii) Puisque x et y sont méromorphes, ce sont des différentielles méromorphes, et elles sont mérmorphes sur $Y_n \setminus (\{y = 0\} \cup \{p_1, \cdots, p_n\})$. De plus, la relation $x^n + y^n = 1$ se différentie en $nx^{n-1}dx + ny^{n-1}dy = 0$, donc $\omega_{i,j} = -x^{n-1+i}y^{j-n+1}dy$ est holomorphe sur $Y_n \setminus \{p_1, \cdots, p_n\}$ pour $i, j \geq 1 - n$ et a fortiori pour $0 \leq i \leq n-3$, $1 - n \leq j \leq -2 - i$.

Près d'un point p_k, dans l'uniformisante $t = x^{-1}$ on a $dx = -t^{-2}dt$, $y \sim -\omega^k t^{-1}$, donc $\omega_{i,j} \sim C_{i,j} t^{-2-i-j} dt$, qui est holomorphe puisque $-2 - i - j \geq 0$. Donc les $\omega_{i,j}$ snt holomorphes sur X_n tout entier si $0 \leq i \leq n-3$, $1 - n \leq j \leq -2 - i$.

Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes : si $\sum_{i,j} \lambda_{i,j}\omega_{i,j} = 0$, on a $Q(x, y) := \sum_{i,j} \lambda_{i,j} x^i y^{j+n-1} = 0$ sur $Y_n = P^{-1}(\{0\})$. Par la théorie du résultant, puisque P est irréductible, P divise Q. Comme $\deg_x(Q) < \deg_x(P)$, ceci implique $Q = 0$.

Remarque. On verra que les $\omega_{i,j}$ forment une base de $\Omega^1_{X_n}$ (cas particulier d'un théorème d'Abel).

(viii) En un point de Y_3 où $y \neq 0$, c'est clair puisque x est une uniformisante. Si $y = 0$, on a $y^{-2}dx = -x^2 dy$, qui est non singulière puisque $x \neq 0$ et y est une uniformisante. Près d'un point p_k, dans l'uniformisante $t = x^{-1}$, on a

$$y^{-2}dx \sim (-\omega^k t^{-1})^{-2}(-t^{-2}dt) = \omega^{2k}dt,$$

donc $y^{-2}dx$ est non singulière partout.

Remarque. Comme on verra dans le chapitre sur les courbes elliptiques, l'application $p \mapsto \int_{p_0}^{p} y^{-2}dx$ donne un biholomorphisme de X_3 sur un tore $\mathbb{C}/\Lambda$.