M1 Mathématiques approfondies, second semestre 2010-2011
Surfaces de Riemann

Jean-Claude Sikorav

Version finale (modulo des erreurs)

Table des matières

Bibliographie

[Ah] L.V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mapping, second edition*, Univ. Lect. Series 38, Amer. Math. Soc., 2006.

[Br-K] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser, 1986.

[Fa] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 71, Springer 1980.

[For] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 81, Springer 1981.

[Gal-Gau] A. Galard and D. Gauld, *Dynamics of non metric manifolds*, arXiv:1102.5684.

[Go] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

[Hu] J.H. Hubbard, *Teichmüller theory*, vol. 1, Matrix Editions, Ithaca (NY), 2006.

[Kl] F. Klein, *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, 1963 et réimpressions fréquentes.

[Knapp] A.W. Knapp, *Elliptic curves*, Princeton Math. Notes 40, 1992

[Mi] 1 J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 272-280. In *Collected papers IV*, Amer. Math. Soc., 2009, pp. 35-43.

[Mi] 2 J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University of Virginia Press, 1965.

[Mi] 3 J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton Annals of Math. Studies 61, 1968.

[R] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Math. 77, Birkhäuser, 1989.

[SG] H.-P. de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann - Retour sur un théorème centenaire*, ENS Éditions, 2010.

[Se1] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[Se2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris, 1970.

[Si] L. Siegel, *Topics in complex function theory*, vol. I *Elliptic functions and uniformization theory*, Addison-Wesley, 1969.

[Sp] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 1, Publish or Perish, 1970. Nouvelle édition, 2005.

[W] H. Weyl, *The concept of a Riemann surface*, translated from the German, Third edition, Addison-Wesley 1955. Fréquentes réimpressions Dover.

[Zy] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Second edition, reprinted with corrections and some additions, Volume I, Cambridge Univ. Pres, 1959.

1 Surfaces de Riemann et objets associés

1.1 Définitions

Une *surface de Riemann* est une variété complexe de dimension un (courbe complexe), que l'on supposera toujours connexe. Autrement dit c'est un espace topologique séparé connexe X, muni d'un *atlas holomorphe* $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où

- $(u_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X
- la *carte* $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de $\mathbb{C}$
- tout *changement de cartes* $\psi_{i,j} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est holomorphe.

Plus précisément, la structure de surface de Riemann est définie par une classe d'équivalence d'atlas holomorphes, deux tels atlas étant dits équivalents si leur réunion est encore un atlas holomorphe. Ou encore on peut considérer l'atlas maximal associé, formé de toutes les cartes $(U, \varphi : U \to \mathbb{C})$ telles que $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ est holomorphe pour tout $i \in I$: cet atlas contient l'atlas donné (U_i, φ_i), et est clairement le plus grand atlas holomorphe contenant (U_i, φ_i). Une carte de l'atlas holomorphe sera appelée *carte holomorphe*.

Uniformisante. Si X est une surface de Riemann et p un point de X, une carte holomorphe φ définie sur un voisinage U de p et envoyant p sur 0 s'appelle une *uniformisante* en p. Il en existe toujours, puisque si φ est une carte holomorphe, $\varphi - \varphi(p)$ aussi. Par restriction et homothétie, on peut toujours trouver une uniformisante ayant pour image le disque unité Δ.

Notation. Il sera commode de noter une uniformisante z (ou w, ζ,...), notant ainsi à la fois la fonction et sa valeur. On notera aussi $z = x + iy$), où (x, y) est alors une carte réelle, ou système de coordonnées réelles.

Soient $(X, (U_i, \varphi_i)_{i \in I})$ et $(Y, (V_j, \psi_j)_{j \in J})$ deux surfaces de Riemann. Un isomorphisme (ou *biholomorphisme*) entre X et Y est une bijection qui envoie l'atlas maximal de X sur celui de Y (c'est en particulier un homéomorphisme. Autrement dit, les applications $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sont holomorphes pour toutes les cartes φ et ψ dans les atlas holomorphes maximaux de X et de Y (il suffit que ce soit vrai dans des atlas holomorphes de X et de Y). On notera $X \approx Y$ la relation d'équivalence ainsi définie.

Une surface de Riemann non compacte est dite *ouverte*.

Remarques. 1) Si la topologie sur X n'est pas donnée a priori, l'atlas la fournit : on modifie la définition d'une carte en demandant seulement que ce soit une bijection sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Une partie $A \subset X$ sera alors ouverte si et seulement si $\varphi_i(A \cap U_i)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ pour tout i. Ceci définit toujours une topologie telle que les cartes sont des homéomorphismes, mais la séparation (ainsi que la connexité) n'est pas automatique et doit être démontrée.

2) Le jacobien du changement de cartes $\psi_{i,j}$, vu comme une application entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ est $|\psi'_{i,j}|^2$ qui est positif, donc *toute surface de Riemann est canoniquement orientée.*

3) En géométrie différentielle, on impose en outre à toute variété différentiable connexe d'être *dénombrable à l'infini* c'est-à-dire d'être réunion dénombrable de compacts. Cette propriété équivaut à la métrisabilité, la séparabilité, ou la *paracompacité* (tout recouvrement ouvert admet un recouvrement plus fin localement fini). On verra que dans le cas des surfaces de Riemann, cette propriété est automatique (théorème de Rado).

*En particulier, soit L^+ la *demi-droite longue* $L^+ = \aleph_1 \times [0, 1[$ où $\aleph_1$ est l'ensemble des ordinaux dénombrables, munie de la topologie associée associée à l'ordre lexicographique. On a $L^+ = \amalg_{\alpha \in \aleph_1} [\alpha, \alpha + 1[$, et la topologie de l'ordre en fait une variété topologique de dimension un connexe. On peut munir L^+ d'une structure de variété de classe C^∞ ou même C^ω c'est-à-dire $\mathbb{R}$-analytique (cf [Sp], Appendix A, p.465-472). En fait il existe $2^{\aleph_1}$ telles structures non isomorphes ([Spivak] pour le cas C^ω, P.J. Nyikos, Adv. in Math. 93 (2004), 129-213 pour le cas C^∞). Donc $L^+ \times \mathbb{R}$ et $L^+ \times L^+$ sont des surfaces connexes C^ω, mais ne peuvent admettre de structure de surface de Riemann car elles ne sont pas dénombrables à l'infini puisque $\aleph_1 \times \{0\}$ est une partie discrète non dénombrable.

Un exemple différent est la surface de Prüfer ([Sp], p.466, [Hu], p.6-7), obtenue en recollant sur le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{H}$ des copies $\overline{\mathbb{H}}_x$ du demi-plan fermé : on peut la munir d'une structure de surface C^ω, connexe et admettant $\mathbb{R}$ comme sous-ensemble discret, donc non dénombrable à l'infini. Elle n'a donc pas non plus de structure de surface de Riemann. On pourra trouver ces exemples, étudiés d'un point de vue «dynamique», dans le préprint [Gal-Gau] (référence signalée par Alexis Marin).*

1.2 Exemples de surfaces de Riemann

Les exemples 1), 2) et 4) sont des surfaces ouvertes, 3) et 5) des surfaces compactes.

1) $\mathbb{C}$ est bien sûr le premier exemple, on l'appellera *droite complexe*, ou *droite complexe affine* (et non «plan complexe», qui pour nous sera $\mathbb{C}^2$).

2) Tout ouvert connexe d'une surface de Riemann est une surface de Riemann. En particulier, tout ouvert de $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann avec un atlas à une carte. Deux cas particulièrement intéressants :

- $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (disque unité), que l'on notera Δ
- $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ (demi-plan *supérieur*, ou *de Poincaré*, ou *hyperbolique*, ou *de Lobatchevsky*), que l'on notera $\mathbb{H}$.

3) La *sphère de Riemann*, ou *droite projective complexe*, notée $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Comme ensemble, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La structure est donnée par un atlas à deux cartes : $U_0 = \mathbb{C}$, $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, $U_\infty = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, $\varphi_\infty(z) = \frac{1}{z}$ si $z \neq \infty$, $\varphi_\infty(\infty) = 0$. Il n'y a donc qu'un changement de cartes (avec son inverse), $\psi_{0,\infty}(z) = \frac{1}{z}$, de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$. Exercice : montrer avec cette définition que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est séparé, connexe et compact.

Variante via des projections stéréographiques : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$ identifié à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(Z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |Z|^2 + t^2 = 1\}$. Les deux cartes sont

- $U_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{N\}$, où $N = (0,1)$ est le pôle nord, $\varphi_0 = z =$ projection stéréographique de centre N sur $\mathbb{C} \times \{0\} = \mathbb{C}$, soit $z = \frac{Z}{1-t}$;
- $U_\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{S\}$, où $S = (0,-1)$ est le pôle sud, $\varphi_\infty = w =$ (conjugaison compexe) $\circ$ (projection stéréographique de centre S sur $\mathbb{C} \times \{0\} = \mathbb{C}$), soit $w = \frac{\overline{Z}}{1+t}$.

Le changement de cartes est obtenu en exprimant w en fonction de z : $w = \overline{z}\frac{1-t}{1+t}$, avec $1 - t = \frac{|Z|}{|z|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|z|}$, d'où $\frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{|z|^2}$, donc $w = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$. On retrouve le même atlas, mais cette fois le fait que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est séparé et compact est évident. On a aussi le fait que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est topologiquement une sphère de dimension deux.

**Remarques.* Si l'on n'avait pas mis la conjugaison complexe, le changement de cartes aurait été anti-holomorphe. Le fait que ce changement de cartes est holomorphe ou anti-holomorphe, c'est-à-dire *conforme* (la différentielle est partout une similitude, ou : préserve les angles), vient de toute projection stéréographique en dimension quelconque est conforme, c'est-à-dire sa différentielle est une similitude du plan tangent à la sphère sur l'hyperplan de projection. En effet, si E est un espace euclidien, S est la sphère $\{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ et $x_0 \in S$ le centre de projection, l'hyperplan image étant $x_0^\perp$, la projection est $\pi(x) = \frac{x - \langle x_0, x\rangle x_0}{1 - \langle x_0, x\rangle}$, d'où

$$\begin{aligned} D\pi(x).h &= \frac{(1 - \langle x_0, x\rangle)(h - \langle x_0, h\rangle x_0) + \langle x_0, h\rangle(x - \langle x_0, x\rangle x_0)}{(1 - \langle x_0, x\rangle)^2} \\ &= \frac{h}{(1 - \langle x_0, x\rangle)^2} \text{ si } h \in T_{x_0}S = x_0^\perp. \end{aligned}$$

Pour une preuve géométrique de la conformité d'une projection stéréographique, voir [Hilbert et Cohn-Vossen].*

Le nom de droite projective complexe vient de ce qu'on peut définir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le quotient $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$ étant formé des points $[(1,z)]$ et $\{\infty\} = [(0,1)] = [(0,z)]$ ($\forall z \neq 0$). Nous décrirons plus tard l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ de dimension quelconque.

4) Les *tores* $T_\Lambda := \mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est un *réseau* de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang maximal, soit deux, donc $\Lambda \approx \mathbb{Z}^2$. On munit T_Λ de la topologie quotient, qui ne dépend pas de Λ à homéomorphisme près. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $U \cap (U + \lambda) = \emptyset$ pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, ce qui est vrai par exemple si $\mathrm{diam}(U) < \mathrm{syst}(\Lambda) := \min_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} |\lambda|$ (*systole* du réseau), la projection $U \subset \mathbb{C} \to T_\lambda$ est un homéomorphisme sur son image. Son inverse est par définition la carte φ_U. Exercice : montrer que φ_U est bien un homéomorphisme sur son image, que les changements de cartes $\varphi_{U,U'}$ sont localement des translations par des éléments de Λ, et qu'on peut supprimer «localement» si U et U' sont connexes.

À multiplication par un scalaire non nul près, ce qui ne change pas T_Λ à isomorphisme près, Λ admet une base $(1, z)$ où $z \in \mathbb{H}$. On notera alors $T_{\langle 1,z\rangle} = T_z$. De plus, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $(cz + d, az + b)$ est aussi une base de Λ, donc $T_z \approx T_{\frac{az+b}{cz+d}}$ (noter que $\Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} = \frac{1}{|cz+d|^2} > 0$). On peut alors trouver z dans un domaine fondamental de l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ par homographies. Un tel domaine est par exemple $D = \{|z| > 1, -\frac{1}{2} \leq |z| < \frac{1}{2}\}$, cf [Se2]. Exercice : montrer que T_Λ est isomorphe à $T_{\Lambda'}$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda' = \alpha\Lambda$. En déduire que tout T_Λ est isomorphe à T_z pour un unique $z \in D$.

5) *Courbes algébriques affines.* En général, elles sont définies par une équation $P(x,y)=0$ dans $\mathbb{C}^2$, ou par $k \geq n-1$ équations $P_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ dans $\mathbb{C}^n$ (on ne peut pas toujours arriver à $k=n-1$, cf le cours de Géométrie Algébrique). Nous regardons un exemple particulier important.

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ [on utilise une minuscule puisque X est réservé pour les surfaces de Riemann] un polynôme sans zéro multiple, alors $X_P := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$ a une structure de surface de Riemann, chaque point $(x_0,y_0) \in X_P$ étant dans le domaine de définition d'une carte de la forme

- $\varphi(x,y)=x$ si $P'(x_0) \neq 0$ (par définition, si $p(x)=\sum a_n x^n$, $P'(x)$ est le polynôme $\sum n a_n x^{n-1}$, de sorte que $DP(x).h = P'(x)h$),
- $\varphi(x,y)=y$ si $P'(x_0)=0$ (noter qu'alors $P(x_0) \neq 0$ donc $y_0 \neq 0$).

Exercice : montrer qu'on peut effectivement définir un tel atlas et qu'il est holomorphe. Montrer que $\frac{x}{y}$ induit un biholomorphisme du complémentaire d'un compact convenable sur un disque épointé Δ_a^*.

Le cas d'un polynôme de degré trois est particulièrement intéressant. À normalisation près on a $P(x) = x^3+px+q$ avec $4p^3+27q^2 \neq 0$ pour que P ait des racines simples. En utilisant l'inversion de l'intégrale elliptique $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$, on verra que X_P est isomorphe à un tore T_z privé d'un point. *Plus précisément, il il existe une fonction holomorphe $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, dite *fonction modulaire*, qui est invariante par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ agissant via les homographies $\frac{az+b}{cz+d}$, induisant une bijection du quotient sur $\mathbb{C}$, et telle que X_{x^3+px+q} est isomorphe à (T_z privé d'un point) si et seulement si $\frac{4p^3}{4p^3+27q^2} = \frac{j(z)}{1728}$ (le facteur 1728 est introduit pour avoir $j(z) \sim e^{-2\pi i z}$ quand $\Im z \to +\infty$). Exercice : montrer que X_{x^3+1} est isomorphe à T_ω privé d'un point, où $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, racine primitive cubique de l'unité.*

6) *Courbes algébriques projectives.* Disons quelques mots sur la version projective de l'exemple 5) en degré trois. Le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est le quotient $(\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\mathbb{C}^*$, il admet un plongement de $\mathbb{C}^2$: $(x,y) \mapsto [(1,x,y)]$. Il est compact et le complémentaire de $\mathbb{C}^2$, qui est l'ensemble des points $[(0,x,y)]$, s'identifie à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (droite à l'infini). La courbe $X = X_{x^3+px+q}$ a pour adhérence $\overline{X} = X \cup [(0,0,1)]\}$ (on ajoute le point à l'infini dans la direction verticale). Nous verrons que $\overline{X}$ est une surface de Riemann, isomorphe à T_z.

Unn des grands théorèmes du cours sera le suivant : *toute surface de Riemann compacte se réalise comme courbe algébrique projective.* (Pas toujours dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, à moins d'autoriser des points doubles, mais toujours dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$). Une variante de ce résultat est qu'une surface de Riemann compacte est essentiellement la même chose qu'une extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$, le corps des fractions à une indéterminée. Ou plus précisément qu'une extension de $\mathbb{C}$ de type fini et de degré de transcendance un.

1.3 Applications holomorphes, degré en un point

Définitions. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application $f : X \to Y$ est *holomorphe* si elle est continue et si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe pour tout couple (φ,ψ) de cartes holomorphes de X et de Y. Il est clair qu'il suffit que ce soit vrai pour φ et ψ dans des atlas holomorphes, pas forcément maximaux. L'application f est *biholomorphe* si elle est holomorphe, bijective et d'inverse holomorphe : c'est équivalent à la définition donnée au tout début.

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann.*

(i) Si $p \in X$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et des uniformisantes φ en p et ψ en $f(p)$, tels que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, soit $\psi \circ f = \varphi^d$. L'entier $d = \deg_p(f)$ ne dépend que de f et de p, et s'appelle le degré *de f en p. On l'appelle aussi* multiplicité *de f en p. On a $\deg_p(f)=1$ si et seulement si $Df(p) \neq 0$.*

(ii) Pour tout $q \in X \setminus \{f(p)\}$ assez proche de p, on a $\mathrm{card}(f^{-1}(\{q\}) \cap U) = \deg_p(f)$. En particulier, f est ouverte.

(iii) L'ensemble $R(f) = \{p \in X \mid \deg_p(f) \geq 2\} = \{p \in X \mid Df(p)=0\}$, est discret et fermé. De façon équivalente, il est localement fini *c'est-à-dire rencontre tout compact en un ensemble fini. Ses points sont appelé* points de ramification *ou* points critiques. *Son image $C(f) = f(R(f)) \subset Y$ est appelé l'ensemble des* valeurs critiques *de f.*

Remarque. Parfois, ce sont les points de $C(f)$ qui sont dit points de ramification.

Démonstration. (i) Soient φ et ψ_0 des uniformisantes en p et en $f(p)$. Alors $g = \psi_0 \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 et telle que $g(0)=0$. Donc soit 1) g est identiquement nulle, soit 2) il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $g(z) = z^d h(z)$ avec h holomorphe et $h(0) \neq 0$.

Dans le cas 1), f est localement constante en p, et dans le cas 2), f n'est constante dans aucun ouvert contenu dans U. Soit E l'ensemble des points vérifiant le cas 1). C'est un ouvert, et si $q \in \overline{E}$, q tout voisinage de q contient un ouvert où f est égale à $f(p)$, donc q ne vérifie pas le cas 2), donc $q \in E$, donc E est fermé. Par connexité, $E = \emptyset$ ou X, et dans le second cas f est constante. Comme f n'est pas constante, $E = \emptyset$.

On est donc toujours dans le cas 2). La fonction holomorphe h, qui est non nulle en 0, a une racine d-ième holomorphe k au voisinage de 0, donc on a $g(z) = G(z)^d$, où $G(z) = zk(z)$ est holomorphe. De plus $G'(0) = k(0) \neq 0$, donc G est localement un biholomorphisme, donc $\psi = G^{-1} \circ \psi_0$ est une uniformisante en $f(p)$. Finalement, on a $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, donc d a la propriété annoncée.

Pour montrer que d est unique, on observe que c'est le plus petit entier tel que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(d)}(0) \neq 0$, et que cette propriété est indépendante du choix des uniformisantes φ et ψ. En particulier, $d = 1$ si et seulement si $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) \neq 0$, soit $Df(p) \neq 0$. L'unicité résultera aussi de (ii).

(ii) Ces propriétés sont évidentes pour l'application $z \mapsto z^d$ au voisinage de 0, donc elles sont aussi vraies pour f.

(iii) Si $p \in R(f)$ et U est un voisinage sur lequel on a $\psi \circ f = \varphi^d$, on a $R(f) \cap U = \{p\}$ puisque la dérivée de z^d est non nulle hors de 0, donc $R(f)$ est discret. De plus, la caractérisation $Df(p) = 0$ montre qu'il est fermé.

Corollaire. *Une application holomorphe injective entre surfaces de Riemann est un biholomorphisme sur son image.*

Démonstration. En effet, la propriété (ii) implique que le degré est 1 en tout point donc f est partout biholomorphiquement équivalente à $z \mapsto z$.

1.4 Fonctions holomorphes et méromorphes

Une fonction holomorphe sur la surface de Riemann X est une application holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}$, autrement dit une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ qui est continue et telle que $f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe sur $\varphi(U)$ pour toute carte holomorphe φ de X, ou pour toute carte dans un atlas holomorphe. L'ensemble des fonctions holomorphes sur X est un anneau (et une $\mathbb{C}$-algèbre) pour les lois usuelles, on le notera $\mathcal{O}(X)$. Il est intègre puisqu'une fonction holomorphe non nul a des zéros isolés.

Proposition 1. *Si X est une surface de Riemann, une fonction holomorphe est une carte holomorphe si et seulement si elle est injective. Donc la donnée de tous les anneaux $\mathcal{O}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$ détermine la structure de surface de Riemann.*

Démonstration. Le premier énoncé est un cas particulier du corollaire de la fin de la section précédente. Le second en résulte immédiatement.

Proposition 2. *Si X est compacte, toute fonction holomorphe est constante.*

Démonstration. Par compacité, $|f|$ a un maximum, donc f n'est pas ouverte, donc elle est constante.

Remarque. En revanche, si X est ouverte, $\mathcal{O}(X)$ n'est pas réduit aux constantes, il est même énorme, par exemple il contient toujours $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, l'anneau des fonctions entières : si $f \in \mathcal{O}(X) \setminus \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ s'injecte dans $\mathcal{O}(X)$ via $h \mapsto h \circ f$. On peut aussi montrer que X admet un plongement holomorphe $f = (f_1, \cdots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{O}(X)$, dans $\mathbb{C}^n$ (la question est ouverte de savoir si on peut toujours prendre $n = 2$).

Définition. Soit X une surface de Riemann. Une *fonction méromorphe* sur X est une fonction holomorphe f définie sur $X \setminus P$ où P est un sous-ensemble localement fini, et qui a un pôle au voisinage de chaque point de p : ceci veut dire que si φ est une uniformisante en p, $f \circ \varphi^{-1}$ a un pôle en 0. C'est alors clairement vrai pour toute uniformisante, avec un pôle de même ordre, appelé ordre du pôle p. Si cet ordre est k, on peut écrire $f = z^{-k}h$ où z est une uniformisante et h est holomorphe $h(p) \neq 0$. Donc h a localement une racine k-ième g, et $w = zg^{-1}$ est une uniformisante, telle que $f = w^{-k}$.

À une fonction méromorphe $f : X \setminus P \to \mathbb{C}$ on associe une application holomorphe $\widetilde{f} : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en prolongeant f par ∞ sur D. Pour prouver que $\widetilde{f}$ est holomorphe, il suffit de le faire près de $p \in D$. Soit $\varphi : U \to \mathbb{C}$ une uniformisante en p, avec U assez petit pour que $U \cap D = \{p\}$. Par hypothèse on a $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^{-d}h(z)$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, h holomorphe sur $\varphi(U) \setminus \{0\}$, et $h(0) \neq 0$. Quitte à diminuer U on peut supposer que h ne s'annule pas. Utilisant la carte φ_∞ définie sur $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, il vient $\varphi_\infty \circ \widetilde{f}(z) = \frac{z^d}{h(z)}$ sur $\varphi(U)$: donc $\widetilde{f}$ est holomorphe près de p.

Il est clair que $f \mapsto \widetilde{f}$ est une bijection entre les fonctions méromorphes sur X et les applications holomorphes de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non identiquement égale à ∞. Nous identifierons $\widetilde{f} = f$.

Remarque. Du point de vue algébrique, les applications holomorphes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont les *applications régulières* de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Si f et g sont deux fonctions méromorphes ayant un pôle au voisinage de p, alors en utilisant une uniformisante z en p on voit que $f+g$ est holomorphe ou a un pôle en p, et de même pour fg. Et que si $f \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est holomorphe en p si $f(p) \neq 0$, et a un pôle en p si $f(p)=0$. On en déduit la

Propriété. *Si X est une surface de Riemann, l'ensemble des fonctions méromorphes est un corps pour les lois usuelles. On le note $\mathcal{M}(X)$, on note $\mathcal{M}^*(X)$ le groupe multiplicatif des fonctions méromorphes non nulles.*

Remarque. Nous verrons que $\mathcal{M}(X)$ contient toujours des fonctions non constantes, de plus :

- si X est compacte, $\mathcal{M}(X)$ est une extension algébrique finie quelconque de $\mathbb{C}(x)$
- si X est ouverte, $\mathcal{M}(X)$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}(X)$ (si X est un ouvert de $\mathbb{C}$, c'est essentiellement Mittag-Leffler).

1.5 Diviseurs, diviseurs principaux, groupe de Picard

Un *diviseur* sur une surface de Riemann X est une somme formelle $\sum_{p\in X} n_p p$, où $n_p \in \mathbb{Z}$ et $\operatorname{supp}(D) := \{p \in K \mid n_p \neq 0\}$ (*support* de D) est localement fini. On notera $n_p = \deg_p(D)$, le *degré* de D en p. Les diviseurs forment un groupe abélien $\operatorname{Div}(X) \subset \mathbb{Z}^X$, qui est égal à $\mathbb{Z}^{(X)}$ si X est compacte. En particulier, si f est méromorphe non constante, on définit ses diviseurs des zéros et des pôles, $\operatorname{div}_0(f) = \sum_{p\in f^{-1}(0)} \deg_p(f)p$, $\operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{p\in f^{-1}(\infty)} \deg_p(f)p$, et son diviseur (tout court)

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{p\in f^{-1}(0)} \deg_p(f)p - \sum_{p\in f^{-1}(\infty)} \deg_p(f)p.$$

L'application $f \mapsto \operatorname{div}(f)$ est un morphisme du groupe multiplicatif $\mathcal{M}^*(X)$ dans $\operatorname{Div}(X)$. Son image est le sous-groupe $\operatorname{Divprinc}(X)$ des *diviseurs principaux*. Le quotient $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Divprinc}(X)$ est appelé *groupe de Picard* de X, et noté $\operatorname{Pic}(X)$. Deux diviseurs qui diffèrent d'un diviseur principal sont dits *lnéairement équivalents*.

Si $D \in \operatorname{Div}(X)$ est un diviseur de support fini, par exemple si X est compacte, son *degré* est $\deg(D) = \sum_{p\in\operatorname{supp}(D)} \deg_p(D) = \sum_{p\in X} \deg_p(D)$. Si X est compacte, on obtient ainsi un morphisme surjectif de groupes $\deg : \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$, son noyau est noté $\operatorname{Div}_0(X)$. On verra que $\operatorname{Divprinc}(X) \subset \operatorname{Div}_0(X)$.

1.6 Degré d'une application holomorphe propre, cas d'une fonction méromorphe

Rappel. Une application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. Ceci implique qu'elle est fermée. Évidemment, c'est toujours le cas si X est compact. Et si Y est compact, cela implique que X est compact.

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann.*

(i) Il existe un entier $d = \deg(f) \in \mathbb{N}^*$ avec la propriété suivante : pour tout $y \in Y$, l'image réciproque $f^{-1}(\{y\})$ est finie et la somme $\sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} \deg_x(f)$ est constante égale à d. On l'appelle le degré (global) *de f.*

(ii) Si $\deg(f) = 1$, f est un biholomorphisme.

(iii) L'ensemble des valeurs critiques $C(f)$ est localement fini.

Démonstration.

(i) La forme locale $z \mapsto z^d$ montre que tout point $x \in X$ a un voisinage U de x tel que $f^{-1}(\{f(x)\}) \cap U = \{x\}$. Donc $f^{-1}(\{y\})$ est localement fini pour tout $y \in Y$, et comme il est compact il est fini. De plus, si $f^{-1}(\{y_0\}) = \{x_1, \cdots, x_k\}$, il existe $U_1, \cdots, U_k$ voisinages disjoints des x_i et V voisinage de y tels que $f(U_i) = V$ et $f : U_i \to V$ est équivalente à $z \mapsto z^{\deg_{x_i}(f)} : \Delta \to \Delta$. Alors, quitte à diminuer V et les U_i [a posteriori cette restriction n'est pas nécessaire], $f^{-1}(\{y\})$ est contenu dans $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ pour $y \in V$. En effet, sinon on trouverait une suite $(x_n \in X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_k)$ telle que $f(x_n) \to y$. Donc $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact, fond son image réciproque aussi. Celle-ci contient la suite (x_n), donc quitte à passer à une sous-suite, celle-ci converge vers $x \in f^{-1}(y)$, et $x \notin U_1 \cup \cdots \cup U_k$ donc x est différent des x_i, contradiction.

Donc, pour y assez proche de y_0, $f^{-1}(\{y\}) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$, d'où

$$\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \deg_x(f) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap U_i} \deg_x(f).$$

Comme $f : U_i \to V$ est équivalente à $z \mapsto z^{\deg_{x_i}(f)} : \Delta \to \Delta$, la contribution de $f^{-1}(\{y\} \cap U_i)$ est exactement $\deg_{x_i}(f)$: en effet, si $g(z) = z^d : \Delta \to \Delta$, pour tout $w \in \Delta \backslash \{0\}$ on a $g^{-1}(\{w\}) = \{z_1, \cdots, z_d\}$ avec $\deg_{z_j} g = 1$. Donc $\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \deg_x(f)$ est localement constant en y, de valeur $\sum_{i=1}^{k} \deg_{x_i}(f)$. Une fonction localement constante sur Y est constante puisque Y est connexe, ce qui achève la preuve.

(ii) En effet, pour tout $f^{-1}(y)$ est réduit à un point x, avec $\deg_x(f) = 1$, donc f est un biholomorphisme local bijectif, c'est-à-dire un biholomorphisme.

(iii) Si $K \subset Y$ est un compact, $f^{-1}(K)$ est compact, donc $R(f) \cap f^{-1}(K)$ est fini, donc $C(f) \cap K$ est fini, cqfd.

Terminologie. Une application holomorphe propre de degré d est aussi appelée *revêtement (holomorphe) ramifié à d feuillets.*

Cas d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte. Soit f une fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann compacte, on a $\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(0)} \deg_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} \deg_p(f)$. Donc $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$, c'est encore vrai si f est constante non nulle et non infinie. On a donc la

Propriété. *Tout diviseur principal sur une surface de Riemann compacte est de degré nul. Donc la fonction degré est bien définie sur* $\mathrm{Pic}(X)$.

1.7 Fibré tangent, structure presque complexe

Rappels. Soit X une surface différentiable. Si $p \in X$, un vecteur tangent en p est une classe d'équivalence d'objets de la forme (p, φ, v) où $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est une carte définie au voisinage de p et $v \in \mathbb{R}^2$, avec

$$(p, \varphi_1, v_1) \sim (p, \varphi_2, v_2) \Leftrightarrow v_2 = D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)).v_1.$$

On note T_pX l'ensemble de ces vecteurs tangents, appelé *espace tangent en p*. Il est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux (plan réel) en posant

$$(*) \qquad \lambda[(p, \varphi, v)] + \mu[(p, \varphi, w)] = [(p, \varphi, \lambda v + \mu w)].$$

Le *fibré tangent* est la réunion disjointe $TX = \bigcup_{p \in X} T_pX$. Il est muni de la projection naturelle $\pi : TX \to X$ et d'un atlas $(\Phi : \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \varphi \circ \pi$ où φ est une carte, $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi : T_pX \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-linéaire, et

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(z, v) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z), D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)).v.$$

Si X est orientée, on se restreint aux cartes orientées et T_pX est alors un plan réel orienté.

Cas d'une surface de Riemann. Supposons maintenant que X est une surface de Riemann. On définit alors T_pX comme l'ensemble des classes d'équivalence $[\varphi, v]$, où cette fois φ est une carte holomorphe définie au voisnage de p, $v \in \mathbb{C}$, avec

$$(p, \varphi_1, v_1) \sim (p, \varphi_2, v_2) \Leftrightarrow v_2 = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(\varphi_1(p)).v_1.$$

La formule $(*)$ où cette fois λ et μ sont dans $\mathbb{C}$ le munit naturellement d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension un ou droite complexe. Le fibré tangent est défini de la même façon, il est muni de la projection π et d'un atlas $(\Phi : \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \varphi \circ \pi$ où φ est une carte holomorphe, $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi : T_pX \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(z, v) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z), (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(z)).v.$$

Structure presque complexe. Identifiant $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ on a une application naturelle de T_pX avec cette définition «complexe» sur T_pX avec la définition «réelle», qui est clairement une bijection. La multiplication par i dans T_pX apparaît alors comme une *structure complexe* sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel T_pX, c'est-à-dire un élément $J_p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_pX)$ tel que $J_p^2 = -\mathrm{Id}_{T_pX}$. De plus, J_p dépend de façon C^∞ de p c'est-à dire que l'application $(p,v) \mapsto (p, J_pv)$ est C^∞. Une telle application $p \mapsto J_p$ est appelée *structure presque complexe* sur la surface différentiable X. On peut aussi la voir comme un difféomorphsime J de TX qui préserve chaque fibre, est linéaire et vérifie $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Expression dans une carte holomorphe. Soit $z = x + iy$ une carte holomorphe, on a, dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_pX :

$$J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

On en déduit

$$dx \circ J = -dy\ ,\ dy \circ J = dx.$$

Proposition. *(i) Si $f : X \to Y$ est une application de classe C^1 entre surfaces de Riemann elle est holomorphe si et seulement si $D_pf : T_pX \to T_{f(p)}Y$ est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point $p \in X$.*

(ii) Si X est une surface de riemann, la structure presque complexe sur X détermine la structure de surface de Riemann.

Démonstration. (i) Par définition, f est holomorphe si et seulement si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe au sens usuel pour tout couple de cartes holomorphes (φ, ψ) sur X et Y. On sait que ceci équivaut à la $\mathbb{C}$-linéairité de $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_p = D\psi_{f(p} \circ Df_p \circ (D\varphi_p)^{-1}$ pour tout p dans le domaine de φ. Or $D\varphi_p$ et $D\psi_{f(p)}$ sont $\mathbb{C}$-linéaires d'après la définition des structures complexes sur T_pX et $T_{f(p)}X$. D'où le résultat.

(ii) Il suffit de montrer que cela détermine les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(U)$ où U est un ouvert de X : ceci résulte de (i) appliqué avec $Y = \mathbb{C}$.

Remarques. 1) Le théorème suivant est vrai mais pas évident (il est dû à Gauss (1825, cf [SG] pp. 46-50) dans le cas analytique réel, à A. Korn et L. Lichtenstein (1914-1916, références dans [SG]) dans le cas C^∞, et admet une version mesurable due à Ahlfors et Bers, cf. [Ahlfors]) :

Théorème. *Soit X une surface différentiable munie d'une structure presque complexe. Alors c'est une surface de Riemann. En particulier, toute surface riemannienne (=munie d'une métrique riemannienne] orientée est une surface de Riemann.*

Le «en particulier» vient de ce qu'un plan réel euclidien orienté est une droite complexe : la multiplication par i est le quart de tour dans le sens positif. Concrètement, ceci veut dire que toute métrique riemannienne sur une surface admet localement des coordonnées *confomes* ou *isothermes*, dans lesquelles la métrique est $ds^2 = f(x,y)(dx^2 + dy^2)$. Si la surface est orientée, $x + iy$ est alors une carte holomorphe (pourvu qu'elle soit positive, sinon on prend $x - iy$). Sous cette forme, le théorème apparaîtra peut-être dans le cours de Géométrie différentielle.

2) On peut montrer (A.M. Garsia 1961-1962, références dans [SG]) que toute surface de Riemann se réalise comme surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ avec la structure riemannienne induite. En revanche, on n'obtient pas ainsi toute surface riemannienne puisqu'une surface compact dans $\mathbb{R}^3$ a forcément des points où la courbure est positive.

1.8 Formes différentielles

Rappels. Si X est une surface différentiable, on peut définir l'algèbre différentielle $\Omega^*(X,\mathbb{R}) = \Omega^0(X,\mathbb{R}) \oplus \Omega^1(X,\mathbb{R}) \oplus \Omega^2(X,\mathbb{R})$ des formes différentielles de classe C^∞. Rappelons qu'une k-forme différentielle est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme k-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p c'est-à-dire que si φ est une carte C^∞, $(p, v_1, \cdots, v_k) \mapsto \alpha_p((T\varphi)^{-1}(v_1), \cdots, (T\varphi)^{-1}(v_k))$ est C^∞. Pour $k = 1$, on peut aussi la considérer comme une fonction C^∞ de TX dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire sur chaque fibre T_pX. Les formes à support compact seront notées $\Omega_c^*(X,\mathbb{R})$.

Puisqu'on est sur une surface, k prend les valeurs 0, 1 et 2. Concrètement :

- une zéro-forme $f \in \Omega^0(X,\mathbb{R})$ n'est autre qu'une fonction C^∞ de X dans $\mathbb{R}$
- une un-forme $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p
- une deux-forme $\omega \in \Omega^2(X,\mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $\omega_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p.

Dans une carte (aussi appelée systèmes de coordonnées locales) C^∞, $\varphi = (x, y) : U \to \mathbb{R}^2$, on peut écrire $\alpha = g(x, y)dx + h(x, y)dy$, $\omega = k(x, y)dx \wedge dy$ où g, h et k sont des fonctions C^∞ sur $\varphi(U)$. Noter que le signe de k (élément de $\{-1, 0, 1\}$) en tout point ne dépend pas de la carte holomorphe, on l'appelle signe de ω.

On a de plus le produit extérieur $\wedge : \Omega^1(X, \mathbb{R}) \times \Omega^1(X, \mathbb{R}) \to \Omega^2(X, \mathbb{R})$, et la différentielle d qui envoie $\Omega^0(X, \mathbb{R})$ dans $\Omega^1(X, \mathbb{R})$ et $\Omega^1(X, \mathbb{R})$ dans $\Omega^2(X, \mathbb{R})$ et vérifie $d \circ d = 0$. En coordonnées locales [$g(x, y) = g \circ \varphi$, etc]:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(g(x,y)dx + h(x,y)dy) \wedge (g'(x,y)dx + h'(x,y)dy) = (g(x,y)h'(x,y) - h(x,y)g'(x,y))dx \wedge dy \\ &d(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \ , \ d(g(x,y)dx + h(x,y)dy) = (\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y})dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Complexification. Supposons maintenant que X est une surface de Riemann. En complexifiant, on obtient l'algèbre différentielle des *formes différentielles complexes*, une k-forme complexe étant la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme k-$\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p. On obtient $\Omega^*(X, \mathbb{C}) = \Omega^0(X, \mathbb{C}) \oplus \Omega^1(X, \mathbb{C}) \oplus \Omega^2(X, \mathbb{C})$, où

- une zéro-forme $f \in \Omega^0(X, \mathbb{C})$ n'est autre qu'une fonction C^∞ de X dans $\mathbb{C}$
- une un-forme $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p
- une deux-forme $\omega \in \Omega^2(X, \mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $\omega_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p.

Les formes complexes à support compact seront notées $\Omega^*_{\mathbb{C},c}(X)$.

Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy : U \to \mathbb{C}$, on a $\alpha = gdx + hdy$ et $\omega = kdx \wedge dy$, où cette fois g, h et k sont dans $C^\infty(U, \mathbb{C})$, et les formules $(*)$ restent valables. Nous allons exprimer tout cela en remplaçant x et y par z et $\overline{z}$. On a d'abord $dx = \Re dz = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z})$, $dy = \Im dz = \frac{i}{2}(-dz + d\overline{z})$, donc la un-forme $\alpha = g(x, y)dx + h(x, y)dy$ s'écrit

$$\alpha = \frac{g(z) - ih(z)}{2}dz + \frac{g(z) + ih(z)}{2}d\overline{z} =: \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}.$$

Le terme $\alpha^{1,0}$ est la composante $\mathbb{C}$-linéaire de α et $\alpha^{0,1}$ est la composante anti-$\mathbb{C}$-linéaire. Ils sont définis de façon intrinsèque :

$$\alpha^{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha \circ J) \ , \ \alpha^{0,1} = \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha \circ J),$$

où J est la structure presque complexe, vue comme un difféomorphisme de TX, et α est considérée comme une fonction de TX (ou TU) dans $\mathbb{C}$. En particulier, si $f(z) \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ on a

$$d(f(z)) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = df^{1,0} + df^{0,1},$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}).$$

On notera $\Omega^{1,0}(X)$ et $\Omega^{0,1}(X)$ les espaces de formes $\mathbb{C}$-linéaires et anti-$\mathbb{C}$-linéaires, c'est-à-dire d'écriture locale (dans une carte holomorphe) gdz et $hd\overline{z}$ respectivement. Une forme $\alpha \in \Omega^{1,0}(X)$ (resp. $\Omega^{0,1}(X)$) est dite *de type* $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). On a donc une décomposition naturelle

$$\Omega^1(X, \mathbb{C}) = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X)$$

en deux sous-espaces vectoriels complexes, le second étant le conjugué du premier.

En particulier, si $f \in \Omega^0(X, \mathbb{C})$, on note $(df)^{1,0} = \partial f$, $(df)^{0,1} = \overline{\partial} f$. Dans une carte holomorphe, on a

$$\begin{aligned} \partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz \ , \ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \\ \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z}dz \ , \ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}). \end{aligned}$$

Donc f esty holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.

Ensuite, $dz \wedge dz = 0 = d\overline{z} \wedge d\overline{z}$ et $dz \wedge d\overline{z} = -2idx \wedge dy = -d\overline{z} \wedge dz$, d'où

$$\begin{aligned} d(g(z)dz + h(z)d\overline{z}) &= dg \wedge dz + dh \wedge d\overline{z} = \big(\frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\big) \wedge dz + \big(\frac{\partial h}{\partial z}dz + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\big) \wedge d\overline{z} \\ &= \big(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\big) dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

1.9 Formule de Stokes

Soit $K \subset X$ un domaine (fermé) à bord de classe C^1 par morceaux dans une surface de Riemann, c'est-à-dire une partie K dont la frontière ∂K, appelée bord, est contenue dans une réunion localement finie de courbes de classes C^1. Rappelons que la surface est orientée, ∂K aussi par la règle «K à gauche». Si $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$ est une forme différentielle de classe C^1 à support compact, on a

$$\iint_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha.$$

Cette formule s'étend clairement au cas d'une forme à valeurs complexes. En particulier, si $K = X$ de sorte que $\partial K = \emptyset$, il vient $\iint_X d\alpha = 0$.

1.10 Différentielles holomorphes et méromorphes, résidus

Définitions. Une *différentielle holomorphe* sur une surface de Riemann X est une un-forme complexe $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$ dont l'écriture dans toute carte holomorphe est de la forme $g(z)dz$ où g est une fonction holomorphe usuelle. Il suffit que ce soit vrai pour chaque point pour une carte holomorphe $\varphi = z$ définie au voisinage de ce point : en effet, si $\psi = w$ est une autre carte holomorphe on a localement le changement de cartes $z = f(w)$ où f est une fonction holomorphe usuelle. Donc $g(z)dz = g(f(w))f'(w)dw$, ce qui est de la forme voulue.

Proposition. *Soit $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$. Alors ω est holomorphe si et seulement si $d\omega = 0$.*

Démonstration. Dans une carte holomorphe, $\alpha = f(z)dz$, d'où $d\alpha = -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge dz$, donc $(d\alpha = 0)$ équivaut à $(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0)$ soit (f holomorphe) soit (ω holomorphe).

On notera Ω^1_X l'espace des différentielles holomorphes. Attention à ne pas le confondre avec $\Omega^1(X)$, espace des (un-formes) différentielles réelles C^∞.

Exemples.

1) La forme dz définie sur $\mathbb{C}$ descend sur le tore $T_z = \mathbb{C}/\Lambda$, on la note encore dz. Elle est clairement holomorphe. Noter qu'elle ne s'annule jamais. Donc si $\omega \in \Omega^1_{T_z}$, on peut écrire $\alpha = fdz$ avec $f \in \mathcal{O}(T_z)$. Comme T_z est compact et connexe, f est constante : $\Omega^1_{T_z} = \mathbb{C}dz$.

2) Sur $X_{x^3+px+q} \subset \mathbb{C}^2$, $\frac{dx}{y}$ définit une forme holomorphe jamais nulle (exercice). On verra qu'elle s'étend en une forme holomorphe jamais nulle quand on rajoute le point à l'infini.

Définitions. Une *différentielle méromorphe* sur une surface de Riemann est une différentielle holomorphe ω définie sur $X \setminus P$ où P est un sous-ensemble localement fini, telle que, si $\varphi = z$ est une uniformisante en $p \in D$, on a localement $\omega = g(z)dz$ où f a un pôle en z. Il est clair qu'il suffit que ce soit vrai pour une uniformisante, et que l'ordre k du pôle de f ne dépend pas de l'uniformisante. On dit que ω a un *pôle d'ordre* k en p.

Autrement dit, en tout point $p \in X$ on a l'expression locale $\omega = f(z)dz$ où f est méromorphe. Si ω est non nulle, on peut définir le degré $\deg_p(\omega) = \deg_0(f)$, qui est indépendant de l'uniformisante : si w est une autre uniformisante avec $z = \psi(w)$, $\omega = (f \circ \psi(w))\psi'(w)dw$. Comme $\psi'(w) \neq 0$, $\deg_0(f \circ \psi) = \deg_0(f)$. En un pôle, le dedré est l'opposé de l'ordre du pôle. On en déduit le diviseur d'une différentielle méromorphe non nulle : $\mathrm{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \deg_p(f)p$.

On notera $\mathcal{M}^1_X$ l'espace des différentielles méromorphes.

Exemple. Si f est une fonction méromorphe non constante, la forme différentielle *df* sur le complémentaire des pôles donne clairement une différentielle méromorphe sur la surface tout entière.

Remarque. Comme indiqué plus haut, nous verrons toute surface de Riemann (compacte ou non) admet une fonction méromorphe non constante, et a fortiori une forme méromorphe non constante.

Exemple. Si $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $f = z$, c'est-à-dire l'identité de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dz a un unique pôle, qui est en ∞ et d'ordre deux : en effet, dans l'uniformisante $w = \frac{1}{z}$, $dz = -\frac{dw}{w^2}$. Donc toute forme méromorphe non nulle a un degré -2, et en particulier n'est jamais holomorphe. Autre preuve : toute forme holomorphe est de la forme fdz où f est holomorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et a un zéro au moins double en ∞. Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est compact, $f = 0$.

Proposition. *Si X est une surface de Riemann et ω est une différentielle méromorphe non constante, l'application $f \mapsto f\omega$ est un isomorphisme des fonctions méromorphes sur les différentielles méromorphes. Si $f \neq 0$, on a $\operatorname{div}(f\omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega)$.*

Démonstration. Localement, on a $f\omega = f(z)g(z)dz$, et le produit de deux fonctions méromorphes est méromorphe, donc $f\omega$ est méromorphe. L'application est linéaire injective, et si ω' est une différentielle méromorphe, on peut définir $f = \frac{\omega'}{\omega}$: en un point où ω et ω' n'ont pas de pôle et $\omega_p \neq 0$, ω_p et ω'_p sont deux formes $\mathbb{C}$-linéaires définies sur une droite complexe, avec $\omega_p \neq 0$, donc il existe un unique $f(p) \in \mathbb{C}$ tel que $\omega'_p = f(p)\omega_p$. La fonction f ainsi définie hors d'un ensemble localement fini est méromorphe, car dans une carte holomorphe, $\omega = g(z)dz$, $\omega' = h(z)dz$, on a $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ qui est méromorphe.

Corollaire. *Tous les diviseurs* $\operatorname{div}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{M}^1_X \setminus \{0\}$*, sont équivalents modulo* $\operatorname{Divprinc}(X)$*. Si X est compacte, ils ont donc tous le même degré.*

Résidu en un point. Soit ω une forme méromorphe. Dans une uniformisante z en un point p, elle s'écrit $\omega = g(z)dz$ où g est méromorphe. Le *résidu* de ω en p est $\text{rés}_p(\omega) = a_{-1}$ si $\sum_{n\geq -k} a_n z^n$ est le développement en série de Laurent de g. On peut montrer algébriquement que c'est indépendant de l'uniformisante, mais c'est assez pénible. Pour prouver cette indépendance, on considère un disque compact D de classe C^1 contenu dans le domaine de définition de z et contenant p dans son intérieur, donc

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{z(\partial D)} g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\omega.$$

Donc le terme de droite ne dépend pas de D. Or si w est une autre uniformisante et si D est assez petit, D est contenu dans le domaine de définition de w. Ceci montre li'ndépendance, et la propriété

$$\text{rés}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\omega$$

pour tout disque D de classe C^1 contenu dans un domaine de définition d'une uniformisante. Plus généralement, si γ est un lacet C^1 par morceaux contenu dans un tel domaine, on peut définir $\text{ind}_p(\gamma) = \text{ind}_0 z(\gamma)$, et l'on a

$$\int_\gamma \omega = 2\pi i\,\text{rés}_p(\omega).$$

Le résidu $\text{rés}_p(\omega)$ est toujours nul en un point où ω est holomorphe, et non nul en un pôle simple. L'application rés_p est un morphisme $\mathcal{M}^1_X \to \mathbb{C}$, on verra qu'il est toujours surjectif c'est-à-dire qu'il existe toujours une différentielle méromorphe en un point donné (et peut-être d'autres pôles).

Propriété. *On a $\text{rés}_p(\omega) = 0$ si et seulement si ω admet une primitive méromorphe sur un voisinage de p.*

Démonstration. L'expression intégrale montre que c'est une condition nécessaire. Elle est suffisante car tout lacet dans D est homotope à $n.\partial D$. Plus concrètement : si $\text{rés}_p(\omega) = 0$, dans une uniformisante on a

$$\omega = \sum_{n\neq -1} a_n z^n dz = d\big(\sum_{n\neq -1} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\big).$$

Terminologie. Classiquement, les différentielles holomorphes sont dites *de première espèce*, celles qui sont méromorphes avec résidus nuls *de seconde espèce*, les différentielles méromorphes *de troisième espème espèce.* Nous n'utiliserons pas cette terminologie (peu parlante), mais appellerons les formes à résidus nuls formes *sans résidus*, et noterons leur espace par $\mathcal{M}^{1,sr}_X$, de sorte que la différentielle envoie $\mathcal{M}(X)$ dans $\mathcal{M}^{1,sr}_X$.

Théorème des résidus. *Si ω est une différentielle méromorphe sur une surface de Riemann compacte X, on a $\sum_{p\in X} \text{rés}_p(\omega) = 0$ (la somme est finie puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles).*

Démonstration. Si $p_1, \cdots, p_n$ sont les pôles de ω, soient (U_j, z_j) des uniformisantes, et $K_j = z_j^{-1}(\overline{\Delta}_\varepsilon) \subset U_j$, où ε est assez petit pour que z_j soit un difféomorphisme de $K_j(\varepsilon)$ sur $\overline{\Delta}_\varepsilon$ et que les $K_j(\varepsilon)$ soient disjoints. Soit $\rho_j \in C^\infty(X, [0,1])$ telle que $\rho_j = 1$ sur $K_j(\frac{\varepsilon}{2})$ et 0 hors de $K_j(\varepsilon)$. Alors la fonction $f = 1 - (\rho_1 + \cdots + \rho_n)$ s'annule près de chaque p_j, donc $f\omega$ est lisse sur X. Par Stokes, $0 = \iint_X d(f\omega) = -\sum_{j=1}^n \iint_X d(\rho_j\omega)$. Comme $\operatorname{supp}(d(\rho_j\omega)) \subset K_j(\varepsilon) \setminus \operatorname{Int}(K_j(\frac{\varepsilon}{2}))$, on a

$$\begin{aligned}\iint_X d(\rho_j\omega) &= \iint_{K_j(\varepsilon)\setminus \operatorname{Int}(K_j(\frac{\varepsilon}{2}))} d(\rho_j\omega) = \int_{\partial K_j(\varepsilon)} \rho_j\omega - \int_{\partial K_j(\frac{\varepsilon}{2})} \rho_j\omega \\ &= -\int_{\partial K_j(\frac{\varepsilon}{2})} \omega = -2\pi i \ \text{rés}_{p_j}(\omega),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarques. 1) On peut donner une autre preuve qui demande plus de topologie mais est peut-être un peu plus parlante. Il existe une triangulation de X par des triangles T_j, $j = 1, \cdots, n$ de classe C^1 contenus dans des domaines de cartes holomorphes, telle que les pôles sont contenus dans $\bigcup_{j=1}^n \operatorname{Int}(T_j)$, avec au plus un pôle dans $\operatorname{Int}(T_j)$. Alors

$$\sum_{p\in X} \text{rés}_p(\omega) = \sum_{j=1}^n 2\pi i \int_{\partial T_j} \omega_j,$$

ce qui vaut zéro car chaque côté de T_j est compté une fois dans chaque sens.

2) Pour une preuve algébrique de cette formule, cf. [Se1] pp. 32-35.

1.11 Étoile de Hodge et produit scalaire sur les un-formes réelles

Définition. Si X est une surface de Riemann, l'*étoile de Hodge* $*$ est l'automorphisme de $\Omega^1(X, \mathbb{C})$ défini par $*\alpha = -\alpha \circ J$ [le signe moins sera justifié plus tard]. Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy$, on a

$$\begin{aligned}&*dx = dy \ , \ *dy = -dx \\ &*dz = dy - idx = -idz \ , \ *d\overline{z} = dy + idx = id\overline{z}.\end{aligned}$$

En effet, dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_pX, on a

$$\begin{aligned}*dx(\frac{\partial}{\partial x}) &= -dx(J\frac{\partial}{\partial x}) = -dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0 \\ *dx(\frac{\partial}{\partial y}) &= dx(J\frac{\partial}{\partial y}) = -dx(-\frac{\partial}{\partial x}) = 1.\end{aligned}$$

Donc $*dx = dy$, d'où $*dy = -dx$ puisque $*^2 = -\mathrm{Id}$.

Définition. Une un-forme $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{C})$ est dite *cofermée* si $d(*\alpha) = 0$. Si $\alpha = fdx + gdy$ avec $dy = *dx$, cela donne $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

Produit scalaire sur $\Omega_c^1(X)$. Si α, β sont deux un-formes réelles sur X à support compact, on définit

$$(\alpha, \beta) = \alpha \wedge *\beta \in \Omega^2(X).$$

On notera $(\alpha, \alpha) = ||\alpha||^2$ (attention, $||\alpha||$ n'a pas de sens). Dans une carte holomorphe :

$$(gdx + hdy, g'dx + h'dy) = (gdx + hdy) \wedge (-h'dx + g'dy) = (gg' + hh')dx \wedge dy.$$

En particulier, $||gdx + hdy||^2 = (g^2 + h^2)dx \wedge dy$: ceci justifie le signe moins dans la définition de $*$. Si α et β sont à support compact, puisque X est une surface orientée on en déduit un produit scalaire sur $\Omega_c^1(X)$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(X)} = \iint_X (\alpha, \beta) = \iint_X \alpha \wedge *\beta.$$

La norme associée sera notée

$$||\alpha||_{L^2} = \langle \alpha, \alpha \rangle_{L^2}^{1/2} = \Big(\iint_X ||\alpha||^2\Big)^{1/2} = \Big(\iint_X \alpha \wedge *\alpha\Big)^{1/2}.$$

On peut étendre ces définitions à l'espace vectoriel des un-formes *de carré intégrable*, c'est-à-dire telles que $\iint_K \alpha \wedge *\alpha \leq C < \infty$ pour tout compact $K \subset X$, avec C indépendant de K. Une telle forme a un support qui est une réunion dénombrable de compacts (K_n) (rappelons que nous ne savons pas encore que X est réunion dénombrable de compacts). Le produit scalaire de deux formes de carré intégrable est alors défini comme la limite des $\iint_{K_n}(\alpha, \beta)$. Il est facile de voir que ça existe et ça ne dépend pas de (K_n).

Remarques. 1) Pour l'instant, nous ne définissons le produit scalaire que sur les un-formes réelles. Bien sûr, il admet une extension hermitienne aux un-formes complexes : $\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \Re\Big(\iint_X \alpha \wedge * \overline{\beta} \Big)$, mais nous n'aurons besoin de cette extension qu'à la fin du cours.

2) Nous n'utiliserons pas la théorie de la mesure, en particulier l'espace L^2 : toutes nos fonctions ou formes différentielles seront continues.

2 Fonctions et formes harmoniques

2.1 Laplacien et fonctions harmoniques

Définitions. Soit X une surface de Riemann. Le *laplacien* d'une fonction $u \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ est la 2-forme différentielle
$$\Delta u = d(*df) = -d(du \circ J) \in \Omega^2(X,\mathbb{R}).$$
Ceci garde un sens si u n'est que de classe C^2, comme forme seulement continue. Si $\Delta u = 0$, on dit que u est *harmonique.*

Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy$, on a
$$\Delta u = d\big(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\big) = \big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\big)dx \wedge dy.$$

Noter que le laplacien est défini de façon intrinsèque comme forme différentielle, alors que la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dépend du choix de la carte holomorphe. Si X est un ouvert de $\mathbb{C}$, on retrouve bien la définition habituelle des fonctions harmoniques. Les propriétés classiques des fonctions harmoniques sur les ouverts de $\mathbb{C}$ s'étendent aisément :

Propriétés. *Soit X une surface de Riemann.*

(i) Soit $u \in C^2(X,\mathbb{R})$. Alors u est harmonique si et seulement si u est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à une constante près.

(ii) Soit $u : X \to \mathbb{R}$ harmonique, alors elle vérifie le principe du maximum : *si elle a un extrémum local en un point, elle est constante. En particulier, toute fonction harmonique sur une surface de Riemann compacte est constante.*

(iii) Les fonctions harmoniques sont invariantes par les applications holomorphes : si u harmonique sur X et $f : Y \to X$ est holomorphe, $u \circ f$ est harmonique sur Y.

(iv) Si $U \subset X$ est un ouvert connexe d'adhérence compacte, avec $\mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$, et si u_1 et u_2 sont deux fonctions continues sur $\overline{U}$ qui coïncident sur $\mathrm{Fr}(U)$ et sont harmoniques dans U, alors $u_1 = u_2$. Ceci s'applique en particulier au cas où $U = \mathrm{Int}(K)$ où K est un domaine connexe à bord C^1.

Démonstration. (i) et (ii) sont des énoncés locaux connues pour des fonctions sur des ouverts de $\mathbb{C}$, donc ils passent à une surface de Riemann en utilisant une carte holomorphe.

(iii) Ceci résulte de la caractérisation (i).

(iv) Par symétrie il suffit de prouver $u_1 - u_2 \leq 0$. Puisque $\overline{U}$ est compact la fonction $u_1 - u_2$ a un maximum en un point p. Si $p \in U$, $u_1 - u_2$ est constante sur U donc sur $\mathrm{Fr}(U)$, donc est nulle. Si $p \in \mathrm{Fr}(U)$, on a $u_1 - u_2 \leq (u_1 - u_2)(p) = 0$, cqfd.

2.2 Fonctions harmoniques et différentielles holomorphes

Une fonction harmonique $u : X \to \mathbb{R}$ sur une surface de Riemann est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe $f = u + iv$, celle-ci étant définie à une constante près. Noter que, dans une carte holomorphe $z = x + iy$, les équations de Cauchy-Riemann donnent
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = *du.$$

Définition. Une *forme harmonique* [de degré un] sur une surface de Riemann X est une un-forme fermée qui est localement la différentielle d'une fonction harmonique. On note $\mathcal{H}^1(X,\mathbb{R})$ l'espace des formes harmoniques sur X.

Proposition. *Soit $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) α est harmonique

(ii) α est fermée et cofermée : $d\alpha = d(*\alpha) = 0$

(iii) $\alpha + i * \alpha$ est holomorphe.

De plus, l'application $\alpha \mapsto \alpha + i * \alpha$ est un isomorphisme entre les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathcal{H}^1(X,\mathbb{R})$ et Ω^1_X, d'inverse $\omega \mapsto \Re\omega$.

Démonstration. Le résultat est local, donc on peut supposer $X = \Delta$ et $\alpha = fdx+gdy$. Alors $*\alpha = -gdx+fdy$ et $\alpha + i*\alpha = (f+ig)d(x+iy)$, donc

$$d\alpha = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy \ , \ d(*\alpha) = (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})dx \wedge dy.$$

Donc (ii) équivaut aux équations de Cauchy-Riemann pour $f+ig$, donc à (iii). Cela implique alors $(f+ig)dz = dh$ avec h holomorphe, donc $\alpha = d(\Re h)$ est harmonique, d'où (i). Et si (i) est vrai, $\alpha = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, avec u harmonique. Donc

$$d(*\alpha) = d(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dx \wedge dy = 0.$$

Comme $d(du) = 0$, (ii) est vrai. Donc (i) et (ii) sont équivalents

Ensuite, si (i)-(ii) sont vrais, $\omega := \alpha + i*\alpha = h(z)dz$ est une différentielle holomorphe, donc (iii) est vrai. Réciproquement, si $\omega = h(z)dz$ est une différentielle holomorphe, elle a une primitive holomorphe $k(z) = \int_0^z h(\zeta)d\zeta$ [ou $k(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$ si $h(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$], et $\alpha = \Re\omega = d(\Re k)$ est une forme harmonique.

Donc l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha \in \mathcal{H}^1(X,\mathbb{R}) \mapsto \alpha + i*\alpha$ est à valeurs dans Ω^1_X. Elle est clairement injective, et si $\omega \in \Omega^1_X$ est donnée, alors $\alpha = \Re\omega$ est dans $\mathcal{H}^1(X,\mathbb{R})$ et $\omega - (\alpha + i*\alpha)$ est une forme holomorphe de partie réelle nulle, donc nulle.

2.3 Intégrale et principe de Dirichlet

Définitions. Soit $u : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un domaine (compact ou non) dans une surface de Riemann. *L'intégrale de Dirichlet* est

$$\mathcal{D}_K(u) = ||du||^2_{L^2(K)} = \iint_K ||du||^2 = \iint_K du \wedge *du \in [0,+\infty].$$

Nous noterons $C^1_{\mathcal{D}<\infty}(K)$ l'espace des fonctions C^1 sur un domaine $K \subset X$ telles que $\mathcal{D}(X) < \infty$ Si $u, w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(K)$, on peut définir

$$\mathcal{D}'_K(u,w) = \langle du, dw\rangle_{L^2(K)} = \iint_X (du, dw).$$

On a alors la propriété

$$\mathcal{D}_K(u+w) = \mathcal{D}_K(u) + 2\mathcal{D}'_K(u,w) + \mathcal{D}_K(w).$$

Proposition (principe de Dirichlet)**.** *On suppose que $K \subset X$ est un domaine compact à bord C^2, avec ∂K non vide. Si $u \in C^2(K,\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) u est harmonique sur K.

(ii) u minimise $\mathcal{D}_K$ sur $C^1_u(K,\mathbb{R}) := \{v \in C^1(K,\mathbb{R}) \mid v_{|\partial K} = u\}$.

(iii) Pour tout $w \in C^1_0(K)$, on a $\mathcal{D}'_K(u,w) = 0$.

Démonstration. *(i) ⇔ (iii)* Si $w \in C^1_0(K,\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_K(u,w) = \iint_K (du,dw) &= \iint_K dw \wedge *du = \iint_K d(w*du) - wd(*du) \\ &= \int_{\partial K} w*du - \iint_K w\Delta u \ \text{ par Stokes et le fait que } d*du = \Delta u \\ &= -\iint_K w\Delta u \ \text{ car } w = 0 \text{ sur } \partial K.\end{aligned}$$

Ceci est nul pour tout w si et seulement si $\Delta u = 0$, cqfd.

(ii) ⇔ (iii) Puisque $C^1_f(K,\mathbb{R}) = f + C^1_0(K,\mathbb{R})$, (ii) équivaut à : pour tout $w \in C^1_0(K,\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \mathcal{D}_K(u+tw) = \mathcal{D}_K(u) + 2t\mathcal{D}'_K(u,w) + t^2\mathcal{D}_K(w)$ a un minimum en 0. Puisque $\mathcal{D}_K(w) \geq 0$, ceci équivaut à (iii).

Remarque. L'équivalence entre (ii) et (iii) reste vraie avec la même preuve si ∂K et u sont seulement supposés de classe C^1. L'implication de (i) sur (iii) donc sur (ii) reste aussi valable. En effet, supposons que u est harmonique sur $\mathrm{Int}(K)$, soit (K_n) une suite croissante de domaines lisses compacts dans $\mathrm{Int}(K)$ dont la réunion est $\mathrm{Int}(K)$, le bord de K_n convergeant C^1 vers celui de K. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_K(u,w) &= \iint_K d(w*du) = \lim_n \iint_{K_n} d(w*du) = \lim_n \int_{K_n} w*du - \iint_{K_n} w\Delta u \\ &= \lim_n \int_{K_n} w*du = 0 \text{ puisque } \partial K_n \to \partial K \text{ et } w|\partial K = 0.\end{aligned}$$

On verra qu'il en est de même pour l'implication de (ii)-(iii) sur (i).

2.4 Formule de Poisson

Soit u une fonction réelle continue sur le disque fermé $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$ et harmonique dans l'intérieur. Nous allons exprimer $u(z)$ pour $z \in \Delta$ à partir des valeurs de la restriction $u_{|\partial\Delta}$. Pour cela on part de la formule de la moyenne

$$u(0) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}$$

[nous l'écrivons ainsi pour qu'on voie clairement que si $u = 1$ ça donne 1, et aussi que $\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}$ est une forme réelle sur $T\partial\Delta$.] On utilise l'automorphisme biholomorphe du disque, $\varphi_z(\zeta) = \frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}$ qui envoie 0 sur z et est holomorphe au voisinage du disque fermé. Par invariance holomorphe des fonctions harmoniques, on a

$$u(z) = (u \circ \varphi_z)(0) = \int_{\partial\Delta} u(\varphi_z(\zeta'))\frac{d\zeta'}{2\pi i\zeta'}.$$

Posant $\zeta = \varphi_z(\zeta')$, soit $\zeta' = \varphi_{-z}(\zeta)$, il vient $d\zeta' = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\zeta)^2}d\zeta$, donc

$$\begin{aligned}u(z) &= \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\frac{1-\bar{z}\zeta}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{2\pi i} = \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}\frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \quad \text{puisque } \zeta\bar{\zeta} = 1.\end{aligned}$$

En termes réels :

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Cette dernière formule est la *formule de Poisson en dimension* 2. On a aussi

$$u(z) = \Re\Big(\int_{\partial\Delta} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}\Big).$$

En effet, puisque $u(\zeta)$ est réel et que $\frac{d\zeta}{2\pi i} = \frac{d\theta}{2\pi}$ est une forme réelle sur $\partial\Delta$, il suffit de calculer

$$\Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}+\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\Big) = \frac{1}{2}\frac{2\zeta\bar{\zeta}-2z\bar{z}}{|\zeta-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}.$$

2.5 Extension harmonique

Définition. Soit X une surface de Riemann. Un *disque conforme* sur X est un domaine compact $D \subset X$ tel qu'il existe une carte holomorphe l'envoyant sur le disque fermé $\overline{\Delta}$. Clairement, tout point de X est dans l'intérieur d'un tel disque conforme.

Théorème. *Soit $D \subset X$ un disque conforme dans une surface de Riemann. Si $u : \partial D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, il existe une unique fonction u^D continue de D dans $\mathbb{R}$, telle que $u^D|\partial D = u$ et u^D est harmonique sur* $\mathrm{Int}(D)$. *On appelle u^D* l'extension harmonique *de u à D.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé l'unicité comme conséquence du principe du maximum. Reste à montrer l'existence. Par invariance holomorphe, on se ramène au cas où $X = \mathbb{C}$ et $D = \overline{\Delta}$. On définit alors $u^{\overline{\Delta}}$ sur Δ par la formule de Poisson :

$$u^{\overline{\Delta}}(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = \Re\Big(\int_{\partial\Delta} u(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \Big).$$

Dans la seconde forme, la fonction entre parenthèses est holomorphe en z comme intégrale d'une fonction holomorphe en z, donc $u^{\overline{\Delta}}$ est harmonique sur Δ. Il reste à montrer que quand z tend vers $e^{i\theta_0} \in \partial\Delta$, $u^{\overline{\Delta}}(z)$ tend vers $u(e^{i\theta_0})$. La formule de Poisson appliquée à la fonction 1 montre qu'on a $\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$, donc

$$|u^{\overline{\Delta}}(z) - u(e^{i\theta_0})| = \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta_0})| \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$. Découpons $[0,2\pi]$ en les deux arcs $A_1 = \{\theta \mid \min_{k\in\mathbb{Z}} |\theta-\theta_0-2k\pi| \leq \varepsilon\}$ et $A_2 = [0,2\pi] \setminus \mathrm{Int}(A_1)$. Notons $m_1(\varepsilon) = \max_{\theta\in A_1} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta_0})|$ et $m_2(z,\varepsilon) = \min_{\theta\in A_2} |e^{i\theta} - z|$. Il vient

$$\begin{aligned} |u^{\overline{\Delta}}(z) - u(e^{i\theta_0})| &\leq \int_{A_1} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta_0})| \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{A_2} |u(e^{i\theta}) - u(1)| \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq m_1(\varepsilon) + 2\frac{||u||_\infty (1-|z|^2)}{m_2(z,\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Quand z tend vers $e^{i\theta_0}$, $m_2(z,\varepsilon)$ tend vers $|1-e^{i\varepsilon}| > 0$, donc le second terme tend vers 0, donc $|u^{\overline{\Delta}}(z) - u(e^{i\theta_0})| \leq m_1(\varepsilon) + \varepsilon$ si $|z - e^{i\theta_0}|$ est assez petit. Puisque u est continue, $m_1(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε, ce qui achève la preuve.

Autre construction. Soient $c_n = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\overline{\zeta}^n \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}$ les coefficients de Fourier positifs, de sorte que

$$u(e^{i\theta}) = c_0 + 2\Re \sum_{n=1}^\infty c_n e^{in\theta} = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

[on ne suppose pas que la série converge]. Si $z \in \Delta$, on pose $U(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta)$, soit $U(z) = c_0 + 2\Re \sum_{n=1}^\infty c_n z^n$. Puisque les c_n sont bornés, la série converge et définit une fonction harmonique sur Δ. Montrons que $U = u^{\overline{\Delta}}$, c'est-à-dire que $U_N(z) = c_0 + 2\Re \sum_{n=1}^N c_n z^n$ converge vers $u^{\overline{\Delta}}(z)$:

$$\begin{aligned} U_N(z) &= \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\big(1 + 2\Re \sum_{n=1}^N \overline{\zeta}^n z^n\big) \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} = \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\big(1 + 2\frac{z\overline{\zeta} - (z\overline{\zeta})^{N+1}}{1-z\overline{\zeta}}\big) \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \\ &= \int_{\partial\Delta} u(\zeta)\big(1 + \frac{2z}{\zeta - z}\big) \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} + R\ ,\ |R| \leq \frac{2||u||_\infty |z|^{N+1}}{1-|z|}. \end{aligned}$$

Comme $1 + \frac{2z}{\zeta-z} = \frac{\zeta+z}{\zeta-z}$, le premier terme est $u^{\overline{\Delta}}(z)$, donc $|U_N(z) - u^{\overline{\Delta}}(z)| \leq \frac{2||u||_\infty |z|^{N+1}}{1-|z|}$, ce qui tend vers 0 quand $N \to +\infty$.

Remarque. Le fait que $U(z)$ tend vers $u(e^{i\theta_0})$ si z tend vers $e^{i\theta_0}$ est le théorème de sommabilité d'Abel (dans une version où la convergence vers $e^{i\theta_0}$ est quelconque, pas seulement radiale ou non tangentielle, cf. [Zy] pp. 96-97). Comme celui de Fejér, il est valable dès que u est L^1 et continue en θ_0.

2.6 Principe de Dirichlet C^1

Proposition 1. *Soit $u \in C^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$, de série de Fourier $c_0 + 2\Re \sum_{n=1}^\infty c_n e^{in\theta} = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$.*

(i) On a $\mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}}) = 4\pi \sum_{n=1}^\infty n|c_n|^2 = \pi \sum_{n=1}^\infty n(a_n^2 + b_n^2)$.

(ii) Soit $E(u) = \{U \in C^0(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta) \mid U_{|\partial\Delta} = u\}$. Si $U \in E(u)$, on a $\mathcal{D}_\Delta(U) \geq \mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}})$. Si $\mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}}) < \infty$, on a égalité si et seulement si $U = u^{\overline{\Delta}}$.

Démonstration. Soit $U \in E(u)$, on peut écrire $U(re^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(r)\cos n\theta + g_n(r)\sin n\theta)$, avec f, g continues sur $[0,1]$, C^1 sur $[0,1[$, et $f_n(1) + ig_n(1) = 2c_n = a_n + ib_n$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\Delta(U) &= \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} \Big((\frac{\partial U}{\partial r})^2 + r^{-2}(\frac{\partial U}{\partial \theta})^2 \Big) d\theta \\ &= \pi \int_0^1 \Big(r \sum_{n=1}^{\infty} (f_n'(r)^2 + rg_n'(r)^2) + r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n(r)^2 + n^2 g_n(r)^2 \Big) dr.\end{aligned}$$

(i) Si $U = u^{\overline{\Delta}}$, on a $f_n(r)+ig_n(r) = 2c_n r^n$, donc $r(f_n'(r)^2+g_n'(r)^2) = r^{-1}n^2(f_n(r)^2+g_n(r)^2) = 4n^2 r^{2n-1}|c_n|^2$, d'où

$$\mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}}) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 4n^2 r^{2n-1}|c_n|^2 dr = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{2n}|c_n|^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2.$$

(ii) Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_0^1 (rf_n'(r)^2 + r^{-1}n^2 f_n(r)^2) dr \geq \int_0^1 2nf_n(r)f_n'(r)dr = n(f_n(1)^2 - f_n(0)^2) = na_n^2,$$

avec égalité si et seulement si $rf_n'(r)^2 = r^{-1}n^2 f_n(r)^2$, soit $(\log f)' = \pm\frac{n}{r}$, soit (puisque f est continue sur $[0,1]$ et C^1 hors de 1) $f_n = a_n r^n$. De même, $\int_0^1 (rg_n'(r)^2 + r^{-1}n^2 g_n(r)^2)dr \geq nb_n^2$, avec égalité si et seulement si $g_n(r) = b_n r^n$. Donc $D_\Delta(U) \geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)$. De plus, si le second membre est fini, on a égalité si ets seulement si $f_n = a_n r^n$ et $g_n(r) = b_n r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit si et seulement si $U = u^{\overline{\Delta}}$, cqfd.

Remarques. 1) La fonction

$$u(e^{i\theta}) = \sum_{n\geq 2} \frac{\sin n\theta}{n\sqrt{\log n}}$$

est continue sur $\partial\Delta$: c'est un fait général pour les séries $\sum a_n \sin n\theta$ avec a_n décroissant vers 0 et $na_n \to 0$, cf. [Zy] p.182 (la preuve se fait par lemme d'Abel en écrivant $\sin n\theta = S_n - S_{n-1}$). Mais son extension harmonique a pour intégrale de Dirichlet

$$\pi \sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2 \log n} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \log n} = +\infty.$$

Donc il n'existe aucune fonction U continue sur $\overline{\Delta}$, C^1 sur Δ, prolongeant u et d'intégrale de Dirichlet finie. Un tel exemple montre que le principe de Dirichlet ne permet pas toujours de trouver l'extension harmonique.
2) Il se peut que u soit C^1 sans que $u^{\overline{\Delta}}$ soit C^1 ni même Lipschitz, exemple :

$$\begin{aligned}u(e^{i\theta}) &= \Re\big((1-e^{i\theta})\log(1-e^{i\theta})\big) \quad \text{(détermination principale du logarithme sur } 1+\Delta) \\ &= (1-\cos\theta)\log|1-e^{i\theta}| + \sin\theta \arg(1-e^{i\theta}) \quad \text{(argument à valeurs dans } [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) \\ &= 2\sin^2\frac{\theta}{2}\log 2\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \quad (\theta \in [0,2\pi]) \\ &= \cos\theta + \sum_{n\geq 2} \frac{\cos n\theta}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

Elle est de classe C^1 : c'est clair sur la troisième forme puisque la discontinuité de l'argument est en $\theta = 0$, et sur la quatrième forme ça résulte du critère de 1) appliqué à la dérivée $-\sin\theta - \sum \frac{\sin n\theta}{n-1}$. Son extension harmonique est $u^{\overline{\Delta}} = \Re h$, avec $h(z) = (1-z)\log(1-z)$, donc si $x \in [-1,1]$, $u^{\overline{\Delta}}(x) = (1-x)\log(1-x)$, qui n'est pas dérivable en 1 ni localement Lipschitz. Donc $u^{\overline{\Delta}}$ n'est pas C^1 ni même Lipschitz.

Proposition 2. *Soit u une fonction de classe C^1 sur un voisinage de $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$. On pose*

$$v_\varepsilon(z) = \begin{cases} u^{\overline{\Delta}}(z) + \cos^2\dfrac{\pi(1-|z|)}{2\varepsilon}.(u(z) - u^{\overline{\Delta}}(z)) \text{ si } |z| \geq 1-\varepsilon \\ u^{\overline{\Delta}}(z) \text{ si } |z| < 1-\varepsilon. \end{cases}$$

(i) v_ε est de classe C^1 et se recolle de façon C^1 à u hors de $\overline{\Delta}$.
(ii) Pour $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{D}_\Delta(v_\varepsilon) \to \mathcal{D}_\Delta(u)$.

Démonstration. (i) Ceci résulte de ce que $r \mapsto \cos^2 \frac{\pi(1-r)}{2\varepsilon}$ vaut 0 en $1-\varepsilon$ et 1 en 1, avec dérivée nulle.

(ii) Soit $w = u - u^{\overline{\Delta}}$: c'est une fonction continue sur $\overline{\Delta}$, nulle sur $\partial\Delta$, d'intégrale de Dirichlet finie, et à support dans $A_\varepsilon = \overline{\Delta} \setminus \Delta_{1-\varepsilon}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\Delta(v_\varepsilon) - \mathcal{D}_\Delta(u^{\overline{\Delta}}) = \int_\Delta ||dv_\varepsilon - du^\Delta||^2 &= \iint_{A_\varepsilon} || \cos^2 \frac{\pi(1-|z|)}{2\varepsilon}.w(z)||^2 \\ &\leq O(\frac{1}{\varepsilon}) \iint_{A_\varepsilon} |w|^2 dx \wedge dy + O(1) \iint_{A_\varepsilon} ||dw||^2 \\ &\leq O(\frac{1}{\varepsilon}) \text{aire}(A_\varepsilon)). \max_{A_\varepsilon} + O(1) \iint_{A_\varepsilon} ||dw||^2.\end{aligned}$$

Le premier terme tend 0 puisque $\text{aire}(A_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ et $w|\partial\Delta = 0$, et le second aussi puisque $\iint ||dw||^2$ est finie. Ceci achève la preuve de la proposition 2.

Principe de Dirichlet C^1. *(i) Si $D \subset X$ est un disque conforme dans une surface de Riemann, et si $u \in C^1(\partial D, \mathbb{R})$, son extension harmonique vérifie*

$$\mathcal{D}_D(u^D) = \inf_{v \in C_0^1(D)} \mathcal{D}_D(v) < \infty.$$

(ii) Si $K \subset X$ est un domaine compact à bord C^1 et $u \in C^1(K, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(1)\ u \text{ harmonique sur } \text{Int}(K) &\Leftrightarrow (2)\ u \text{ minimise } \mathcal{D}_k(u) \text{ sur } C_u^1(K) \\ &\Leftrightarrow (3)\ (\forall w \in C_0^1(K))\ \ \mathcal{D}'_K(u,w) = 0 \\ &\Leftrightarrow (4)\ (\forall w \in C_c^1(\text{Int}(K))\ \ \mathcal{D}'_K(u,w) = 0.\end{aligned}$$

Démonstration. (i) Il suffit de le prouver pour $D = \overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$. Puisque u est de classe C^1 sur $\overline{\Delta}$, $\mathcal{D}_\Delta(u) < \infty$. Ceci résulte immédiatement du (ii) de la proposition 1.

(ii) Par la remarque à la fin de 2.3, les propriétés (2) et (3) sont équivalentes, et impliquées par (1). De plus, (3) implique évidemment (4), et (4) implique (3) car $C_c^1(\text{Int}(K))$ est dense dans $C^1(K)$ pour la semi-norme $\mathcal{D}_K(u)^{\frac{1}{2}}$. . Il reste à montrer que si u minimise $\mathcal{D}_K$ sur $C_u^1(K, \mathbb{R})$, u est harmonique sur $\text{Int}(K)$. Si ce n'est pas le cas, il existe un disque conforme lisse $D \subset \text{Int}(K)$ tel que u n'est pas harmonique sur $\text{Int}(D)$. Comme u est de classe C^1, son extension harmonique u^D vérifie $\mathcal{D}_D(u^D) < \mathcal{D}_D(u)$. On modifie u^D au voisinage de ∂D pour que la nouvelle fonction v se recolle de façon C^1 avec u hors de D, pour donner une fonction $\widetilde{u}^D \in C_u^1(K)$ qui vérifie $\mathcal{D}_K(\widetilde{u}^D) < \mathcal{D}_K(u)$, contredisant (i). Il suffit de le faire dans le cas où $D = \overline{\Delta}$, ce qui résulte de la proposition 2.

2.7 Contrôle des fonctions harmoniques par l'intégrale de Dirichlet

Proposition. *Soit $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est harmonique sur Δ. Il existe une suite de constantes positives $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes de u telles que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, r \in]0,1[) \qquad ||D^n u_{|\Delta_r}||_{L^\infty} \leq \frac{C_n}{(1-r)^{n+\frac{1}{2}}} \mathcal{D}_\Delta(u)^{1/2}.$$

Démonstration. Par hypothèse, $u(z) = c_0 + 2\Re \sum_{m=1}^\infty c_m z^m$, avec $\mathcal{D}_\Delta(u) = 4\pi \sum_{m=1}^\infty m|c_m|^2 < \infty$. Donc, si $|z| = r$ et $|h_1|, \cdots, |h_n| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}|D^n u(z).(h_1, \cdots, h_n)| &= \Big| 2\Re\Big(\sum_{m=n}^\infty m(m-1). \cdots (m-n+1) c_m z^{m-n}.h_1 \cdots h_n \Big) \Big| \\ &\leq \Big(\frac{1}{\pi} \mathcal{D}_\Delta(u) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m=n}^\infty m^2(m-1)^2. \cdots (m-n+1)^2 r^{2(m-n)} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\frac{1}{\pi} \mathcal{D}_\Delta(u) \Big)^{\frac{1}{2}} 2^{-n} \Big(\sum_{m=n}^\infty 2m.(2m-1). \cdots (2m-2n+1)^2 r^{2(m-n)} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\frac{1}{\pi} \mathcal{D}_\Delta(u) \Big)^{\frac{1}{2}} 2^{-n} \Big(\Big(\frac{1}{1-r^2} \Big)^{(2n)} \Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Puisque la dérivée $2n$-ième de $\frac{1}{1-r^2}$ vaut $\frac{f_n(r)}{(1-r)^{2n+1}}$ où f_n est continue sur $\overline{\Delta}$, ceci donne la majoration annoncée.

Corollaire. *Soit $D \subset X$ un disque conforme dans une surface de Riemann, contenant un point p dans son intérieur et (u_n) une suite de fonctions continues sur D et harmoniques sur $\mathrm{Int}(D)$ telles que $\mathcal{D}_{\mathrm{Int}(D)}(u_n - u_m) \to 0$. De façon équivalente, $(d(u_n - u_0))$ est de Cauchy dans $L^2(\mathrm{Int}(D))$. Alors la suite (du_n) converge vers une forme harmonique exacte du sur $\mathrm{Int}(D)$ pour la topologie C^∞, uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $D = \overline{\Delta}$, $p = 0$, et de prouver la convergence C^∞ uniforme sur $\overline{\Delta}_r$. Quitte à remplacer u_n par $u_n - u_n(0)$, on peut supposer $u_n(0) = 0$. D'après la proposition, si $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé, la suite $(D^m(u_n))$ converge uniformément sur $\overline{\Delta}_r$. Comme $u_n(0) = 0$ et que $\overline{\Delta}_r$ est compact et convexe, la suite (u_n) converge C^∞ uniformément sur $\overline{\Delta}_r$. Sa limite u, qui est définie sur Δ, est harmonique puisque la convergence est C^2 (à vrai dire, une convergence C^0 suffirait à cause de la formule de la moyenne). Donc la suite (du_n) converge C^∞ uniformément sur tout compact de Δ vers la forme harmonique exacte du.

Remarque. On savait déjà que toute forme harmonique sur un disque, étant fermée, est exacte. Plus tard, nous verrons qu'une limite L^2_{loc} de formes fermées qui est harmonique est exacte, quel que soit le domaine de définition.

3 Construction d'un potentiel dipolaire

3.1 Énoncé du théorème

Théorème. *Soient X une surface de Riemann, p un point de X et soit z une uniformisante en p. Alors il existe un* potentiel dipolaire *en p, c'est-à-dire une fonction harmonique $u : X \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ telle que $u - \Re(\frac{1}{z})$ s'étend continûment en p [donc de façon C^∞]. De plus :*

- *si U est un voisinage de p, l'intégrale de Dirichlet $\mathcal{D}_{X\setminus U}(u)$ est finie*
- *si $w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X, \mathbb{R})$ s'annule près de p, $\mathcal{D}'_X(u, w) = 0$.*

Les deux sections suivantes sont consacrées à la preuve de ce théorème, qui sera le point de départ du théorème d'uniformisation au chapitre suivant. Ces deux chapitres suivent de près [We], chapitres 12, 13 et 20 (cf. aussi [Si], pp. 154-178). Je remercie Alexis Marin pour d'utiles remarques et corrections.

Remarques. 1) Au voisinage de p, on aura $u = \Re\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}$ quitte à changer d'uniformisante, donc u est le potentiel d'un dipôle électrostatique de source p sur X. Pour l'interprétation électrique des fonctions harmoniques et des différentielles méromorphes, ainsi que la preuve physique de leur existence, voir le livre [Klein].

2) Si v est une autre fonction avec les mêmes propriétés, $v-u$ est harmonique sur X. Donc si X est compacte, u est unique à une constante additive près.

3) La plupart des références construisent plutôt une *fonction de Green*, c'est-à-dire une fonction harmonique sur $X \setminus \{p\}$ telle que $u + \log|z|$ s'étend continûment en p [donc de façon C^∞], et $u > 0$ sur $X \setminus \{p\}$. Une telle fonction n'existe pas toujours, par exemple si $X = \mathbb{C}$ ou X est compacte [dans ce deuxième cas, même sans la restriction $u > 0$], et la preuve du théorème d'uniformisation est différente suivant qu'elle existe ou non.

3.2 Intégrale de Dirichlet renormalisiée

On voudrait pouvoir trouver u en minimisant l'intégrale de Dirichlet sur X. Mais celle-ci sera infinie puisque $du \sim -\Re\frac{dz}{z^2}$ près de p, donc il faut la «renormaliser», ce que nous faisons maintenant. On peut supposer que l'image $z(U)$ de l'uniformisante z, définie sur U, contient le disque fermé $\overline{\Delta}$, donc $D_0 = z^{-1}(\overline{\Delta})$ est un disque conforme contenant p dans son intérieur. On pose $\Phi = \Re(\frac{1}{z} + z)$: c'est une fonction harmonique sur $U \setminus \{p\}$, qui diffère de $\Re\frac{1}{z}$ par une fonction lisse, et le choix de cette fonction assure que sur ∂D_0 on a $\Im(\frac{1}{z} + z) = \Im(\overline{z} + z) = 0$. Ceci implique que $*d\Phi$ s'annule sur $T\partial D_0$.

Soit $C^1_\Phi(X)$ l'ensemble des fonctions $u \in C^1(X \setminus \{p\}, \mathbb{R})$ telle que $u_{|U\setminus\{p\}} - \Phi$ s'étend en une fonction de classe C^1 sur U. Si $u \in C^1_\Phi(X)$, *l'intégrale de Dirichlet renormalisée* est

$$\mathcal{D}_\Phi(u) = \mathcal{D}_{X\setminus D_0}(u) + \mathcal{D}_{D_0}(u - \Phi).$$

Noter que $C^1_\Phi(X)$ est un espace affine dirigé par $C^1(X, \mathbb{R})$, et que $C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X) := \{u \in C^1_\Phi(X) \mid \mathcal{D}_\Phi(u) < \infty\}$ est, s'il est non vide, un espace affine dirigé par $C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X, \mathbb{R}) := \{w \in C^1(X, \mathbb{R}) \mid \mathcal{D}_X(w) < \infty\}$.

Propriété. *L'espace $C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$ est non vide. Autrement dit, il existe $u \in C^1_\Phi(X)$ telle que $\mathcal{D}_\Phi(u) < \infty$.*

Corollaire. *$d(\Phi) := \inf_{u\in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)} \mathcal{D}_\Phi(u)$ est fini, et il existe une suite $(u_n) \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$ qui est est minimisante pour $\mathcal{D}_\Phi$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{D}_\Phi(u_n)$ tend vers $d(\Phi)$.*

Démonstration. Il suffit de considérer la fonction u qui vaut $\Re\frac{1}{z}$ sur les points de D_0 tels que $|z| \leq \frac{1}{2}$, $\sin^2 \pi|z|.\Re\frac{1}{z}$ sur les points de D_0 tels que $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$, et 0 hors de D_0. Elle est bien dans $C^1_\Phi(X)$ car $r \mapsto \sin^2 \pi r$ vaut 1 en $\frac{1}{2}$ et 0 en 1, avec dérivée nulle. Puisqu'elle est nulle hors de D_0, $\mathcal{D}_\Phi(u) < \infty$.

Proposition 1. *Soient $u_1, u_2 \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$, qui coïncident hors d'un domaine compact $K \subset X$.*

(i) Si $K \subset X \setminus D_0$, $\mathcal{D}_\Phi(u_1) - \mathcal{D}_\Phi(u_2) = \mathcal{D}_K(u_1) - \mathcal{D}_K(u_2)$.

(ii) Si $K \subset U$, $\mathcal{D}_\Phi(u_1) - \mathcal{D}_\Phi(u_2) = \mathcal{D}_K(u_1 - \Phi) - \mathcal{D}_K(u_2 - \Phi)$.

Démonstration. (i) En effet, $\mathcal{D}_\Phi(u_i) = \mathcal{D}_{X\setminus(K\cup D_0)}(u_i) + \mathcal{D}_K(u_i) + D_{D_0}(u_i - \Phi)$, et les termes extrêmes ont la même valeur pour $i = 1, 2$.

(ii) Quitte à augmenter K, on peut supposer que K est à bord lisse et que ∂K et ∂D_0 sont transverses. $K \setminus \mathrm{Int}(D_0)$ est alors un domaine à bord C^1 par morceaux, le bord étant formé de $\gamma \subset \partial K$ et de $\gamma_0 \subset \partial D_0$. On a

$$\mathcal{D}_\Phi(u_i) = \mathcal{D}_{X\setminus K}(u_i) + D_{K\setminus\mathrm{Int}(D_0)}(u_i) + D_{K\cap D_0}(u_i - \Phi),$$

et le premier terme a la même valeur pour $i = 1, 2$. Donc il faut montrer $D_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)}(u_1) - D_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)}(u_2) = D_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)}(u_1 - \Phi) - D_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)}(u_2 - \Phi)$. La différence vaut

$$\begin{aligned} 2D'_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)}(u_1 - u_2, \Phi) &= 2 \iint_{K\setminus \mathrm{Int}(D_0)} d(u_1 - u_2) \wedge *d\Phi \\ &= 2\Big(\int_\gamma (u_1 - u_2) * d\Phi + \int_{\gamma_0} (u_1 - u_2) * d\Phi \Big). \end{aligned}$$

Le premier terme est nul puisque $u_1 = u_2$ sur ∂K, et le second aussi puisque $*d\Phi$ s'annule sur $T\partial D_0$.

La propriété (ii) de la proposition suivante jouera un rôle clé dans la preuve de l'uniformisation.

Proposition 2. *Soit $u \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$, qui minimise $\mathcal{D}_\Phi$ sur $C^1_\Phi(X)$. Alors :*
(i) u est harmonique sur $X \setminus \{p\}$.
(ii) Pour tout $w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X)$ qui est nulle près de p, on a $\mathcal{D}'_X(u, w) = \iint_X (du, dw) = 0$.

Démonstration. (i) Soit $p \in X \setminus \{p\}$. Distinguons deux cas.

1) Si $p \in D_0$, il existe un disque conforme $D \subset X \setminus D_0$ contenant p dans son intérieur. Si u n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, par le principe de Dirichlet on a $\mathcal{D}_D(u) > \mathcal{D}(u^D)$. Par la proposition 2 de la section 2.6, on peut trouver une fonction $v \in C^1(D)$ qui se recolle de façon C^1 à u hors de D et vérifie $\mathcal{D}_D(v) < \mathcal{D}_D(u)$. Notant $\widetilde{v}$ la fonction qui vaut v sur D et u sur $X \setminus (\{p\} \cup D)$, on a $\widetilde{v} \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}$ et, d'après le (i) de la proposition 1,

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{v}) - \mathcal{D}_\Phi(u) = \mathcal{D}_K(v) - \mathcal{D}_K(u) < 0,$$

ce qui contredit la minimalité de u. Donc u est harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$.

2) Si $p \notin D_0$, il existe un disque conforme $D \subset U \setminus \{p\}$ contenant p dans son intérieur. Si u n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, alors $u - \Phi$ n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, donc par le principe de Dirichlet on a $\mathcal{D}_D(u - \Phi) > \mathcal{D}((u - \Phi)^D)$. Comme en 1), on peut trouver une fonction $v \in C^1(D)$ qui se recolle de façon C^1 à $u - \Phi$ sur $U \setminus D$ et vérifie $\mathcal{D}_D(v) < \mathcal{D}_D(u - \Phi)$. Notant $\widetilde{v}$ la fonction qui vaut $v + \Phi$ sur D et u sur $X \setminus (\{p\} \cup D)$, on a $\widetilde{v} \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}$ et, d'après le (ii) de la proposition 1,

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{v}) - \mathcal{D}_\Phi(u) = \mathcal{D}_K(v) - \mathcal{D}_K(u - \Phi) < 0,$$

ce qui contredit la minimalité de u. Donc u est harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$.

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tw$ est dans $C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$, donc $\mathcal{D}_\Phi(u) \le \mathcal{D}_\Phi(u + tw)$. Or

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Phi(u + tw) &= \mathcal{D}_{X\setminus D_0}(u + tw) + \mathcal{D}_{D_0}((u - \Phi) + tw) \\ &= \mathcal{D}_\Phi(u) + 2t(\mathcal{D}'_{X\setminus D_0}(u, w) + \mathcal{D}'_{D_0}(u - \Phi, w)) + t^2 \mathcal{D}_X(w). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}'_{X\setminus D_0}(u, w) + \mathcal{D}'_{D_0}(u - \Phi, w) = 0$. Comme w s'annule près de p, la forme $w * du$ est bien définie et de classe C^1. Puisque $d(*d(u - \Phi)) = \Delta(u - \Phi) = 0$, on a $d(w * d(u - \Phi)) = dw \wedge *d(u - \Phi)$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{D_0}(u - \Phi, w) = \mathcal{D}'_{D_0}(w, u - \Phi) &= \iint_{D_0} dw \wedge *d(u - \Phi) = \int_{\partial D_0} w * d(u - \Phi) \\ &= \int_{\partial D_0} w * du \text{ puisque } *d\Phi | T\partial D_0 = 0 \\ &= \iint_{D_0} dw \wedge *du = D'_{D_0}(u, w). \end{aligned}$$

Donc $0 = \mathcal{D}'_{X\setminus D_0}(u, w) + \mathcal{D}'_{D_0}(u - \Phi, w) = \mathcal{D}'_X(u, w)$, ce qui prouve (i).

3.3 Existence d'un minimum

Théorème. *Il existe une fonction u qui minimise $\mathcal{D}_\Phi$ sur $C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$. De plus, toute suite minimisante (u_n) dans $C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$ est telle que $\mathcal{D}(u_n - u) \to 0$, c'est-à-dire que du_n converge vers du dans $L^2\Omega^1(X)$.*

D'après 3.2, la fonction u a les propriétés du théorème 3.1. Donc le théorème 3.3 entraîne le théorème 3.1.

Remarque. En particulier, du est unique, donc u est unique à une constante près, que X soit ou non compacte.

Preuve du théorème 3.3. Nous la donnons en quatre étapes.

1) Propriété de suite de Cauchy L^2. *Si $n, m \to +\infty$, $\mathcal{D}_X(u_n - u_m)$ tend vers 0. Autrement dit, $(du_n - du_0)$ est une suite de Cauchy dans $L^2\Omega^1(X)$. Donc (du_n) est une suite de Cauchy dans $L^2\Omega^1(K)$ pour tout compact $K \subset X \setminus \{p\}$.*

Démonstration. Comme pour le théorème de projection sur un convexe dans un Hilbert, ceci résulte de la formule «du parallélogramme», valable pour $u, v \in C^1(X)$, d'intégrale de Dirichlet finie sur un domaine K :

$$\mathcal{D}_K(\frac{u-v}{2}) + \mathcal{D}_K(\frac{u+v}{2}) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_K(u) + \mathcal{D}_K(v)).$$

Appliquant ceci à u_n, u_m sur $X \setminus D_0$ et à $u_n - \Phi, u_m - \Phi$ sur D_0, il vient $\mathcal{D}_{D_0}(\frac{u_n - u_m}{2}) + \mathcal{D}_{D_0}(\frac{u_n + u_m}{2}) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\Phi(u_n) + \mathcal{D}_\Phi(u_m))$, autrement dit :

$$\mathcal{D}_X(u_n - u_m) = 2(\mathcal{D}_\Phi(u_n) + \mathcal{D}_\Phi(u_m)) - 4\mathcal{D}_\Phi(\frac{u_n + u_m}{2}).$$

Or $\mathcal{D}_\Phi(u_n)$ et $\mathcal{D}_\Phi(u_m)$ tendent vers d, et $\mathcal{D}_\Phi(\frac{u_n+u_m}{2}) \geq d$ puisque $\frac{u_n+u_m}{2} \in C^1_\Phi(X)$. Donc le terme de droite tend vers 0, cqfd.

2) Convergence dans $L^2\Omega^1(X \setminus D_0)$. *La suite (du_n) converge dans $L^2\Omega^1(X \setminus D_0)$ vers une forme harmonique exacte du.*

Démonstration. Soit q un point de $X \setminus D_0$. Il est contenu dans l'intérieur d'un disque conforme lisse $D \subset X \setminus D_0$. Si u_n n'est pas harmonique sur $\mathrm{Int}(D)$, on a $\mathcal{D}_D(u_n^D) < \mathcal{D}_D(u_n)$. En utilisant le lemme de la section 2.6, on peut trouver $\widetilde{u}_n \in C^1_\Phi(X)$ qui vérifie $\mathcal{D}_D(\widetilde{u}_n) \leq \mathcal{D}_D(u_n)$, $\widetilde{u}_n = u_n$ hors de D, et $\widetilde{u}_n = u_n^D$ sur D_n, où D_n est un sous-disque conforme de D tel que $D_n \subset \mathrm{Int}(D_{n+1})$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathrm{Int}(D)$. Si $u_n^D = u_n$, on pose $\widetilde{u}_n = u_n^D = u_n$, de sorte qu'on a les mêmes propriétés.

La Proposition 1 de 3.2, partie (i) donne

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{u}_n) - \mathcal{D}_\Phi(u_n) = \mathcal{D}_D(\widetilde{u}_n) - \mathcal{D}_D(u_n) \leq 0.$$

Donc $(\widetilde{u}_n)$ est encore une suite minimisante pour $\mathcal{D}_\Phi$, donc $d(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0 dans $L^2(X)$, et a fortiori dans $L^2(D)$. Puisque (du_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(D)$, il en est de même de $d\widetilde{u}_n$.

Puisque $\widetilde{u}_n$ est harmonique sur D_n qui grossit jusqu'à recouvrir $\mathrm{Int}(D)$, le corollaire 2.7 dit que $d\widetilde{u}_n$ tend vers une forme harmonique exacte α^D sur $\mathrm{Int}(D)$ pour la topologie C^∞, uniformément sur tout compact. Donc $d\widetilde{u}_n$ tend vers α^D dans $L^2_{loc}(\mathrm{Int}(D))$, et il en est de même de du_n. Ceci prouve que α^D au voisinage de q ne dépend pas du choix de D. Si l'on fait cela pour tous les points de $X \setminus D_0$, les différentes formes α^D se recollent pour donner une forme harmonique α sur $X \setminus D_0$, et la suite (du_n) converge dans $L^2_{loc}(X \setminus D_0)$ vers la forme harmonique α. Comme $(du_n - du_m)$ tend vers 0 dans $L^2\Omega^1(X)$, la convergence de (du_n) vers α est en fait dans $L^2\Omega^1(X \setminus D_0)$.

Reste à montrer que la forme α est exacte [on peut montrer plus généralement que toute forme de classe C^1 qui est limite dans L^2_{loc} de formes exactes est exacte : ici la preuve est plus simple car on sait déjà que α est fermée]. Il suffit de prouver que si $\gamma : S^1 \to X \setminus D_0$ est un lacet C^1 plongé, on a $\int_\gamma \alpha = 0$. Épaississons γ en un plongement d'un anneau $\Gamma : S^1 \times [0,1] \to X \setminus D_0$, et munissons l'image A des coordonnées (θ, r). La forme $(du_n|A) \wedge dr$ converge vers $(\alpha|A) \wedge dr$ dans $L^2(A)$ donc dans $L^1(A)$. Comme $\iint_A du_n \wedge dr = 0$, on a $\iint_A \alpha \wedge dr = 0$. Puisque $d\alpha = 0$, $\int_{\Gamma(S^1\times\{r\})} = \int_\gamma \alpha$ pour tout r, donc $\iint_A \alpha \wedge dr = \int_\gamma \alpha = 0$.

3) Convergence au voisinage de D_0. *Soient $D_1, D_2 \subset U$ deux disques conformes, avec $D_0 \subset \mathrm{Int}(D_1)$, $D_1 \subset \mathrm{Int}(D_2)$. La suite $(d(u_n - \Phi)|\mathrm{Int}(D_1))$ converge dans $L^2(\mathrm{Int}(D_1))$ vers une forme harmonique exacte dw.*

Démonstration. Posons $w_n = u_n - \Phi$. Comme dans l'étape précédente, on peut trouver $\widetilde{w}_n \in C^1(U)$ qui coïncide avec w_n hors de D_2, vaut $w_n^{D_2}$ sur D_1 et vérifie $\mathcal{D}_{D_2}(\widetilde{w}_n) \leq \mathcal{D}_{D_2}(w_n)$. Posons $\widetilde{u}_n = u_n$ hors de U, $\widetilde{w}_n + \Phi$ sur U. D'après la proposition 1 de 3.2, partie (ii), on a

$$\mathcal{D}_\Phi(\widetilde{u}_n) - \mathcal{D}_\Phi(u_n) = \mathcal{D}_{D_2}(\widetilde{u}_n - \Phi) - \mathcal{D}_{D_2}(u_n - \Phi) = \mathcal{D}_{D_0'}(\widetilde{w}_n) - \mathcal{D}_{D_2}(w_n) \leq 0.$$

Donc $(\widetilde{u}_n)$ est encore une suite minimisante pour $\mathcal{D}_\Phi$, donc $\mathcal{D}_X(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0, et a fortiori $D_{D_1}(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0. Donc $d(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0 dans $L^2\Omega^1(X)$, donc $d(\widetilde{w}_n - w_n)$ tend vers 0 dans $L^2\Omega^1(U)$.

Puisque (dw_n) est une suite de Cauchy dans $L^2\Omega^1(U)$, il en est de même de $(d\widetilde{w}_n)$. De même que dans l'étape précédente, $(d\widetilde{w}_n|D_1)$ converge vers une forme harmonique exacte dw dans $L^2\Omega^1(D_1)$, donc il en est de même de (dw_n).

4) Fin de la preuve. Les formes exactes du sur $X \setminus D_0$ et $d\Phi + dw$ sur $\mathrm{Int}(D_1) \setminus \{p\}$ coïncident sur $\mathrm{Int}(D_1) \setminus D_0$ qui est connexe, donc quitte à ajouter une constante on a $u = \Phi + w$ sur $\mathrm{Int}(D_1) \setminus D_0$, ce qui permet d'étendre u à une fonction harmonique sur $X \setminus \{p\}$, que nous noterons encore u : cette fonction est dans $C^1_\Phi(X)$ par construction. D'après les deux sections précédentes, $(du_n - du)$ converge vers 0 dans $L^2(X)$. Par le lemme de Fatou, $du - du_0 \in L^2(X)$, donc $u \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}$, et $\mathcal{D}_\Phi(u) \leq \liminf \mathcal{D}_\Phi(u_n) = \lim \mathcal{D}_\Phi(u_n) : d(\Phi)$, donc $\mathcal{D}_\Phi(u) = d(\Phi)$, ce qui prouve le théorème 3.3 et donc le théorème 3.1.

Remarque. On peut éviter l'usage du lemme de Fatou et donc de la théorie de la mesure, en utilisant la continuité L^2 de $\mathcal{D}_\Phi$: si $u_1, u_2 \in C^1_{\Phi,\mathcal{D}<\infty}(X)$, on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}_\Phi(u_1) - \mathcal{D}_\Phi(u_2)| &\leq 2\sqrt{2}\max(\mathcal{D}_\Phi(u_1)^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}_\Phi(u_2)^{\frac{1}{2}})\mathcal{D}_X(u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_X(u_1 - u_2)\\ &= 2\sqrt{2}\max(\mathcal{D}_\Phi(u_1)^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}_\Phi(u_2)^{\frac{1}{2}})||du_1 - du_2||_{L^2(X)} + ||du_1 - du_2||^2_{L^2(X)}.\end{aligned}$$

En effet, pour l'intégrale de Dirichlet usuelle, on a

$$\mathcal{D}_K(u_1) - \mathcal{D}_K(u_2) = 2\mathcal{D}'_K(u_2, u_1 - u_2) + \mathcal{D}_K(u_1 - u_2) \leq 2\mathcal{D}_K(u_2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_K(u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_K(u_1 - u_2).$$

On en déduit

$$|\mathcal{D}_K(u_1) - \mathcal{D}_K(u_2)| \leq 2\max(\mathcal{D}_K(u_1)^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}_K(u_2)^{\frac{1}{2}})\mathcal{D}_K(u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_K(u_1 - u_2).$$

[Géométriquement : $|||v_1||^2 - ||v_2||^2| \leq 2\max(||v_1||, ||v_2||)||v_1 - v_2|| + ||v_1 - v_2||^2$] Appliquant ceci à u_1, u_2 sur $X \setminus D_0$ et $u_1 - \Phi, u_2 - \Phi$ sur D_0, et utilisant l'inégalité $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(a+b)^{\frac{1}{2}}$, on obtient le résultat.

3.4 Existence de différentielles et de fonctions méromorphes

Théorème. *Soient X une surface de Riemann, et p un point de X.*

(i) Il existe une différentielle méromorphe ω ayant un pôle double en p, sans résidu, sans autre pôle.

(ii) Il existe une fonction holomorphe ayant un pôle en p (d'ordre non précisé, il peut aussi y avoir d'autres pôles).

Démonstration. (i) Si u est une fonction donnée par le théorème 3.1, considérons la différentielle holomorphe $\omega = du + i * du$ sur $X \setminus \{p\}$. Sur $D_0 \setminus \{p\}$, on a $u = \Phi + w$ où w est harmonique au voisinage de D_0. Donc w est la partie réelle d'une fonction holomorphe h définie au voisinage de D_0, et $u = \Re(\frac{1}{z} + z + h(z))$, donc $\omega = d(\frac{1}{z} + z + h(z)) = -\frac{dz}{z^2} + g(z)dz$, avec g holomorphe en p. Donc ω est une différentielle méromorphe sur X, avec un pôle double en p, de résidu nul et holomorphe ailleurs.

(ii) Soit $q \in X \setminus \{p\}$, et soit ω' une forme méromorphe ayant un pôle double en q et holomorphe ailleurs. Alors $f = \frac{\omega}{\omega'}$ est une fonction méromorphe qui a un pôle au moins double en p.

Corollaire. *Soit X une surface de Riemann. On peut définir un élément du groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Divprinc}(X)$*, qui est la classe de* $\mathrm{div}(\omega)$ *pour n'importe quelle différentielle méromorphe non nulle. On l'appelle la* classe canonique *de X ou (par abus de langage) le* diviseur canonique *de X. On la (le) note K_X, et on le considère souvent comme un élément de* $\mathrm{Div}(X)$.

Si X est compacte, il a un degré $\deg(K_X) \in \mathbb{Z}$ bien défini, qui est un invariant biholomorphe de X.

3.5 Séparabilité des surfaces de Riemann

Théorème de Rado. *Toute surface de Riemann est séparable, donc réunion dénombrable de compacts.*

Démonstration. On vient de voir qu'il existe une application holomorphe non constante $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On peut recouvrir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par un nombre dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biholomorphes à Δ (par exemple les boules $B(z, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{C}$ avec $z \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et les complémentaires dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des $\overline{\Delta}_n$, $n \in \mathbb{N}$). Considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts $\widetilde{U} \subset X$ tels que pour un certain $(n, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on a $f(\widetilde{U}) = U_n$ et $f : \widetilde{U} \to U_n$

est biholomorphiquement équivalente à $z \mapsto z^d$ de Δ dans lui-même. Si $p \in X$ et V est un voisinage de x, quitte à le diminuer $f : V \to f(V)$ est équivalente à $z \mapsto z^d$ de Δ sur lui-même, avec $d = \deg_p(f)$. Ensuite, $f(V)$ contient un U_n contenant $f(p)$, donc $f^{-1}(U_n) \cap V$ est un élément de $\mathcal{U}$ qui contient p et est contenu dans V. Donc $\mathcal{U}$ est une base de la topologie de X, il reste à montrer que $\mathcal{U}$ est dénombrable.

Soit $\widetilde{U}$ un élément de $\mathcal{U}$. L'ensemble $S_1(\widetilde{U}) = \{\widetilde{V} \in \mathcal{U} \mid \widetilde{V} \cap \widetilde{U} \neq \emptyset\}$ est la réunion dénombrable des $E_n = \{\widetilde{V} \in S_1(\widetilde{U}) \mid f(\widetilde{V}) = U_n\}$. Or les éléments de E_n sont disjoints, en effet si $\widetilde{U}_1$ et $\widetilde{U}_2$ sont deux tels éléments, $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$ est ouvert et fermé dans $\widetilde{U}_1$. Comme $\widetilde{U}$ est homéomorphe à un disque donc séparable, E_n est au plus dénombrable donc $S_1(\widetilde{U})$ est au plus dénombrable. Ensuite, soit $\widetilde{U}$ un élément de $\mathcal{U}$. Puisque X est connexe, pour tout $\widetilde{V} \in \mathcal{U}$ il existe une suite finie $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U}, \widetilde{U}_1, \cdots, \widetilde{U}_k = \widetilde{V}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ telle que $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_{i+1} \neq \emptyset$: en effet, la réunion des $\widetilde{V}$ admettant une telle suite est un ouvert non vide dont le complémentaire est ouvert et est la réunion des $\widetilde{V}$ n'admettant pas une telle suite. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n(\widetilde{U})$ l'ensemble des $\widetilde{V} \in \mathcal{U}$ admettant une telle suite avec $k \leq n$. On a $S_{n+1}(\widetilde{U}) = \bigcup_{\widetilde{V} \in S_n(\widetilde{U})} S_1(\widetilde{V})$, donc $S_n(\widetilde{U})$ est ouvert par récurrence sur n, et il en est de même de $\mathcal{U} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_N(\widetilde{U})$.

Pour le fait que X est réunion dénombrable de compacts (qui comme nous l'avons dit est équivalent à la métrisabilité), on remarque que l'on a recouvert X par un nombre dénombrable de disques, et que chacun est réunion dénombrable de compacts.

Remarque. La séparabilité (d'une variété différentiable avec une définition n'imposant pas la séparabilité) est aussi équivalente à la métrisabilité, ou encore à l'existence d'une métrique riemannienne, cf [Sp]. On peut prouver concrètement la métrisabilité de la façon suivante. En utilisant une application $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ holomorphe non constante et une métrique riemannienne g_0 quelconque sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on peut définir la métrique riemannienne singulière conforme $g = f^* g_0$. Celle-ci, qui est singulière en tout point de l'ensemble discret et fermé $\mathrm{Crit}(f)$, permet de définir la longueur $\ell_g(\gamma)$ d'un chemin C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \to X$ et la distance comme en géométrie riemannienne : $\ell_g(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||_g dt$, $d_\gamma(x, y) = \inf_\gamma \ell_g(\gamma)$, l'inf étant prise sur tous les chemins de x à y. Le fait que l'on obtient ainsi une distance définissant la topologie de X se démontre en adaptant la preuve pour une métrique non singulière, cf [Sp] pp. 314-315. Le point clé est le fait que tout point p admet une uniformisante $z : U \to \Delta_\varepsilon$ telle que $g = ||d(z^k)||$, et que si γ est un chemin issu de p et sortant du domaine de l'uniformisante, on a $\ell_g(\gamma) \geq \varepsilon^k$.

3.6 Généralisation de la construction

Dans cette section, nous suivons [We], chapitre 15.

Dans la preuve du théorème 3.3, tout ce qu'on a utilisé sur Φ est que c'est une fonction harmonique définie sur un voisinage V de ∂K_0, où $K_0 \subset X$ est un domaine compact à bord lisse, telle que $*d\Phi$ est nulle le long de ∂K_0, par exemple si $\Phi = \Re(h)$ avec h holomorphe sur V et réelle sur ∂K_0. En effet, ceci permet de définir

$$C^1_\Phi(X) = \{(u, v) \in C^1((X \setminus K_0) \cup V, \mathbb{R}) \times C^1(V \cup K_0, \mathbb{R}) \mid u = \Phi + v \text{ sur } V\}$$
$$\mathcal{D}_\Phi(u, v) = \mathcal{D}_{X \setminus K_0}(u) + \mathcal{D}_{K_0}(v).$$

Dans le théorème 3.3, on a $K_0 = D_0$, $V = U \setminus \{p\}$, $\Phi = \Re(\frac{1}{z} + z)$, et $v = u - \Phi$ prolongée par continuité en p. On obtient ainsi le

Théorème. *Soit $K_0 \subset X$ un domaine compact à bord lisse dans une surface de Riemann. Soit $\Phi : V \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique définie au voisinage de ∂K_0, telle que $*d\Phi$ est nulle le long de ∂K_0, par exemple si $\Phi = \Re(h)$ avec h holomorphe sur V et réelle sur ∂K_0. Alors il existe $u : (X \setminus K_0) \cup V \to \mathbb{R}$ et $v : V \cup K_0$ harmoniques, telles que*

$$u = \Phi + v \text{ sur } V$$
$$\mathcal{D}'_{X \setminus K_0}(u, w) + \mathcal{D}'_{K_0}(v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in C^1_{\mathcal{D} < \infty}(X).$$

Cas particuliers. Soit $p \in X$, et soit $K_0 = D_0$ biholomorphe à $\overline{\Delta}$ par une uniformisante z définie sur un voisinage U de p.

1) Prenant $V = U \setminus \{p\}$ et $\Phi = \Re(\frac{1}{z^n} + z^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient u harmonique sur $X \setminus \{p\}$, telle que $u - \Re(\frac{1}{z^n})$ s'étend continûment en p. Donc $\omega = du + i * du$ est une différentielle méromorphe ayant un pôle unique en p, d'ordre $n + 1$, sans résidu.

2) Soient $z_1, z_2 \in \Delta$, on pose $V = U \setminus z^{-1}(\{z_1, z_2\}) = U \setminus \{p_1, p_2\}$, puis

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2\pi}\Big(\log\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} + \log\frac{|1-\overline{z}_1 z|}{|1-\overline{z}_2 z|}\Big) \text{ sur } V \\ &= \frac{1}{2\pi}\log\frac{|(z-z_1)(1-\overline{z}_1 z)|}{|(z-z_2)(1-\overline{z}_2 z)|}.\end{aligned}$$

Sur $U \setminus z^{-1}([z_1, z_2])$, $\log\frac{z-z_1}{z-z_2}$ a une détermination holomorphe, donc $\log\frac{(z-z_1)(1-\overline{z}_1 z)}{(z-z_2)(1-\overline{z}_2 z)}$ a une détermination holomorphe h. Si $|z| = 1$, on a $\frac{1}{z} = \overline{z}$ donc la fonction sous le logarithme vaut

$$\frac{\overline{z}}{\overline{z}}\frac{(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z}_1)}{(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z}_2)} = \frac{|z-z_1|^2}{|z-z_2|^2},$$

donc h est réelle (à $2ki\pi$ près) sur ∂D_0. Donc il existe une fonction harmonique sur $X \setminus \{p_1, p_2\}$ telle que $u - \log|z_1|$ et $u + \log|z_2|$ s'étendent en p_1 et p_2 respectivement, où z_1 et z_2 sont des uniformisantes en p_1 et p_2. On dit que u est un potentiel ayant un *puits* en p_1 et une *source* en p_2 (pour l'explication de ces termes, voir [We] et [Kl]).

La forme $\omega = du + i * du$ a alors un pôle simple en p_1 de résidu 1 et un pôle simple en p_2 de résidu -1.

3) Soient p_1, p_2 deux points de X quelconques. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un chemin de p_1 à p_2. Pour N assez grand, par compacité de $[0,1]$ il existe des uniformisantes $z_1, \cdots, z_N$ de domaines $U_1, \cdots, U_N$, d'images contenant $\overline{\Delta}$ et telles que chaque U_i contient $\gamma([\frac{i-1}{N}), \frac{i}{N}])$. Donc il existe des diférentielles méromorphes ω_i, $i = 1, \cdots, n$, telles que ω_i a un pôle simple en $\gamma(\frac{i-1}{N})$ et un pôle simple en $\gamma(\frac{i}{N})$ de résidu -1. Donc $\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i$ a un pôle simple en p_1 de résidu 1 et un pôle simple en p_2 de résidu -1.

4 Théorème d'uniformisation

Pour tout ce qui concerne les notions suivantes : simple connexité, groupe fondamental, revêtements et homologie, voir [Go]. Nous donnons tous les énoncés de topologie dont nous aurons besoin, mais sans toujours les prouver (ceci concerne surtout les énoncés d'approximation et de transversalité).

4.1 Surfaces de Riemann simplement connexes

Définition. Une surface de Riemann est *simplement connexe* si tout lacet continu (ou C^1, C^∞) dans X est homotope (ou C^1-homotope, C^∞-homotope) à un lacet constant. De façon équivalente, toute application continue $f : \partial\Delta \to X$ (resp. de classe C^1, C^∞) s'étend continûment (resp. de façon C^1, C^∞) à $\overline{\Delta}$.

Remarques. 1) L'équivalence entre «homotope à une constante» et «s'étend à $\overline{\Delta}$» est claire en coordonnées polaires. La définition usuelle demande que tout lacet soit homotope à une constante relativement au point-base. Mais pour des espaces «raisonnables» comme des variétés différentiables, c'est équivalent à la définition ci-dessus. (Une définition d'espaces «raisonnables» pourrait être : les espaces ayant le type d'homotopie d'un complexe cellulaire (CW-complexe) ou plutôt tels que (X, x) a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire basé, cf [Mi 1]). Dans le cas de variétés différentiables, on peut remplacer les lacets continus par des lacets C^1 ou C^∞, via des théorèmes d'approximation, cg [Go].

2) Nous donnerons dans la section suivante la définition originale de Riemann, qui est elle spécifique aux surfaces.

Exemples de surfaces de Riemann simplement connexes :

- tout ouvert convexe $U \subset \mathbb{C}$, en particulier $\mathbb{C}$ et Δ. En effet, si $z_0 \in U$, $\gamma : \partial\Delta \to U$ se prolonge continûment à $\overline{\Delta}$ par $\Gamma(z) = z_0 + |z|(\gamma(\frac{z}{|z|}) - z_0)$ si $z \neq 0$, $\Gamma(0) = z_0$.
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: un lacet $\gamma : \partial\Delta \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de classe C^1 n'est pas surjectif (cas particulier du théorème de Sard, cf. [Go]), car si l'on munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \sim S^2$ de la distance induite par celle de $\mathbb{R}^3$, $\gamma(S^1)$ est la réunion de N images d'arcs de longueur $\frac{2\pi}{N}$, donc contenus dans des disques sphériques de rayon $\leq C\frac{2\pi}{N}$, dont l'aire totale est $\leq N\pi\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 = O(\frac{1}{N}) = o(1)$ quand $N \to \infty$: pour N assez grand, c'est donc $< 4\pi$, donc c'est différent de S^2. Si $p_0 \in S^2 \setminus \gamma(S^1)$, $S^2 \setminus \{p_0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$ par projection stéréographique, donc γ s'étend continûment comme ci-dessus.

Théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe. *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à $\mathbb{C}$, Δ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

On pourra trouver l'histoire de ce théorème dans [SG]. La preuve sera donnée dans la section 4.3.

Proposition. *Les trois surfaces $\mathbb{C}$, Δ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. La dernière est compacte et pas les deux premières. Ensuite, Δ admet une fonction holomorphe bornée non constante [on dit qu'elle est *hyperbolique*], et $\mathbb{C}$ n'en admet pas par le théorème de Liouville.

Remarque. Le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe généralise celui de Riemann, qui dit que *tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ qui évite un point est biholomorphe à Δ*. En effet, un tel ouvert U n'est pas biholomorphe à $\mathbb{C}$: si $a \in \mathbb{C} \setminus U$, la simple connexité entraîne l'existence d'une racine carrée holomorphe f de $z - a$ (voir plus loin), et l'image de f contient un disque ouvert $b + \Delta_r$, donc évite $-b + \Delta_r$, donc $\frac{1}{f+b}$ est une fonction holomorphe bornée.

4.2 Propriétés des surfaces de Riemann simplement connexes

Définition. Une *courbe proprement plongée* dans une variété différentiable est une sous-variété connexe de classe C^1 par morceaux qui est un sous-espace topologique fermé. Le théorème de classification des variétés de dimension un (cf [Mi 2]) implique qu'une telle sous-variété [si elle est séparable ou métrisable, ce qui est le cas si la variété ambiante l'est] est l'image d'un plongement propre C^1 par morceaux de S^1 ou de $\mathbb{R}$. Dans le premier cas, on dit qu'on a un *lacet plongé*, dans le second une *droite proprement plongée.*

Proposition. *Soit X une surface de Riemann. Considérons les propriétés suivantes :*

(SC) X est simplement connexe

(i) $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$, c'est-à-dire toute un-forme fermée est exacte. Variante : $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$.

(ii) Toute différentielle méromorphe sans résidus [ou : de seconde espèce] est exacte, c'est-à-dire est la différentielle d'une fonction méromorphe.

(iii) Toute fonction continue [ou C^∞] $f : X \to \mathbb{C}^*$ a un logarithme continu. Si f est holomorphe, ce logarithme est holomorphe.

(iv) Toute fonction continue [ou C^∞] $f : X \to \mathbb{C}^*$ a une racine carrée continue. Si f est holomorphe, celle-ci est holomorphe.

(v) Il n'existe pas de couple (γ_1, γ_2), où $\gamma_1 : S^1 \to X$ est un lacet plongé de classe C^1 et $\gamma_2 : S^1$ ou $\mathbb{R} \to X$ est un lacet plongé ou une droite proprement plongée, qui ont un unique point d'intersection qui est de plus transverse, c'est-à-dire $\{(t,u) \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(u)\} = \{(t_1, t_2)\}$ et $\gamma_1'(t_1)$, $\gamma_2'(t_2)$ sont linéairement indépendants [on identifie $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$].

(vi) X est simplement connexe au sens de Riemann *: toute courbe proprement plongée disconnecte X. Plus explicitement : tout lacet plongé C^1 par morceaux disconnecte X, et toute droite proprement plongée C^1 par morceaux disconnecte Xtout lacet plongé C^1 par morceaux disconnecte X, et toute droite proprement plongée C^1 par morceaux disconnecte X. Autrement dit : le complémentaire a deux composantes, dont l'adhérence est un domaine fermé bordé par le lacet ou la droite.*

On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned}&(SC) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)\\&(i) \Rightarrow (ii)\\&(i) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)\end{aligned}$$

Démonstration. (SC) $\Rightarrow$ (i) Soit $\alpha \in \Omega^1(X)$ une forme fermée. Si $\gamma : \partial\Delta$ est un lacet C^∞, il s'étend par hypothèse en une application $\Gamma : \overline{\Delta} \to X$ de classe C^∞. Par Stokes,

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\partial\Delta} \gamma^*\alpha = \int_{\overline{\Delta}} \Gamma^* d\alpha = 0.$$

Fixant un point $p_0 \in X$, on peut donc définir $f(p) = \int_\gamma \alpha$, où γ est un chemin C^1 quelconque de p_0 à p : si γ' est un autre tel chemin, $\gamma * \overline{\gamma}'$ est un lacet C^1 par morceaux, donc $\int_{\gamma*\overline{\gamma}'} \alpha = \int_\gamma \alpha - \int_{\gamma'} \alpha = 0$. Soit $\psi : (\Delta, 0) \to (X, p)$ un paramétrage C^1 local [on peut le prendre holomorphe, mais ce n'est pas essentiel]], et soit $v \in \Delta$. Posant $c_v(t) = tv$, on a

$$\begin{aligned}f(\psi(v)) &= \int_{\gamma*(\psi\circ c_v)} \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_{\psi\circ c_v} \alpha\\&= f(p) + \int_0^1 (\psi^*\alpha)_{c_v(t)}(v)dt\\&= f(p) + (\psi^*\alpha)_0(v) + o(v)\\&= f(p) + \alpha_p(D\psi(0).v) + o(v),\end{aligned}$$

donc f est différentiable et $Df(p) = \alpha_p$, soit $df = \alpha$. Donc $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$.

Donc $H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{R}) \oplus iH^1(X, \mathbb{R}) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) L'équivalence entre le cas continu et le cas C^∞ se prouve par approximation. Si $f : X \to \mathbb{C}^*$ est C^∞, $\frac{df}{f} \in \Omega^1(X, \mathbb{C})$ est une forme fermée, donc il existe $g \in C^\infty(X, \mathbb{C})$ telle que $dg = \frac{df}{f}$. Donc $d(fe^{-g}) = e^{-g}(df - fdg) = 0$, soit $e^g = Cf$, donc $h = g - \log C$ est un logarithme C^∞ de f [pour une détermination quelconque de $\log C$]. Si f est holomorphe, g aussi, donc h aussi.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si f a un logarithme h, elle a une racine carrée $e^{\frac{h}{2}}$ de même régularité.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Par hypothèse, il existe une suite de fonctions (f_n), continues ou holomorphes, telles que $f_0 = f$ et $f_{n+1}^2 = f_n$. Choisissant convenablement la détermination, on peut imposer que $f_n(p_0) \to 1$ pour un $p_0 \in X$ fixé. Pour tout $p \in X$, $f_n(p) \to 1$ donc $\Re(f_n(p)) > 0$ pour n assez grand (considérer la restriction de f à un chemin C^1 de p_0 à p, la variation de l'argument est $V > \infty$, il suffit de prendre $n > \frac{V}{2\pi}$), donc on peut définir $h(p) = 2^n \log f_n(p)$ avec la détermination principale, ce qui est indépendant de n. Alors $e^h = (f_n)^{2^n} = f$, de plus la convergence est uniforme, donc n est localement borné, donc h est continue ou holomorphe.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $\omega \in \mathcal{M}^1_X$ sans résidus. Au voisinage de chaque pôle p_i, choisissons une uniformisante z_i définie sur U_i et l'envoyant sur Δ_2, de sorte que les U_i soient disjoints. Alors ω admet une primitive méromorphe u_i sur U_i. Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ de classe C^∞ qui vaut 1 hors de $[0,1]$ et 0 près de 0. Alors la forme $\widetilde{\omega}$ qui vaut ω hors des $z_i^{-1}(\overline{\Delta})$ et $d(\rho(|z_i|)u_i)$ sur U_i est bien définie. De plus, $\widetilde{\omega} \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ et $d\widetilde{\omega} = 0$. Par (i), il existe $\widetilde{f} \in C^\infty(X,\mathbb{C})$ telle que $d\widetilde{f} = \widetilde{\omega}$, en particulier $\widetilde{f}$ est holomorphe hors des $z_i^{-1}(\overline{\Delta})$. Sur $U_i \setminus \{p_i\}$, $df = d(\rho(|z_i|)u_i)$ donc $\widetilde{f} = \rho(|z_i|)u_i + C_i$. Posant $f = \widetilde{f}$ hors des $z_i^{-1}(\overline{\Delta})$ et $f = u_i + C_i$ sur $U_i \setminus \{p_i\}$, on obtient f méromorphe sur X telle que $df = \omega$.

(i) $\Rightarrow$ (v) On montre la contraposée. On part donc de γ_1 et γ_2 contredisant (vii) comme ci-dessus, que l'on peut supposer C^∞. On peut trouver un *voisinage collier paramétré* c'est-à-dire un plongement lisse $\Gamma : S^1 \times [-1,1] \to X$ ou $\mathbb{R} \times [-1,1] \to X$ de classe C^1, tel que $\Gamma(t,0) = \gamma(t)$: on utilise l'orientabilité de X, et dans le cas d'une droite l'existence d'une métrique riemannienne. On peut de plus imposer et $\Gamma(0,s) = \gamma_2(s)$ et que γ_2 ne rencontre l'image V de Γ qu'en p. Soit $\rho \in C^\infty([-1,1],[0,1])$ qui vaut 0 près de 0 et 1 près de 1, on définit $u(\Gamma(t,s)) = \rho(s)$ puis $\alpha = du$ sur V et $\alpha = 0$ hors de V : alors α est une un-forme fermée dans $\Omega^1(X,\mathbb{R})$, et $\int_{\gamma_2} \alpha = \int_{-1}^1 \rho'(s)ds = 1$, donc α n'est pas exacte.

(v) $\Rightarrow$ (vi) On montre la contraposée. Supposons donc qu'il existe un lacet plongé ou droite proprement plongée γ_1 de classe C^1 par morceaux qui ne disconnecte pas X. Par approximation on peut supposer γ_1 de classe C^∞. On définit $\Gamma : (S^1 \text{ ou } \mathbb{R}) \times [-1,1] \to X$ comme ci-dessus. Fixons $t_0 \in S^1$ ou $\mathbb{R}$. Les deux points $\Gamma(t,-1)$ et $\Gamma(t,1)$ sont dans la même composante de $X \setminus \mathrm{im}(\gamma_1)$, donc on peut prolonger c à un lacet γ_2 de classe C^1 par morceaux, défini sur $\mathbb{R}/4\mathbb{Z}$, qui ne rencontre γ qu'en $\gamma_1(t_0)$, point transverse. Donc (v) n'est pas vérifié.

Remarques. 1) Nous verrons qu'en fait chacune de ces propriétés implique la simple connexité de X, et lui est donc équivalente.

2) Pour un espace «raisonnable», la propriété (iii) équivaut à $H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$ soit $\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{Z}) = 0$ où $\pi_1(X)$ est le groupe fondamental. Si $\pi_1(X)^{ab} = H_1(X,\mathbb{Z})$ est de type fini ou plus généralement somme ou produit de groupes monogènes, elle équivaut donc à $\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{R}) = 0$ soit $H^1(X,\mathbb{R}) = 0$ donc à (i). Mais on peut trouver une variété différentiable (de dimension au moins quatre) telle que $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Q}$ ou $\pi_1(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Sur une telle variété, (iii) est vrai mais pas (i).

Par ailleurs, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une surface non orientable qui vérifie $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc elle vérifie (i) mais n'est pas simplement connexe. On peut montrer que c'est la seule surface avec ces propriétés.

3) De même, pour un espace «raisonnable», (iv) équivaut à : tout morphisme $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ est à valeurs dans $2\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{Z}) = 0$ donc à (iii). En fait, la preuve donnée plus haut de l'équivalence de (iii) et (iv) vaut pour tout espace connexe par arcs (on peut toujours relever l'argument à $\mathbb{R}$ le long d'un chemin continu).

4) La propriété (vi) aurait pu être énoncée avec des lacets ou arcs seulement continus. Mais pour la prouver, il faudrait le théorème de Jordan.

5) Si X est compacte, il n'y a pas de droite proprement plongée, donc (vi) équivaut à : tout lacet plongé disconnecte X. Si X est ouverte, le fait que toute droite proprement plongée disconnecte X implique le fait que tout lacet plongé disconnecte X. En effet, si γ est un lacet plongé, on peut mener à partir du point base p_0 une demi-droite plongée qui ne rencontre γ qu'en p_0, puis déformer $\overline{\alpha} * \gamma * \alpha$ en une droite proprement plongé δ : celle-ci disconnecte X si et seulement si γ disconnecte X. En revanche, le fait que tout lacet plongé disconnecte X n'implique pas que toute droite proprement plongée disconnecte X, exemple $X = \mathbb{C}^*$. Cette propriété équivaut au fait que X est *planaire*, c'est-à-dire se plonge topologiquement (ou différentiablement) dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On peut montrer (mais probablement pas dans ce cours) que ceci équivaut à l'existence d'un plongement holomorphe dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Si X est une variété différentiable de dimension n quelconque, la généralisation de cette propriété est : *toute hypersurface compacte ou proprement plongée disconnecte* X. Ceci équivaut à : *tout revêtement double de* X *est trivial [= non connexe]*, soit $\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, ou encore $H^1(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. En effet, si $\Sigma^{n-1} \subset X^n$ ne disconnecte pas, on peut recoller deux exemplaires de $X \setminus V$ où V est un voisinage tubulaire de Σ : si Σ est co-orientable, donc $V \approx \Sigma \times]-1,1[$, on recolle le $\Sigma \times \{1\}$ d'un exemplaire au $\Sigma \times \{-1\}$ de l'autre ; sinon, Σ ne disconnecte déjà pas V (exemple : $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\Sigma = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $V =$ ruban de Möbius), ∂V est connexe et on recolle $(\partial V)_1$ et $(\partial V)_2$ par un difféomorphisme commutant avec les projections sur Σ_1 et Σ_2. On obtient ainsi un revêtement double $\widehat{X} \to X$ qui est connexe donc non trivial. Réciproquement, soit

$\pi : \widehat{X} \to X$ un revêtement double connexe. Par théorie des revêtements, est défini par un morphisme non nul $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce morphisme est induit par une application $f : X \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ (puisque $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ est un espace d'Eilenberg-McLane $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, c'est-à-dire a un seul groupe d'homotopie non trivial, $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Par approximation cellulaire, on peut supposer f à valeurs dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, puis on peut la supposer de classe C^∞ et transverse à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$: alors $\Sigma = f^{-1}(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$ est une hypersurface proprement plongée qui ne disconnecte pas X, puisque $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ ne disconnecte pas $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Si X est ouverte, le fait que toute hypersurface compacte disconnecte X n'implique pas que toute hypersurface proprement plongée disconnecte X, exemple $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Cette propriété équivaut à H_{n-1} $(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, soit $H^1_c(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ (cohomologie à support compact).

4.3 Preuve du théorème d'uniformisation

Cette preuve suit de près [We], chapitre 20, d'après des idées de Hilbert et Koebe. La simple connexité sera utilisée à travers la propriété (vi).

Soient X une surface de Riemann, et p un point de X. D'après le chapitre précédent, il existe une différentielle méromorphe ω qui a un pôle double sans résidu en p et est holomorphe ailleurs, et telle que de plus sa partie réelle $\Re\omega = du$ est exacte et vérifie

$$(*) \qquad \mathcal{D}'_X(u, w) = 0 \text{ pour tout } w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X) \text{ tel que } w = 0 \text{ près de } p.$$

Rappelons que cette propriété résulte du fait que u minimise l'intégrale de Dirichlet renormalisée $\mathcal{D}_\Phi$.

Proposition 1. *Si X est simplement connexe, ou plus généralement si tout lacet simple C^∞ disconnecte, la forme harmonique $*du$ est exacte sur $X \setminus \{p\}$.*

Démonstration. Si X est simplement connexe, ceci résulte du fait que toute forme fermée est exacte (propriété (i) de la Proposition 4.2). En général, il suffit de montrer que si $\gamma : S^1 \to X \setminus \{p\}$ est un lacet C^∞ plongé, on a $\int_\gamma *du = 0$. On épaissit γ en un plongement lisse $\Gamma : [-1, 0] \times S^1 \to X \setminus \{p\}$, avec $\Gamma(0, .) = \gamma$ (demi-voisinage tubulaire). Par hypothèse, $\gamma(S^1)$ disconnecte X, et il en est de même de l'anneau $A = \Gamma([-1, 0] \times S^1)$. Notons X_- et X_+ les composantes de $X \setminus A$ de frontière $\Gamma(\{-1\} \times S^1)$ et $\gamma(S^1)$. Quitte à remplacer γ par $\overline{\gamma}$, on peut supposer $p \in X_-$. Soit $w \in C^\infty(X, [0, 1])$ qui vaut 0 sur X_-, 1 sur X_+, et $w(\Gamma(s, t)) = w(s)$. Alors $w \in C^1_{\mathcal{D}<\infty}(X)$, w est nulle près de p, donc

$$\int_X (du, dw) = 0 = \int_A d(w * du) = \int_\gamma *du.$$

Donc il existe v harmonique sur $X \setminus \{p\}$ telle que $f = u + iv$ est méromorphe sur X, avec un pôle simple en p. Le théorème est alors immédiat si X est compacte : en effet, l'application holomorphe $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est de degré un donc est un isomorphisme. En général, il résultera de la

Proposition 2. *Soit $f = u + iv$ une fonction méromorphe sur X simplement connexe, ayant un pôle simple en p et vérifiant la propriété $(*)$. Alors f est injective, et son image est soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{z_0\}$, soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus ([-u_0, u_1] + iv_0)$ avec $u_0, u_1, v_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 < u_1$.*

En effet, si cette proposition est vraie, l'uniformisation est prouvée dans le premier cas. Et aussi dans le second cas, parce que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{z_0\}$ est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$ via $\frac{1}{z - z_0}$. Dans le dernier cas, $g := \frac{2f - (u_0 + u_1)}{u_1 - u_0} - iv_0$ est un biholomorphisme de X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus [-1, 1]$. Or la *transformation de Joukovski*

$$h(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) \ , \ h(0) = \infty,$$

est un biholomorphisme de Δ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus [-1, 1]$ (exercice : son inverse est $h^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, avec la détermination de la racine carrée qui est positive sur $]1, +\infty[$). Donc $h^{-1} \circ g$ est un biholomorphisme de X sur Δ.

Remarque. Si l'image omet plus d'un point, les points omis forment un segment horizontal. Donc la conclusion de la proposition 2 n'est pas valable pour $v - iu$ ou pour $e^{i\theta}(u + iv) = (\cos\theta u - \sin\theta v) + i(\sin\theta u + \cos\theta v)$, $e^{i\theta} \neq \pm 1$. Donc, si $e^{i\theta} \neq \pm 1$, la fonction $u_\theta = \cos\theta u - \sin\theta v$ ne minimise pas l'intégrale de Dirichlet renormalisée $\mathcal{D}_{\Phi_\theta}$, $\Phi_\theta = \Re(e^{i\theta}(z + \frac{1}{z}))$. Et ce bien que $\mathcal{D}_{\Phi_\theta}(u_\theta) = \mathcal{D}_\Psi(u)$.

Preuve de la proposition 2. Nous prouvons un lemme clé dû à Koebe, puis l'injectivité et enfin nous déterminons l'image.

1) Lemme clé. *(i) Il n'existe pas de domaine fermé $K \subset X$, contenu dans $X \setminus \{p\}$, dont le bord est contenu dans la réunion d'un niveau $\{u = u_0\}$ de u et d'un nombre fini $\{v = v_1\}, \cdots, \{v = v_n\}$ de niveaux de v.*

(ii) Si X est simplement connexe, il n'existe pas de lacet plongé ou de droite proprement plongée C^1 par morceaux dans X, contenu dans $X \setminus \{p\}$, qui est contenu dans la réunion d'un niveau $\{u = u_0\}$ de u et d'un nombre fini $\{v = v_1\}, \cdots, \{v = v_n\}$ de niveaux de v.

Remarques. 1) Attention à la formulation : on demande à K d'être fermé dans X, pas seulement dans $X \setminus \{p\}$. De même, la droite doit être proprement plongée dans X, et non contenir une demi-droite tendant vers p.

2) Noter la dissymétrie entre u et v : s'il n'y en avait pas, la conclusion de la proposition 2 devrait aussi être symétrique !

Démonstration. (i) Supposons par l'absurde qu'un tel domaine K existe. Soient $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, bornées ainsi que leurs dérivées, avec $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\psi > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{v_1, \cdots, v_n\}$, et $\varphi(u_0) = \varphi'(u_0) = 0$, $\psi(v_i) = \psi'(v_i) = 0$. Explicitement, on peut prendre $\varphi(t) = (\mathrm{Arctg}(t - u_0))^3$, $\psi(t) = \prod_{i=1}^n (\mathrm{Arctg}(t - v_i))^2$.

Soit $w : X \to \mathbb{R}$ telle que $w = (\varphi \circ u).(\psi \circ v) = \varphi(u)\psi(v)$ sur K et 0 ailleurs. Alors φ est de classe C^1 car $\varphi|\partial K = 0$ et $D\varphi|\mathrm{Int}(K)$ se prolonge par continuité en 0 sur ∂K. Puisque $dv = *du$, on a $(du, dv) = 0$ et $||du||^2 = ||dv||^2$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_X(w) = \mathcal{D}_K(\varphi(u)\psi(v)) &= \iint_K ||\varphi'(u)\psi(v)du + \varphi(u)\psi'(v)dv||^2 \\ &= \iint_K (\varphi'(u)^2\psi(v)^2 + \varphi(u)^2\psi'(v)^2))\ ||du||^2 \leq C\mathcal{D}_K(u) < \infty.\end{aligned}$$

On peut donc calculer $\mathcal{D}'_X(u, w)$, qui vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_X(u, w) = \mathcal{D}'_K(u, \varphi(u)\psi(v)) &= \iint_K (du, \varphi'(u)\psi(v)du + \varphi(u)\psi'(v)dv) \\ &= \iint_K \varphi'(u)\psi(v)\ ||du||^2 > 0.\end{aligned}$$

Ceci contredit $(*)$.

(ii) Supposons par l'absurde qu'un tel lacet ou droite γ existe. Par simple connexité, il borde deux domaines fermés dans X. Soit K celui qui ne contient pas p, il contredit (i).

2) Injectivité. *L'application f est injective. En particulier, f n'a pas de point critique, donc u et v non plus.*

Démonstration. Supposons au contraire que f prend deux fois la même valeur $z_0 = u_0 + iv_0$, nécessairement finie. Puisque X est séparable, les points critiques de f sont en nombre au plus dénombrable. Par ailleurs, ils coïncident avec ceux de u et avec ceux de v. Puisque les points ayant au moins deux images réciproques forment un ouvert, on peut perturber z_0 pour que u_0 ne soit pas une valeur critique de u et v_0 ne soit pas une valeur critique de v. Alors les niveaux $\{u = u_0\}$ et $\{v = v_0\}$ sont des courbes lisses propres dans $X \setminus \{p\}$ (pas forcément connexes), qui se rencontrent en (au moins) deux points p_1 et p_2.

Par ailleurs, au point p, $\frac{1}{f}$ est une uniformisante, que nous noterons $\zeta = \xi + i\eta$, de sorte que $u = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $v = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Son image contient un disque fermé $\overline{\Delta}_r$. Dans cette uniformisante, le niveau $\{u = u_0\}$ devient $\{\xi = u_0(\xi^2 + \eta^2)\}$, cercle (si $u_0 \neq 0$) ou droite (si $u_0 = 0$) passant par 0, à tangente verticale. De même, le niveau $\{v = v_0\}$ devient $\{\eta = -v_0(\xi^2 + \eta^2)\}$, cercle (si $v_0 \neq 0$) ou droite (si $v_0 = 0$) passant par 0, à tangente horizontale. On en déduit que $C_{u_0} := \{u = u_0\} \cup \{p\}$ et $\Gamma_{v_0} := \{v = v_0\} \cup \{p\}$ sont des courbes proprement plongées dans X, qui se rencontrent transversalement en les trois points p_1, p_2, p.

Considérons les quatre branches locales de C_{u_0} et de Γ_{v_0} en p_1. D'après le lemme clé, partie (ii), on ne peut en avoir deux qui restent dans $X \setminus \{p\}$, donc il y en a au moins trois qui passent par p. De même, parmi les quatre branches locales de C_{u_0} et de Γ_{v_0} en p_2, il y en a au moins trois qui passent par p. Il y a alors deux possibilités.

1) Il existe un lacet plongé $\gamma_1 \subset C_{u_0}$ et un lacet plongé $\gamma_2 \subset \Gamma_{v_0}$, tels que γ_1 et γ_2 contiennent p_1, p_2 et p.

2) Même énoncé, avec des droites proprement plongées au lieu de lacets.

Dans le premier cas, on peut former un lacet réunion des arcs de p_1 à p_2 sur γ_1 et γ_2 qui évitent p, ce qui contredit le lemme clé. Dans le second cas, soit les points p_1 et p_2 sont reliés sur γ_1 et γ_2 sans passer par p, et l'on a la même contradiction, soit l'un des points p_1 et p_2 est relié à l'infini sur γ_1 et sur γ_2 sans passer par p, donnant une droite proprement plongée qui contredit aussi le lemme clé.

3) Fin de la preuve : détermination de l'image. D'après la section précédente, pour tout $v_0 \in \mathbb{R}$, Γ_{v_0} est une courbe propre et lisse dans X. De plus, elle n'a qu'une seule composante connexe, celle qui contient p : une autre composante contredirait le lemme clé. Elle est donc un lacet plongé ou une droite proprement plongée. La restriction de u à Γ_{v_0} est injective à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, et elle prend la valeur ∞, donc son image est :

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si Γ_{v_0} est un lacet
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus [u_0, u_1]$ avec $u_0 \leq u_1$ si Γ_{v_0} est une droite proprement plongée.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de prouver qu'il ne peut exister deux valeurs v_1, v_2 telles que Γ_{v_0} et Γ_{v_1} soient toutes les deux des arcs. Si c'était le cas, on fabriquerait une droite proprement plongée dans X, composée

- d'une demi-droite allant de p à l'infini dans Γ_{v_1}, sur lequel u varie de $+\infty$ à U_1
- d'une demi-droite allant de p à l'infini dans Γ_{v_2}, sur lequel u varie de $+\infty$ à U_2.

Prenant $U > 0$ assez grand, on peut la «tronquer» par un petit arc dans $\{u = U\}$ contenu dans le domaine de ζ, obtenant ainsi une droite proprement plongée contredisant le lemme clé [c'est la seule fois où celui-ci est utilisé avec plus d'une valeur pour v]. Ceci achève la preuve.

4.4 Revêtement universel d'une surface de Riemann

Définitions. Une application $\pi : \widetilde{X} \to X$ entre deux surfaces de Riemann est un *revêtement holomorphe* (non ramifié) si elle est holomorphe et si tout point $x \in X$ a un voisinage U tel que $\pi^{-1}(U)$ est homéomorphe à $\pi^{-1}(\{x\} \times U$ via un homéomorphisme h tel que $\mathrm{pr}_2 \circ h = \pi$ [noter que les fibres de π sont discrètes puisque π est non constante]. Ceci implique que la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$, qui est finie ou dénombrable, a un cardinal indépendant de x. En particulier, si elle est finie on dit que le revêtement est fini de degré $d = \mathrm{card}(\pi^{-1}(\{x\})$. Ou encore : un revêtement *à d feuillets.*

Si $\widehat{X}$ est simplement connexe, on dit que π est un revêtement *universel* de X. L'espace $\widehat{X}$ est alors le plus souvent noté $\widetilde{X}$.

L'étude des applications propres donne la

Propriété. *Si $f : \widehat{X} \to X$ est une application holomorphe entre surfaces de Riemann, c'est un revêtement fini si et seulement si elle est propre et sans point critique. Son degré est alors celui déjà défini pour une application propre.*

Exemples. L'application $\pi_d : z \in \Delta^* \mapsto z^d \in \Delta^*$ est un revêtement de degré d du disque pointé. L'application $\pi_\infty : z \mapsto e^z$ est un revêtement universel du disque pointé.

Proposition. *Tout revêtement fini connexe $\pi : \widehat{X} \to \Delta^*$ de Δ^* est isomorphe à π_d, $d = \deg(\pi)$.*

Démonstration. Il suffit de construire un biholomorphisme $f : \widehat{X} \to \Delta^*$ tel que $f(p)^d = \pi(p)$, c'est-à-dire qui est une racine d-ième de π. En fait, il suffit de construire une racine d-ième holomorphe f : si f existe, ell est propre et sans point critique, et envoie la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ dans la fibre $\pi_d^{-1}(\{x\})$. De plus, f est ouverte et fermée, donc surjective, donc l'application $\pi^{-1}(\{x\}) \to \pi_d^{-1}(\{x\})$ est surjective, donc bijective. Donc f est bijective.

On construit f par prolongement analytique. Comme f est surjective, il existe $p_0 \in \widehat{X}$ tel que $\pi(p_0) = \frac{1}{2}$. On choisit une racine d-ième z_0 de $\frac{1}{2}$. Puis, si $p \in \widehat{X}$, on considère un chemin c de p_0 à x et l'on prolonge analytiquement la racine d-ième le long de c, trouvant $\widehat{c}(t) \in \Delta^*$, continu en t et tel que $\widehat{c}(t)^d = c(t)$. On définit $f(p) = \widehat{c}(1)$. Il reste à montrer que ceci est indépendant du chemin c, ou de façon équivalente, que si c est un lacet en p_0, $\widehat{c}$ est un lacet en z_0. Ou encore que $\pi \circ c$ est homootpe à $e^{2\pi,ikt}\frac{1}{2}$ pour un k multiple de d.

En relevant à $\widehat{X}$ les lacets $e^{2\pi it}z$ pour $z \in \Delta^*$, on construit un chemin de biholomorphismes (φ_t), tel que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et $\pi \circ \varphi_1 = \pi$ (on dit que φ_1 est un automorphisme de $\widehat{X}$ au-dessus de X). Considérons l'évaluation

$$e : \psi \in \langle \varphi_1 \rangle \mapsto \psi(p_0) \in \pi^{-1}(\frac{1}{2}).$$

Elle est injective car tout automorphisme de π est déterminé par sa valeur en un point par prolongement analytique. Elle est surjective car si $p \in \pi^{-1}(\frac{1}{2})$ et c est un chemin de p_0 à p, $\pi \circ c$ est un lacet en $p\frac{1}{2}$, donc homotope à $e^{2\pi ikt}.\frac{1}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ convenable. Donc $p = \varphi_1^k(p_0)$. Donc e est bijective, c'est-à-dire que φ_1 est d'ordre d. Enfin, si c est un lacet en p_0, $\pi \circ c$ est homotope à $e^{2\pi ikt}.\frac{1}{2}$, donc $c(1) = p_0 = \varphi_1^k(p_0)$, donc $k \in d\mathbb{Z}$, cqfd.

Existence et unicité du revêtement universel

Nous admettrons le résultat suivant.

Théorème. *Toute surface de Riemann simplement connexe admet un revêtement universel $\pi : \widetilde{X} \to X$, unique à isomorphisme près.*

Remarques. Ce théorème est un cas particulier du théorème plus général, qu'on peut trouver dans [Go], que tout espace connexe par arcs et semi-localement simplement connexe (c'est-à-dire que tout point a un voisinage tel que tout lacet dans ce voisinage est homotope à une constante dans l'espace entier) a un revêtement universel, unique à isomorphisme près. On peut l'appliquer à une surface de Riemann puisque tout point a un voisinage contractile donc a fortipri simlement connexe. On trouve ainsi un revêtement universel topologique $\pi : \widetilde{X} \to X$, et l'on remonte à $\widetilde{X}$ la structure de sur face de Riemann de X en prenant pour cartes holomorphes les $\varphi \circ \pi_{|\widehat{U}}$ où φ est une carte de X de domaine U et $\widetilde{U}$ est un ouvert de $\widetilde{X}$ envoyé homéomorphiquement sur U par π.

On peut construire $\widetilde{X}$ de la façon suivante. On fixe $p_0 \in X$, et l'on pose $\widetilde{X} = C/_{\simeq}$, où C est l'espace des chemins sur X issus de p_0, et $\simeq$ est l'homotopie relativement aux extrémités. La projection π est donnée par $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$. Dans le cas des surfaces de Riemann,qui est à l'origine de la théorie des revêtements, cet espace $\widetilde{X}$ est naturellement celui sur lequel est le prolongement analytique d'une fonction holomorphe quelconque donnée sur un voisinage de p_0.

Complément. *Le groupe des automorphismes de $\widetilde{X}$ au-dessus de X,*

$$\Gamma = \mathrm{Aut}(\widetilde{X}|X) := \{\varphi \in \mathrm{Bihol}(\widetilde{X}) \mid \pi \circ \varphi = \pi\},$$

agit de façon propre et libre sur $\widetilde{X}$, c'est-à-dire que tout point $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ a un voisinage U qui est disjoint de tous ses translatés $\gamma(U)$ pour $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Donc le quotient $\widetilde{X}/_{\Gamma}$ a une structure naturelle de surface de Riemann, et l'application naturelle $\widetilde{X}/_{\Gamma} \to X$ est un biholomorphisme. Donc toute surface de Riemann est le quotient d'une surface simplement connexe par un groupe de biholomorphismes agissant proprement et librement.

Remarque. Par définition, un groupe agit proprement sur un espace topologique si tout point a un voisinage qui est disjoint de tous ses translatés sauf au plus un nombre fini. Il agit librement si tout élément différent du neutre agit sans points fixes. Donc un groupe agit proprement et librement sur un espace séparé si et seulement si tout point a un voisinage qui est disjoint de tous ses translatés non triviaux.

4.5 Les surfaces de Riemann simplement connexes et leurs groupes d'automorphismes

1. Cas de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ Le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, qui agit par transformations homographiques $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}$. En effet, si f est un automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors : soit $f(\infty) = \infty$ et $f|\mathbb{C}$ induit un biholomorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $|f(z)| \leq C|z|$ pour $|z|$ assez grand (puisque ∞ n'est pas un point critique), donc $f(z) = az + b$ d'après Liouville. Soit $f(\infty) = z_0 \in \mathbb{C}$, et $g = \frac{1}{f-z_0}$ est un biholomorphisme qui fixe ∞, donc $g(z) = az + b$ soit $f(z) = z_0 + \frac{1}{az+b} = \frac{z_0az+z_0b+1}{az+b}$.

Comme toute homographie a au moins un point fixe, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ n'a pas de quotient non trivial.

2. Cas de $\mathbb{C}$ Tout biholomorphisme f de $\mathbb{C}$ est affine, $f(z) = az + b$. En effet, $g(w) = \frac{1}{f(\frac{1}{w})}$ est holomorphe sur un voisinage épointé de 0 et tend vers 0 en 0, donc est holomorphe et vaut 0 en 0. De plus, elle est injective, donc $g'(0) \neq 0$, donc $|g(w)| \geq C|w|$ près de 0 c'est-à-dire $|f(z)| \leq \frac{|z|}{C}$ pour $|z|$ assez grand, donc $f(z) = az + b$ par Liouville.

L'application $f(z) = az + b$ est sans point fixe si et seulement si $a = 1$ et $b \neq 0$, donc un groupe de biholomorphismes agissant librement est un groupe de translations par les éléments d'un sous-groupe $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Pour que l'action soit propre, il faut et il suffit que Λ soit discret, soit $\Lambda = a\mathbb{Z}$ ou $\Lambda = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ avec a, b linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ (Jacobi 1835 : une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ peut avoir au plus deux périodes indépendantes, et le rapport de celles-ci est alors non réel).

Si $\Lambda = a\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}/\Lambda$ est isomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$, et via l'exponentielle à $\mathbb{C}^*$.

Si $\Lambda = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$, X est un tore. Comme on l'a dit au premier chapitre on peut supposer $a = 1$, $b = \tau \in \mathbb{H}$, et τ est alors déterminé modulo l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ par homographies. Par ailleurs, $X = \mathbb{C}/\Lambda$ est alors isomorphe à une courbe elliptique $X_P = \widehat{P^{-1}(0)} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ associée à un polynôme $P(x, y) = y^2 - (x^3 + px + q)$, avec $4p^3 + 27q^2 \neq 0$.

3. Cas de Δ Un biholomorphisme f de Δ est de la forme $h_{\theta,a}(z) = e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$. En effet, $g = h_{-f(0)} \circ f$ vérifie $g(0) = 0$, donc par le lemme de Schwarz on a $g(z) = e^{i\theta} z$, d'où $f = h_{\theta, -e^{-i\theta} f(0)}$. Remplaçant Δ par $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ qui lui est biholomorphe, on trouve que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ est $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant par homographies. Noter que dans les deux cas $X = \Delta$ et $X = \mathbb{H}$, $\mathrm{Bihol}(X)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui préserve X. Ceci peut aussi se montrer en appliquant le principe de réflexion de Schwarz.

Un premier exemple de quotient de Δ, ou plutôt de $\mathbb{H}$, est $\mathbb{H}/a\mathbb{Z}$, quotient par les translations $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}^*$. À isomorphisme près, c'est indépendant de a, et pour $a = 2\pi i$ l'exponentielle donne un isomorphisme de $\mathbb{H}/2\pi\mathbb{Z}$ sur Δ^*. Nous verrons un exemple compact après avoir interpr´eté les biholomorphismes comme des isométries.

Métrique conforme naturelle à courbure constante sur une surface de Riemann

Soit $\widetilde{X}$ une surface de Riemann simplement connexe.

1) Si $\widetilde{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, elle est isomorphe à la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ par projection stéréographique, et celle-ci étant conforme on peut munir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ d'une métrique riemannienne à courbure constante 1. En coordonnées, celle-ci est $\frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$ sur $\mathbb{C}$, et $\frac{4|dw|^2}{(1+|w|^2)^2}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dans la coordonnée $w = \frac{1}{z}$. Cette métrique n'est pas invariante par $\mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, dont elle n'est pas naturelle, c'està-dire définie par la seule structure de surface de Riemann. Mais on peut dire qu'il a une famille naturelle de métriques conformes à courbure 1, paramétrée par $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SO}(3)$. Ici, $\mathrm{SO}(3)$ s'identifie à $\mathrm{PSU}(2) = \mathrm{SU}(2)/\{\text{centre}\} \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\text{centre}\}$ via les quaternions.

2) Si $\widetilde{X} = \mathbb{C}$, tout biholomorphisme sans point fixe est une translation donc une isométrie de la métrique conforme plate complète $|dz|^2$. Donc tout quotient admet une métrique conforme plate complète, en fait en considérant $\lambda|dz|^2$ on voit qu'il y a une famille paramétrée par $\mathbb{R}_+^*$ de telles métriques, toutes homothétiques. Si le quotient est compact, on peut trouver une métrique naturelle en fixant l'aire totale.

3) Si $\widetilde{X} = \Delta$ ou $\mathbb{H}$, $\mathrm{Bihol}(\widetilde{X})$ est le groupe des isométries orientées $\mathrm{Isom}^+(\widetilde{X}, g_{\widetilde{X}})$, où

$$g_\Delta = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} \ , \ g_{\mathbb{H}} = \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2}.$$

En effet, le biholomorphisme $f : z \mapsto w = i\frac{1+z}{1-z}$ de Δ sur $\mathbb{H}$ vérifie

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{2dz}{(1-z)^2} \\
\Im w &= \Re\frac{1+z}{1-z} = \Re\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \\
f^* g_{\mathbb{H}} &= \frac{|dw|^2}{\Im w^2} = \frac{4|dz|^2}{|1-z|^4} . \frac{|1-z|^4}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = g_\Delta .
\end{aligned}$$

Donc il suffit de prouver le résultat pour $\mathbb{H}$. Si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$, on a

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{dz}{(cz+d)^2} \\
\Im w &= \Im \frac{az+b}{cz+d} = \Im \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} \\
f^* g_{\mathbb{H}} &= \frac{|dw|^2}{(\Im w)^2} = \frac{|dz|^2}{|cz+d|^4} . \frac{|cz+d^4}{(\Im z)^2} = \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2} = g_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Bihol}(\mathbb{H})$ est contenu dans $\mathrm{Isom}(g_{\mathbb{H}})$, et il est dans $\mathrm{Isom}^+(g_{\mathbb{H}})$ puisque tout biholomorphisme préserve l'orientation. Enfin, $\mathrm{Bihol}(\mathbb{H})$ est transitif sur les couples (z, v) où $z \in \mathbb{H}$ et $v \in \mathbb{C}$ avec $||v||_z = \frac{2|v|}{1-|z|^2} = 1$, c'est à-dire les vecteurs unitaires tangents sur $\mathbb{H}$. En effet, en utilisant les biholomorphismes affines $az + b$, $a > 0$ (correspondant à $\left[\begin{pmatrix} a^{1/2} & a^{-1/2}b \\ 0 & a^{-1/2} \end{pmatrix} \right]$), on voit que $\mathrm{Bihol}(\mathbb{H})$ est transitif sur $\mathbb{H}$, donc il suffit de montrer que le stabilisateur d'un point est transitif sur les vecteurs tangents unitaires en ce point. C'est évident pour le point 0, dans le modèle (Δ, g_Δ), car ce stabilisateur est formé des rotations $e^{i\theta}z$. Comme une isométrie orientée est déterminée par l'image d'un vecteur tangent unitaire, $\mathrm{Bihol}(\mathbb{H}) = \mathrm{Isom}^+(g_{\mathbb{H}})$.

5 Algébricité des surfaces de Riemann compactes

Rappelons que si X est une surface de Riemann, $\mathcal{M}(X)$ est son corps des fonctions méromorphes. On le regarde comme une extension de $\mathbb{C}$ = les fonctions constantes. On a vu qu'on a toujours $\mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C} \neq \emptyset$, que X soit compacte ou non.

5.1 Fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann

Proposition. *On note z la fonction identité de $\mathbb{C}$, vue comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors*

(i) $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z)$, plus précisément l'application $R \in \mathbb{C}(T) \mapsto R(z)$ est un isomorphisme des fractions rationnelles à une variable sur $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.

(ii) Si f est non constante et $R = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont dans $\mathbb{C}[T]$ et premiers entre eux, on a $\deg(f) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Démonstration. (i) Cette application est bien définie puisque $Q(z) \neq 0$ si $Q \in \mathbb{C}[T] \setminus \{0\}$, et c'est un morphisme de corps, donc elle est injective. Il suffit de montrer qu'elle est surjective. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est non constante, soient $z_1, \cdots, z_k$ les pôles de f sur $\mathbb{C}$, d'ordres $n_1, \cdots, n_k$. Alors $g(z) = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{n_i} f(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, si $|z| \to \infty$ on a $f(z) \to C \in \mathbb{C}$ ou $f(z) \to \infty$, et dans ce dernier cas $|f(z)| = O(|z|^m$ où m est l'ordre du pôle ∞. Donc $g(z) = O(|z|^N)$, et par la généralisation du théorème de Liouville, g est un polynôme, donc $f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^k (z-z_i)^{n_i}}$ est le quotient de deux polynômes.

(ii) L'image réciproque $f^{-1}(\{\infty\})$ est formée de $P^{-1}(\{0\})$, qui donne une mulitplicité totale $\deg(P)$, et éventuellement de ∞. Si $z \to \infty$, on a $f(z) \sim Cz^{\deg(P)-\deg(Q)}$, donc ∞ contribue au degré pour $\max(0, \deg(Q) - \deg(P))$. Donc $\deg(f) = \deg(P) + \max(0, \deg(Q) - \deg(P)) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

5.2 Fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte quelconque

Soit X une surface de Riemann compacte, de corps des fractions méromorphes $\mathcal{M}(X)$. Ce corps est une extension de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire : contient $\mathbb{C}$ = les constantes) et nous avons prouvé que $\mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}$ est non vide (que X soit compacte ou non).

Définition. (cf. le cours d'Algèbre approfondie ou de Géométrie algébrique) Un *corps de fonctions d'une variable sur* $\mathbb{C}$ est une extension $L/\mathbb{C}$ finiment engendrée et de degré de transcendance un. De façon équivalente, , $L = \mathbb{C}(a, b)$ avec $a \notin \mathbb{C}$ [donc transcendant sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos] et b algébrique sur $\mathbb{C}(a)$. Ou encore : L est une extension non triviale de $\mathbb{C}(a)$, avec $a \notin \mathbb{C}$, et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\deg_{\mathbb{C}}(b) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(b) \leq N$ pour tout $b \in \mathbb{C}$.

Proposition. *Si X est une surface de Riemann compacte, $\mathcal{M}(X)$ est un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous savons déjà que $\mathcal{M}(X)$ n'est pas réduit à $\mathbb{C}$. Il suffit de démontrer que si $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}$, tout élément $g \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}$ vérifie $\deg_{\mathbb{C}(f)} g \leq N$ avec N indépendant de g. Nous allons voir que $N = \deg(f)$ convient, où $\deg(f)$ est le degré de f vu comme application holomorphe de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

En effet, soient $F_1 \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'ensemble des valeurs critiques de f, $F_2 = f(g^{-1}(\{\infty\}))$ et $F = F_1 \cup F_2$ qui est fini, ainsi que $f^{-1}(F)$. Si $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus F$, $f^{-1}(\{z\})$ se compose de N points distincts $w_1(z), \cdots, w_N(z)$, les w_i étant définies localement et holomorphes. Il en est de même des fonctions $g \circ w_i$, qui sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc les fonctions symétriques $s_j(z) = \sigma_j(g \circ w_1(z), \cdots, g \circ w_N(z))$, $1 \leq j \leq N$ sont bien définies sur $X \setminus f^{-1}(F)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et holomorphes.

Soit $z_0 \in F$ ayant une uniformisante ζ ($= z - z_0$ ou $\frac{1}{z}$). On a $f^{-1}(\{z_0\}) = \{p_1, \cdots, p_m\}$ avec $m \leq n$. Soient $\eta_1, \cdots, \eta_m$ des uniformisantes en ces points, on a alors $\zeta \circ f \sim \eta_k^{d_k}$, $d_k \in \mathbb{N}^*$ et $g \sim \eta^{n_k}$, $k \in \mathbb{Z}$, au voisinage de p_k : ici la relation $\sim$ veut dire que le quotient a une limite non nulle. Donc $|\eta_k \circ w_j| \sim |\zeta|^{\frac{1}{d_k}}$ si w_j est à valeurs dans le domaine de η_k, d'où $|g \circ w_i| = O(|\zeta|^{\frac{n_k}{d_k}})$. On en déduit $|s_j| = O(|\zeta|^{-N \max_k \frac{d_k}{m_k}})$, donc les s_j sont méromorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire sont des fractions rationnelles $s_j = R_j(z)$. Par construction, on a

$$g^n + \sum_{j=1}^{N} (-1)^j (s_j \circ f) g^j = g^n + \sum_{j=1}^{N} (-1)^j R_j(f) g^j = 0 \text{ sur } X \setminus f^{-1}(F).$$

Comme $f^{-1}(F)$ est fini, ceci veut dire $g^n + \sum_{j=1}^{N} (-1)^j R_j(f) g^j = 0$ dans $\mathcal{M}(X)$, donc g est algébrique de degré au plus N sur $\mathbb{C}(f)$, cqfd.

5.3 Fonctions holomorphes de plusieurs variables

Définitions. Une fonction défiinie sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est *holomorphe* si elle est continue et toute fonction partielle $f(z_1, \cdots, z_{i-1}, ., z_{i+1}, \cdots, z_n$ est holomorphe. On peut montrer (cf. [Ca]) que ceci est équivalent à

- f est différentiable et $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$
- f est C^∞ et $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$
- f est est *analytique* (complexe) : tout point $z^0 = (z^0_1, \cdots, z^0_n)$ a un voisinage sur lequel f est la somme d'une série normalement convergente

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\cdots,i_n}(z_1 - z^0_1)^{i_1} \cdots (z_n - z^0_n)^{i_n} = \sum_{I\in\mathbb{N}^n} a_I(z - z^0)^i.$$

Une application de $U \subset \mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}^p$ est holomorphe si ses composantes le sont. Si U et V sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$, un biholomorphisme est une application holomorphe inversible dont l'inverse est holomorphe (comme dans le cas d'une variable on peut montrer que c'est automatique).

Exemple. Toute fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(z_1, \cdots, z_n)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus Q^{-1}(\{0\})$.

Théorème des fonctions implicites et d'inversion locale, cas holomorphe

(i) (Fonctions implicites holomorphes) Soit $f : U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ holomorphe telle que $f(x^0, y^0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Il existe des voisinages ouverts U_1 de x^0 et U_2 de y^0 et une application holomorphe $g : U_1 \to U_2$ tels que $\{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid f(x, y) = 0\} = \mathrm{graphe}(g)$.

(ii) (Inversion locale holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorphe, telle que $Df(x^0) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Il existe des voisinages ouverts U_1 de x^0 et U_2 de $f(x^0)$ tels que f est un biholomorphisme de U_1 sur U_2.

Démonstration. (i) Puisque f est C^∞, le théorème dans le cas différentiable donne U_1, U_2 et g de classe C^∞ avec la propriété voulue. De plus, $Dg(x) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x))\Big)^{-1}.\frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x))$ est $\mathbb{C}$-linéaire, donc g est holomorphe.

(ii) Ceci résulte de (i) comme dans le cas différentiable (cf. par exemple le cours de Calcul Différentiable 1).

Remarque. En fait, on peut (d'après Newton) donner une preuve directe du

Théorème des fonctions implicites analytiques. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou un corps valué complet. Soit f définie et analytique au voisinage d'un point $(x^0, y^0) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$, à valeurs dans $\mathbb{K}^m$, telle que $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \in$* $\mathrm{GL}(\mathbb{K}, m)$. *Alors il existe un voisinage ouvert $U \times V$ de (x^0, y^0) et une fonction analytique $g : U \to V$ telle que $\{(x, y) \in U \times V \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x) \mid x \in U\}$.*

Démonstration. Remplaçant f par

$$\widetilde{f}(x, y) = \big(\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\big)^{-1}.\Big(f(x, y) - y^0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0).(x - x^0)\Big),$$

on se ramène au cas où $(x^0, y^0) = (0, 0)$ et $Df(0, 0).(u, v) = v$. Donc

$$f(x, y) = y - r(x, y)\ ,\ r(x, y) = \sum_{|I|+|J|\geq 2} a_I x^I y^J\ ,\ a_{I,J} \in \mathbb{C}^n,$$

la somme étant sur les $(I, J) = (i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_m) \in \mathbb{N}^{n+m}$ tels que $|I|+|J| = i_1+\cdots+i_n+j_1+\cdots+j_m \geq 2$. De plus, la série est normalement convergente pour $\max(|x|, |y|) \leq \alpha$ avec $\alpha > 0$.

On définit par récurrence la suite de séries formelles dans $\mathbb{C}[[x]] = \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_n]] : s_0(x) = 0\ ,\ s_{k+1}(x) = r(x, s_k(x))$. Alors pour $k \geq 2$ on a

$$s_{k+1}(x) - s_k(x) = r(x, s_k(x)) - r(x, s_{k-1}(x)) = \sum_{|I|+|J|\geq 2, |J|\geq 1} a_{I,J} x^I (s_k(x)^J - s_{k-1}(x)^J).$$

On en déduit par récurrence sur k que $s_{k+1}(x) - s_k(x) = O(k + 1)$ c'est à-dire est une somme de termes d'ordre au moins $k+1$. Donc la série formelle $s_\infty(x) = \lim_k s_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(s_{k+1}(x) - s_k(x))$ est bien définie, et dans l'algèbre des séries formelles on a $f(x,s(x))=0$. Ensuite, par la méthode des majorantes de Cauchy, on a on a $|b_I|\leq\beta_I$, où

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_I \beta_I x^I=\sigma_\infty(x)=\lim_k \sigma_k(x)\\ \quad \sigma_0(x)=0\ ,\ \sigma_{k+1}(x)=\rho(x,\sigma_k(x))\ ,\ \rho(x,y)=\displaystyle\sum_{I,J}|a_{I,J}|x^I y^J.\end{cases}$$

Notons $||x||=\max(|x_i|)$ et supposons $||x||\leq\varepsilon\leq\alpha$. Pour ε assez petit on a $||\rho(x,0)||\leq||x||$ et $||\rho(x,y)-\rho(x,y')||\leq\frac{1}{2}||y-y'||$ si $\max(||x||,||y||,||y'||)\leq\varepsilon$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que si $||x||\leq\varepsilon$, $\sigma_k(x)$ est bien défini pour tout k comme élément de $\mathbb{C}^n$, $||\sigma_k(x)||\leq||x||$ et (pour $k\geq1$) $||\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x)||\leq 2^{-k}||x||$. Donc la série $\sigma_\infty(x)$ est normalement convergente si $x\in\mathbb{C}^n$ et $||x||\leq\varepsilon$, et il en est de même de $s_\infty(x)$.

On a donc trouvé s_∞ holomorphe sur le polydisque $(\Delta_\varepsilon)^n$ telle que $f(x,s(x))=0$ et $||s(x)||\leq||x||$. Pour terminer la preuve, il suffit de prouver que si ε est assez petit et si $(x,y)\in(\Delta_\varepsilon)^{n+m}$ avec $f(x,y)=0$, alors $y=s(x)$. On a $y=r(x,y)=r(x,r(x,y))$ et $s(x)=r(x,s(x))$, et pour ε assez petit on a $||r(x,y)-r(x,y')||\leq\frac{1}{2}||y-y'||$ si $\max(||x||,||y||,||y'||)\leq\varepsilon$. Donc $||y-s(x)||=||r(x,y)-r(x,s(x))||\leq\frac{1}{2}.||y-s(x)||$, soit $y=s(x)$.

5.4 Variétés et sous-variétés complexes

Définition. Une *variété complexe de dimension* n est un espace topologique X séparé (pas forcément connexe) et muni d'un atlas holomorphe de dimension n, c'est-à-dire un recouvrement ouvert (U_i) et d'homéomorphismes $\varphi_i:U_i\to V_i$ où U_i est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et tout changement de cartes $\psi_{i,j}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ est un biholomorphisme de $\varphi_j(U_i\cap U_j)$ sur $\varphi_i(U_i\cap U_j)$. En fait il s'agit comme d'habitude d'une classe d'équivalence de tels atlas, ou d'un atlas maximal. En dimension $n\geq2$, on demande aussi que X soit séparable, ou ce qui revient au même : X est métrisable, X admet une métrique riemannienne, toute composante connexe de X est réunion dénombrable de compacts, X est paracompacte. En dimension un, on a vu que c'était automatique.

Définition. Soit X une variété complexe de dimension n. Une sous-variété complexe de dimension k de X est un sous-ensemble $Y\subset X$ tel que tout point $p_0\in Y$ admet un voisinage ouvert et un biholomorphisme $\varphi:U\to V\subset\mathbb{C}^n$ avec $\varphi(0)=0$ et $\varphi(Y\cap U)=\mathbb{C}^p\cap V$.

Une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites holomorphe est la

Proposition. *Soit $f:X\to Y$ une application holomorphe entre variétés complexes de dimensions n et m, et soit $a\in f(X)$ une valeur régulière, c'est-à-dire telle que $Df(p)$ est surjective pour tout $p\in f^{-1}(\{a\})$. Alors $f^{-1}(\{a\})$ [donc nous savons déjà que c'est une sous-variété C^∞] est une sous-variété complexe de dimension $n-m$.*

Exemple : courbe algébrique affine plane. Soit $P\in\mathbb{C}[x,y]$ un polynôme irréductible. On note $Y_P=P^{-1}(\{0\})\subset\mathbb{C}^2$. Notons d'abord que puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et P n'est pas constant, on a la

Propriété. *Y_P est non vide et même infini, mieux : sa projection sur $\mathbb{C}\times\{0\}$ ou sur $\{0\}\times\mathbb{C}$ est surjective. De plus, il n'a aucun point isolé.*

Remarques. 1) La donnée de $Y_P=P^{-1}(\{0\}$ détermine P à une constante multiplicative près : c'est une conséquence immédiate du lemme des zéros de Hilbert, ou plus simplement de la proposition ci-dessous sur la finitude du nombre de points d'intersection.

2) Comme nous ne considèrerons que des courbes planes, nous omettrons souvent ce qualificatif.

On définit l'*ensemble singulier* (ce nom sera justifié plus tard)

$$\mathrm{Sing}(P)=\mathrm{Sing}(Y_P)=Y_P\cap DP^{-1}(\{0,0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid P(x,y)=0=\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\}.$$

L'*ensemble régulier* $\mathrm{Rég}(Y_P)$ est $Y_P\setminus\mathrm{Sing}(P)$: par le théorème des fonctions implicites, c'est une courbe complexe. Nous verrons dans la section suivante qu'elle est connexe, donc est une surface de Riemann. Si $\mathrm{Sing}(Y_P)$ est vide, on dit que Y_P est *lisse.*

Quant à l'ensemble singulier, rappelons une conséquence de la théorie du résultant :

Proposition. *Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes premiers entre eux, de degrés m et n. Alors leurs résultants $R_1(x)$ et $R_2(y)$ comme polynômes dans $\mathbb{C}[x][y]$ et dans $\mathbb{C}[y][x]$ sont non nuls, et de degrés $\leq mn$. Donc $P^{-1}(\{(0,0)\}) \cap Q^{-1}(\{(0,0)\}$ est fini, avec au plus $(mn)^2$ éléments.*

Remarques. La majoration $(mn)^2$ peut être améliorée en mn de la façon suivante. Puisque $F = P^{-1}(\{0\}) \cap Q^{-1}(\{0\})$ est fini, l'application linéaire $x + \varepsilon y$ restreinte à F est injective pour $\varepsilon > 0$ assez petit : il suffit de prendre $\varepsilon < \min|\frac{x-x'}{y-y'}|$, où le minimum est pris sur les couples $(x, y), (x', y')$ de points distincts de F. Remplaçant $P(x, y)$ par $P_\varepsilon(x, y) = P(x + \varepsilon y, y)$ et $Q(x, y)$ par $Q_\varepsilon(x, y) = Q(x + \varepsilon y, y)$ ce qui ne change pas le nombre de zéros communs, on voit que $P_\varepsilon^{-1}(\{0\}) \cap P_\varepsilon^{-1}(\{0\})$ s'injecte dans $R_{1,\varepsilon}^{-1}(\{0\})$ qui a au plus mn éléments.

2) Le *théorème de Bézout* dit que le nombre total de points d'intersection est exactement mn, pourvu que l'on compte les intersections dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et avec multiplicités (cf. le cours de Géométrie Algébrique, et peut-être la fin de ce cours). Par exemple, si les courbes projectives X_P et X_Q ne se coupent qu'en des points réguliers de chacune et transverses c'est-à-dire avec des tangentes différentes, le nombre total de points d'intersection de X_P et de X_Q est mn.

Corollaire. *Si $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est irréductible, son ensemble singulier* $\mathrm{Sing}(Y_P)$ *est fini, avec au plus $n^2(n-1)^2$ éléments, $n = \deg(P)$. Donc Rég(Y_P) est dense dans Y_P.*

Démonstration. Si $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$, cela résulte directement de la proposition. Sinon, $P = \lambda y$ et $\mathrm{Sing}(P)$ est vide.

Remarque. La majoration est encore plus grossière cette fois, puisque le $n(n-1)$ du théorème de Bézout peut être amélioré en $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, comme on le verra dans la *formule du genre.*

5.5 Connexité d'une courbe affine plane (irréductible)

Proposition. *Soit $P \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme irréductible. Alors la courbe $Y_P = P^{-1}(\{0\})$ est connexe. Mieux : Rég(Y_P) est connexe.*

Remarque. Puisque $\mathrm{Sing}(Y_P)$ est fini et qu'aucun point de Y_P n'est isolé, $\mathrm{Rég}(Y_P)$ est dense dans Y_P donc sa connexité implique celle de Y_P. En revanche, si par exemple on considère polynôme non irréductible $P(x, y) = xy$, Y_P est connexe (deux droites se coupant en un point), mais pas $\mathrm{Rég}(Y_P) \approx \mathbb{C}^* \amalg \mathbb{C}^*$.

Démonstration. La preuve est semblable à celle que tout élément de $\mathcal{M}(X)$ est algébrique de degré au plus $\deg(f)$ sur $\mathbb{C}(f)$. La même idée permet de décrire le voisinage d'un point singulier (cf. ci-dessous) et de prouver le théorème de Chow : *toute courbe complexe compacte [pas forcément lisse, pourvu qu'on arrive à donner un sens à cela]dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est algébrique.*

À un changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que le terme homogène de degré maximal $n = \deg(P)$ contient y^n, donc que $P(x, y) = y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^i$, avec $\deg a_i \leq n - i$. Ceci implique qu'il existe $C > 0$ telle que $|y| \leq C \max(|x|, 1)$ sur Y_P. En effet, si $P(x, y) = 0$, on a soit $|y| \leq \max(|x| + 1)$, soit $|y| > \max(|x|, 1)$. Dans ce dernier cas, on a

$$|a_i(x)| \leq C_i \max(|x|^{n-i}, 1) \leq C_i |y|^{n-i+1}. \max(|x|, 1),$$

d'où

$$|y| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i(x) y^{i-n+1}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} C_i \max(|x|, 1),$$

donc dans tous les cas on a $|y| \leq \max(1, \sum C_i). \max(|x|, 1)$.

Soit C une composante connexe de $\mathrm{Rég}(Y_P)$, considérons la projection $\pi = x : C \to \mathbb{C}$. Ses points critiques sont ceux où la tangente est verticale soit $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$. Par Bézout, il forment un ensemble fini F, et $\pi^{-1}(\pi(F))$ est aussi fini, donc il suffit de montrer que $C \setminus \pi^{-1}(\pi(F))$ est connexe. On considère la restriction $p = \pi|\pi^{-1}(\pi(F))$, à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus F$. C'est une application holomorphe sans point critique, et la propriété $|y| \leq C(|x|^n + 1)$ montre qu'elle est propre, c'est donc un revêtement à d feuillets. Donc $p^{-1}(\{x\})$ a toujours d éléments si $x \in \mathbb{C} \setminus F$, et si $\sigma_i(x)$ est leur i-ième fonction symétrique, c'est une fonction holomorphe de x. De plus, $|\sigma_i(x)| \leq C_i(|x|^n + 1)^i$, donc par la généralisation du théorème de Liouville les $\sigma_i(x)$ sont des polynômes en x. Donc la fonction

$$f(x, y) = \prod_{z \in p^{-1}(\{x\})} (y - z) = y^d + \sum_{i=1}^{d} (-1)^i \sigma_i(p^{-1}(\{x\})).y^{d-i}$$

est un polynôme $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Enfin, $f^{-1}(\{0\}) \cap P^{-1}(\{0\})$ contient C donc est infini, donc P divise f puisque P est irréductible. Donc

$$Y_P = P^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\}) = \overline{C},$$

donc Y_p est bien connexe.

5.6 Espaces projectifs complexes, cas du plan

Définition. L'*espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^*$ agit par homothéties. La classe d'équivalence de $(z_0, \cdots, z_n)$ est notée $[z_0 : \cdots : z_n]$. Ce quotient est homéomorphe à S^{2n+1}/S^1 ce qui montre qu'il est séparé (puisque S^1 est compact) et compact (puisque S^{2n+1} est compacte). De plus, si $i \in \{0, 1 \cdots, n\}$, $U_i := \{|z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i \neq 0\}$ est un ouvert, et l'application $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ telle que

$$\varphi_i(|z_0 : \cdots : z_n]) = \Big(\frac{z_0}{z_i}, .., \widehat{\frac{z_i}{x_i}}, .., \frac{z_n}{z_i}\Big),$$

est un homéomorphisme sur $\mathbb{C}^n$. Le changement de cartes $\psi_{i,j} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est donné par

$$\psi_{i,j}(t_1, \cdots, t_n) = \Big(\frac{t_1}{t_j}, \cdots, \frac{t_{i-1}}{t_j}, \frac{1}{t_j}, \cdots, \frac{t_n}{t_j}\Big).$$

Il est défini sur l'ouvert $U_{i,j} = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{C}^n \mid t_j \neq 0\}$, holomorphe puisque rationnel, et bijectif sur $U_{j,i}$, d'inverse $\psi_{j,i}$, donc biholomorphe. Donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est muni d'une structure de variété complexe compacte de dimension n. Comme elle est compcte, elle est automatiquement séparable.

Outre le cas $n = 1$ (droite projective) que nous avons déjà vu, nous considérerons surtout le *plan projectif complexe* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il est muni des trois cartes

$$\begin{aligned}
\varphi_0([z_0 : z_1 : z_2]) &= \Big(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\Big) = (x, y)\\
\varphi_1([z_0 : z_1 : z_2]) &= \Big(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\Big) = (t, u)\\
\varphi_2([z_0 : z_1 : z_2]) &= \Big(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\Big) = (v, w).
\end{aligned}$$

Le complémentaire de U_0 est la droite à l'infini, $\mathbb{P}^1_\infty(\mathbb{C}) = \{[0 : z_1 : z_2] \mid [z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$. Les changements de cartes sont

$$\begin{aligned}
(t, u) &= (\frac{1}{x}, \frac{y}{x}) \ , \ (x, y) = (\frac{1}{t}, \frac{u}{t})\\
(v, w) &= (\frac{1}{y}, \frac{x}{y}) \ , \ (x, y) = (\frac{w}{v}, \frac{1}{v})\\
(v, w) &= (\frac{t}{u}, \frac{1}{u}) \ , \ (t, u) = (\frac{v}{w}, \frac{1}{w}).
\end{aligned}$$

5.7 Courbes algébriques planes projectives : partie régulière, singularités

Définition. Une *courbe algébrique plane projective* est l'adhérence $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'une courbe algébrique plane affine $Y_P = P^{-1}(\{0\})$, où $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme irréductible. Noter que puisque $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est compact, X_P est compacte.

Remarque. Comme dans le cas affine, X_P détermine P à une constante multiplicative près.

Points à l'infini. Ce sont les points de $X_P \setminus Y_P X_P \cap \mathbb{P}^1_\infty(\mathbb{C})$. On les trouve en réécrivant l'équation de X_P dans les deux cartes U_1 et U_2.

1) Dans U_1, on a $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{u}{t}$. Si $n = \deg(P)$, on pose

$$P_1(t, u) = t^n P(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}) \in \mathbb{C}[t, u],$$

ce qui donne l'équation de X_P dans la carte U_1. Si $P_{max}(x, y) = \sum_{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j$ est la partie homogène de degré maximal de P, les points à l'infini dans U_1 sont donnés par $t = 0$, soit

$$P_1(u, 0) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-q,j} u^j = 0,$$

ce qui correspond aux directions asymptotiques non verticales $y \sim \alpha_i x$, $P_1(\alpha_i, 0) = 0$, de Y_P.

2) De même, dans U_2 l'équation de X_P est $P_2(v, w) = 0$ où

$$P_2(v, w) = v^n P(\frac{w}{v}, \frac{1}{v}).$$

Les points à l'infini dans U_2 sont donnés par $v = 0$, soit

$$P_2(v, 0) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n-i} w^i = 0,$$

ce qui correspond aux directions asymptotiques non horizontales $x \sim \beta_i y$, $P_2(\beta_i, 0) = 0$, de Y_P.

Équation homogène. On définit le polynôme *homogénéisé* $\widetilde{P}(z_0, z_1, z_2) = z_0^n P(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})$, polynôme homogène de degré n. Alors

$$X_P = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \widetilde{P}(z_0, z_1, z_2) = 0\}.$$

De plus on a

$$\widetilde{P}(z_0, z_1, z_2) = z_1^n P(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}) = z_2^n P(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}),$$

donc les trois cartes jouent exactement le même rôle.

Points singuliers et points réguliers. On définit $\mathrm{Sing}(X_P)$ comme la réunion des points singuliers de P dans la carte U_0, P_1 dans la carte U_1, et P_2. C'est donc un ensemble fini (avec au plus $3n^2(n-1)^2$ éléments, mais on verra qu'en fait c'est au plus $\frac{n(n-1)}{2}$), et dont le complémentaire $\mathrm{Rég}(X_P) = P \setminus \mathrm{Sing}(X_P)$, ou partie régulière est dense dans X_P. Cette partie régulière est une courbe complexe connexe, donc une surface de Riemann. Si $\mathrm{Sing}(X_P)$ est vide, on dit que X_P est *lisse*.

On vérifie que les points singuliers de P_1 dans $U_0 \cap U_1$ et de P_2 dans $U_0 \cap U_2$ coïncident avec ceux de P. Ceci résulte aussi de la

Propriété. *L'ensemble singulier de X_P est*

$$\begin{aligned}\mathrm{Sing}(X_P) &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid D\widetilde{P}(z_0, z_1, z_2) = 0\} \\ &= \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_0} = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_1} = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_2} = 0\}.\end{aligned}$$

Démonstration. Notons d'abord que par homogénéité on a $z_0 \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_2} = n\widetilde{P}(z_0, z_1, z_2)$ (relation d'Euler). Si $p \in \mathrm{Sing}(P)$, on peut par symétrie supposer que $p = (x, y) \in U_0$. On a $DP(x, y) = 0$, soit $D\widetilde{P}(1, ., .) = 0$, et la relation d'Euler implique $\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z_0}(1, x, y) = 0$, donc $D\widetilde{P}(z_0, z_1, z_2) = 0$. Réciproquement, si $D\widetilde{P}(z_0, z_1, z_2) = 0$, on peut supposer $z_0 = 1$ soit $[z_0 : z_1 : z_2] = (x, y) \in U_0$, et la relation d'Euler implique $\widetilde{P}(1, x, y) = 0 = P(x, y)$, donc $[z_0 : z_1 : z_2] \in X_P$. Et comme $DP(x, y) = D\widetilde{P}(1, x, y) = 0$, $[z_0 : z_1 : z_2]$ est dans $\mathrm{Sing}(P)$.

Exemple : cubique sous forme de Weierstrass. Soit $P(x, y) = y^2 - (x^3 + px + q)$. Il est irréductible pour toutes les valeurs de (p, q), et la connexité de $Y_P = P^{-1}(\{0\})$ se prouve de façon élémentaire en prolongeant une branche de $\sqrt{x^3 + px + q}$ jusqu'à un point $(x_0, 0)$, où x_0 est un zéro choisi de $x^3 + px + q = 0$.

Les points à l'infini sont donnés dans U_1 par $tu^2 = 1 + pt^2 + qt^3$, $t = 0$ ce qui ne donne rien, et dans U_2 par $w = v^3 + pvw^2 + qw^3$, $w = 0$ soit $v = 0$ (une direction asymptotique verticale). Il y a donc un point à l'infini, $[0 : 0 : 1]$ et il est régulier.

Les points singuliers éventuels sont donc dans U_0, ils sont donnés par $y^2 - (x^3 + px + q) = 0 = 3x^2 + p = 2y$, c'est-à-dire que $y = 0$ et x est un zéro multiple de $x^3 + px + q$, ce qui équivaut à $(4p^3 + 27q^2 = 0$ et $x = -\frac{3q}{p}$ ($x = 0$ si $p = q = 0$). Donc si $4p^3 + 27q^2 \neq 0$, X_P est lisse, et sinon elle a un unique point singulier $(-\frac{3q}{p}, 0)$.

5.8 Étude d'une courbe algébrique plane près d'un point singulier

Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique, et soit $p_0 \in \mathrm{Sing}(X_P)$ un point singulier. L'étude de la courbe dans un voisinage de p_0 est un monde en soi (cf. par exemple [Mi3], chap. 10), nous nous contenterons ici de montrer les deux propriétés suivantes :

Proposition. *(i) Il existe un voisinage U de X_P qui est la réunion d'un nombre fini de composantes $C_1, \cdots, C_k$ biholomorphes à des disques épointés Δ^*. De plus, l'adhérence B_i de C_i dans $U \setminus \{p_0\}$ est $C_i \cup \{p_0\}$. On appelle les B_i les* branches *de X_P en p_0.*

(ii) Le point p_0 est vraiment singulier, plus précisément un au moins des deux cas suivants se produit :

- *$k > 1$ c'est-à-dire qu'il y a plusieurs branches*
- *une des branches B_i n'est pas une sous-variété complexe.*

Preuve de la proposition. (i) On peut supposer $p_0 = (0,0)$, donc $P(x,y) = P_m(x,y) + \cdots + P_d(x,y)$, décomposition en composantes homogènes, avec $P_m \neq 0$ et $m \geq 2$ puisque $P(0,0) = 0 = DP(0,0)$. Quitte à changer de coordonnées linéaires, on peut supposer que P_m contient y^m [«pas de tangente verticale»], donc en posant $y = tx$ on a

$$P_k(x,y) = x^m(t^m + \sum_{i=1}^{k} a_i t^{m-i}) = x^m \prod_{i=1}^{m}(t - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{m}(y - \alpha_i x).$$

Toujours quitte à changer de coordonnées linéaires, on peut supposer $\max(\alpha_i) < \frac{1}{4}$. Et aussi que $|P_{m+1}(x,y) + \cdots + P_d(x,y)| \leq \frac{1}{2}\max(|x|,|y|)^{k+1}$ si $\max(|x|,|y|) \leq 1$.

Lemme. *Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, tout point de $(x,y) \in P^{-1}(\{0\}) \cap (\Delta_\varepsilon)^2$ vérifie $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$.*

Preuve du lemme. Si $P(x,y) = 0$ avec $\max(|x|,|y|) \leq \varepsilon \leq 1$, on a $\prod_{i=1}^m |y - \alpha_i x| \leq \frac{1}{2}\max(|x|,|y|)^{k+1}$. En particulier, si $x = 0$ on a $|y|^m \leq \frac{1}{2}|y|^{m+1}$, ce qui implique $y = 0$. Et si $x \neq 0$, alors $t = \frac{y}{x}$ vérifie $\prod_{i=1}^m |t - \alpha_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $|t| > \frac{1}{2}$, $\prod_{i=1}^m |t - \alpha_i| > (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})^m = 4^{-m}$, donc si $\varepsilon < 4^{-m}$ on a $|t| \leq \frac{1}{2}$, cqfd.

Posons $C_\varepsilon = (P^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}) \cap (\Delta_\varepsilon)^2$, et considérons la projection $\pi = x : C_\varepsilon \to \Delta_\varepsilon^*$. Quitte à diminuer ε on a $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ sur C_ε puisque $P^{-1}(\{0\}) \cap \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^{-1}(\{0\})$ est fini. Donc C_ε est une courbe complexe et π est une application holomorphe sans point critique. De plus la propriété $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$ montre que π est propre, c'est donc un revêtement fini (pas forcément connexe). D'après la classification des revêtements connexes du disque épointé, C_ε est donc une réunion disjointe de composantes connexes $C_1, \cdots, C_k$ biholomorphes à Δ^*.

Chaque composante C_i est elle-même un revêtement de Δ_ε^*, donc $\pi(C_i) = \Delta_\varepsilon^*$. Comme $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$, l'adhérence de C_i dans $(\Delta_\varepsilon)^2$ est $B_i = C_i \cup \{(0,0)\}$.

(ii) Si $k = 1$ et que la seule branche B_1 est une sous-variété complexe, sa tangente est non verticale donc elle est localement un graphe $y = f(x)$, avec f holomorphe et $f(0) = 0$, soit $f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x^n$. On peut supposer que la composante de degré maximal P_d contient le terme y^d. Considérons $P(x,y) = y^d + \sum_{i=1}^d$ comme un élément de $\mathbb{C}\{x\}[y]$, où $\mathbb{C}\{x\}$ désigne les séries convergeant au voisinage de 0. On peut faire la division euclidienne de $P(x,y)$ par $y - f(x)$, et comme $P(x, f(x)) = 0$ on trouve $P(x,y) = (y - f(x))Q(x,y)$, avec $Q(x,y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$. On peut appliquer le raisonnement de (i) à $Q(x,y)$, qui est holomorphe et dont la plus petite composante homogène est de degré $k-1$ et contient y^{k-1} : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $Q^{-1}(\{0\}) \cap (\Delta_\varepsilon)^2$ contient une branche B_2. Par hypothèse cette branche coïncide avec B_1, donc $y - f(x)$ divise encore $Q(x,y)$ dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$. Continuant ainsi, on arrive à $P(x,y) = (y - f(x))^m$, ce qui implique $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ et contredit le fait que P est irréductible.

Remarques. 1) On a en fait un énoncé beaucoup plus précis (Newton 1676, Puiseux 1850, cf. [Br-K] pp. 370-454) : si l'on suppose comme ci-dessus que $p_0 = (0,0)$ et que la composante homogène minimale de P contient une puissance de y, chaque branche B_i est l'image de $t \mapsto (t^{p_i}, \sum_{n=p_i}^\infty a_n^{(i)} t^n)$ où $p_i \in \mathbb{N}^*$, la série converge localement et le pgcd de p_i et des $a_n^{(i)}$ tels que $a_n \neq 0$ est un. Autrement dit, B_i est le graphe de la série (dite de Puiseux) $\sum_{n=p_i}^\infty a_n^{(i)} x^{\frac{n}{p_i}}$. De plus, s'il n'y a qu'une seule branche $y = \sum_{n=p}^\infty a_n x^{\frac{n}{p}}$, alors $p > 1$ donc on a un point de rebroussement. Noter que chaque branche a une tangente, donnée par $y = a_{p_i} x$. Newton a de plus décrit un algorithme («polygone de Newton») pour trouver toutes les branches et les séries associées.

2) On peut avoir $P^{-1}(\{0\}$ localement homéomorphe à $\mathbb{C}$ même si $(0,0)$ est un point singulier. Exemple : $P(x,y) = y^2 - x^3$, X_P est homéomorphe à $\mathbb{C}$ via $t \mapsto (t^2, t^3)$. Mais $P^{-1}(\{0\}$ n'est alors jamais *localement plat* c'est-à-dire qu'on n'a pas d'homéomorphisme de couples $(U, P^{-1}(\{0\} \cap U) \approx (\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$. En fait, l'intersection de $P^{-1}(\{0\}$ avec n'importe quelle petite sphère topologique S^3 entourant zéro est nouée. Dans le cas de $y^2 - x^3$, l'intersection $P^{-1}(\{0\}) \cap S_\varepsilon^3$ est le nœud de trèfle, cf. [Br-K] p. 223.

5.9 Surface de Riemann compacte associée à une courbe algébrique projective

Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une courbe algébrique projective (plane), on a vu que $\mathrm{Sing}(X_P)$ est un ensemble fini tel que $\mathrm{Rég}(X_P) = X_P \setminus \mathrm{Sing}(X_P)$ est une surface de Riemann et que tout point $p \in \mathrm{Sing}(X_P)$ a un voisinage U_p tel que $U_p \setminus \{p\} = \coprod_{i=1}^{k_p} C_{p,i}$, $i = 1, \cdots, k_p$, où $C_{p,i}$ est muni d'un biholomorphisme $\varphi_{p,i}$ sur Δ^*. On pose

$$\widehat{X}_P = X_P \coprod_{p \in \mathrm{Sing}(X_P), 1 \leq i \leq p} \{x_{p,i}\}$$

et on prolonge $\varphi_{p,i}$ par 0 en $x_{p,i}$ pour définir $\widehat{\varphi}_{p,i} : \widehat{C}_{p,i} = C_{p;i} \cup \{x_{p,i}\} \to \Delta$. On complète ainsi un atlas holomorphe de X_P en un atlas holomorphe de $\widehat{X}_P$, et la structure de surface de Riemann ainsi définie sur $\widehat{X}_P$ est indépendante du choix des U_p. Cette surface est munie d'une application holomorphe naturelle $\pi : \widehat{X}_P \to X_P$ qui est l'identité sur X_P. Le couple $(\widehat{X}_P, \pi)$ est caractérisé à isomorphisme près par le fait que $\widehat{X}_P$ est une surface de Riemann, π est continue, biholomorphe de $\pi^{-1}(\mathrm{Rég}(X_P))$ sur $\mathrm{Rég}(X_P)$, et $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X_P) = \bigcup_{p \in \mathrm{Sing}(X_P)} F_p$, avec $\pi(F_p) = \{p\}$ et $\sharp(F_p) = \sharp(\text{branches de } X_P \text{ en } p)$.

De plus, l'application π est propre puisque sa restriction à chaque ouvert du recouvrement fini $X_P \cup_{p,i} \widehat{C}_{p,i}$ est propre. Donc $\widehat{X}_P$ est compacte.

Fonctions méromorphes sur $\widehat{X}_P$

Proposition. *Soient x_P et y_P les restrictions de x et y à $\mathrm{Rég}(Y_P) \subset \mathrm{Rég}(X_P)$. Alors x_P et y_P s'étendent en des fonctions méromorphes sur $\widehat{X}_P$, avec $P(x_P, y_P) = 0$, et $\mathcal{M}(\widehat{X}_P) = \mathbb{C}(x_P, y_P)$.*

Démonstration. L'application $[1 : x_P : y_P]$: est la restriction de l'inclusion $i : X_P \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Considérons un point $p \in \widehat{X}_P \setminus \mathrm{Rég}(Y_P)$. Si $p \in U_0$, x_P et y_P s'étendent holomorphiquement en p. Si $p \in U_1$, $\frac{1}{x_P}$ et $\frac{y_P}{x_P}$ s'étendent holomorphiquement en p, et $\frac{1}{x_P}$ n'est pas identiquement nulle, donc $x_P = (\frac{1}{x_P})^{-1}$ est méromorphe ainsi que $y_P = x_P . \frac{y_P}{x_P}$. De même si $p \in U_2$.

Notation. On notera aussi $\mathcal{M}(\widehat{X}_P) = \mathcal{M}(X_P)$: cela correspond aux *fonctions rationnelles* sur la courbe algébrique X_P, cf. le cours de Géométrie Algébrique.

5.10 Morphismes rationnels et isomorphismes birationnels entre courbes algébriques projectives

À une surface de Riemann compacte X nous avons associé une courbe algébrique projective X_P, mais ceci dépendait du choix de deux fonctions méromorphes $f, g \in \mathcal{M}(X)$ engendrant $\mathcal{M}(X)$. Nous allons voir que la classe d'*isomorphisme birationnel* de X_P est déterminée par X. Et aussi que si X_P est associée à X et X_Q à Y, les applications holomorphes de X dans Y sont «la même chose» que les *morphismes rationnels* de X_P dans X_Q. Il nous faut commencer par définir ces notions.

Définitions. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes irréductibles. Un *morphisme rationnel* (ou application rationnelle) de X_P dans X_Q est une application $\varphi : X_P \setminus F \to X_Q$, définie hors d'un sous-ensemble fini $F \subset X_P$, qui est constante ou de la forme

$$[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [P_0(z_0, z_1, z_2) : P_1(z_0, z_1, z_2) : P_2(z_0, z_1, z_2)],$$

où P_0, P_1 et P_2 sont des polynômes homogènes de même degré qui ne sont pas tous divisibles par $\widetilde{P}$, l'homogénéisé de P. On identifie deux applications rationnelles qui coïncident hors d'un ensemble fini. Il revient au même de demander que la restriction de φ à $Y_P \setminus F$ est de la forme $(x, y) \mapsto (R_1(x, y), R_2(x, y)$ avec $R_i \in \mathbb{C}(x, y)$.

On note $\varphi : X_P \cdots\!> X_Q$ pour indiquer que φ n'est pas partout défini.

Un *isomorphisme birationnel* est un morphisme rationnel $\varphi : X_P \cdots\!> X_Q$ tel qu'il existe un morphisme rationnel $\psi : X_Q \cdots\!> X_P$ tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{X_P}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{X_Q}$ là où ces composées sont définies. [En fait, il suffit que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{X_P}$].

Exemple. Si $P = y$ et $Q = y^2 - x^3$, on a un isomorphisme birationnel $(t, 0) \mapsto (t^2, t^3)$, d'inverse $(x, y) \mapsto (\frac{y}{x}, 0)$.

L'ensemble des morphismes rationnels sera noté $\mathrm{Mor}(X_P, X_Q)$, et celui des morphismes rationnels non constants sera noté $\mathrm{Mor}^*(X_P, X_Q)$. À $\varphi \in \mathrm{Mor}^*(X_P, X_Q)$, on associe $\varphi^* : \mathcal{M}(X_Q) \to \mathcal{M}(X_P)$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Théorème

(i) *La restriction φ_r de $\varphi \in \mathrm{Hol}(\widehat{X}_P, \widehat{X}_Q)$ à Rég$(X_P) \cap f^{-1}($Rég$(X_Q))$ est un morphisme rationnel de X_P dans X_Q, et l'application $\varphi \mapsto \varphi_r$ est une bijection de $\mathrm{Hol}(\widehat{X}_P, \widehat{X}_Q)$ sur $\mathrm{Mor}(X_P, X_Q)$, qui envoie les applications non constantes $\mathrm{Hol}^*(\widehat{X}_P, \widehat{X}_Q)$ sur $\mathrm{Mor}^*(X_P, X_Q)$.*

(ii) *(cf. le cours de Géométrie Algébrique) Si $\varphi \in \mathrm{Mor}^*(X_P, X_Q)$, on peut définir un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (ou homomorphismes de corps fixant $\mathbb{C}$)*

$$\varphi^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X_Q), \mathcal{M}(X_P)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(\widehat{X}_Q), \mathcal{M}(\widehat{X}_P)),$$

en posant $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. On obtient ainsi une bijection

$$\Phi : \mathrm{Mor}^*(X_P, X_Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X_Q), \mathcal{M}(X_P)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(\widehat{X}_Q), \mathcal{M}(\widehat{X}_P)).$$

(iii) *Pour des surfaces de Riemann compactes X et Y quelconques, l'application $\Phi : \varphi \in \mathrm{Hol}^*(X, Y) \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X))$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, est une bijection.*

Démonstration. (i) Les fonctions $x_Q \circ \varphi$ et $y_Q \circ \varphi$ sont méromorphes sur $\widehat{X}_P$, donc il existe des polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x, y]$ tels que $x_Q \circ \varphi = P_1(x_P, y_P)$ et $y_Q \circ \varphi = P_2(x_P, y_P)$. Autrement dit, sur $Y_P \cap \varphi^{-1}(Y_Q)$, en utilisant les cartes U_0 à la source et au but on a $\varphi(x, y) = (P_1(x, y), P_2(x, y))$, donc φ_r est bien rationnel. L'application $\varphi \mapsto \varphi_r$ est injective puisque $\mathrm{Rég}(X_P) \cap f^{-1}(\mathrm{Rég}(X_Q))$ est dense dans $\widehat{X}_P$.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $\psi : X_P \cdots\!> X_Q$ un morphisme rationnel, il faut montrer qu'il s'étend holomorphiquement en tout point $p_0 \in \widehat{X}_P$. Soit φ une uniformisante en p_0, on a $f \circ \varphi^{-1}(z) = [f_0(z) : f_1(z) : f_2(z)]$ si $z \neq 0$, où les f_i sont holomorphes et non toutes nulles. On peut supposer que f_0 a l'ordre minimal en 0 parmi f_0, f_1, f_2, donc $\frac{f_1}{f_0} = h_1$ et $\frac{f_2}{f_0} = h_2$ sont holomorphes en 0, donc $f \circ \varphi$ est à valeurs dans la carte U_0 et s'étend holomorphiquement en 0, donc f s'étend holomorphiquement en p, en une application $\bar{f}$ à valeurs dans X_Q. Il reste à montrer que cette application $\bar{f}$ se relève à $\widehat{X}_Q$: comme elle est holomorphe non constante, elle ne prend pas la valeur $\bar{f}(p_0)$ si p est proche et différent de p_0, donc elle reste dans une seule branche, donc elle se relève.

(ii) Le fait que φ^* est bien défini résulte de ce que φ s'étend à une application holomorphe (non constante) de $\varphi : \widehat{X}_P \to \widehat{X}_Q$. Ensuite, φ^* est clairement un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Si $\varphi \neq \psi$, l'ensemble F des points $q \in \widehat{X}_Q$ tels que $\varphi^{-1}(\{q\} \cap \psi^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$ est fini, et il existe une fonction méromorphe f sur $\widehat{X}_Q$ qui a un unique pôle en un point de $\widehat{X}_Q \setminus F$, donc $f \circ \varphi$ et $f \circ \psi$ n'ont pas les mêmes pôles, donc $\varphi^* \neq \psi^*$, donc Φ est injectif. Remarque : nous verrons que les fonctions mŕomorphes sur une surface de Riemann compacte séparent les points [pour une surface non compacte, c'est déjà vrai pour les fonctions holomorphes], ce qui donne une preuve plus naturelle de l'injectivité de Φ.

Reste à montrer la surjectivité de Φ. Soit $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X_Q), \mathcal{M}(X_P))$, alors $f = h(x_Q)$ et $g = h(y_Q)$ sont des fonctions méromorphes sur $\widehat{X}_P$, donc de la forme $f = R_1(x_P, y_P)$, $g = R_2(x_P, y_P)$ où $R_i \in \mathbb{C}(x, y)$. Alors (R_1, R_2) définit un morphisme rationnel $\varphi : X_P \cdots\!> X_Q$ tel que $\varphi^* = h$.

(iii) Ceci résulte de (ii) puisque toute surface de Riemann compacte est biholomorphe à $\widehat{X}_P$ pour un certain P.

5.11 Équivalence entre surfaces de Riemann compactes et courbes algébriques projectives

D'après ce que nous avons vu, cette équivalence est donnée par :

- *À une surface de Riemann compacte X, on associe la courbe algébrique X_P, où $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme irréductible tel que $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ avec $P(f, g) = 0$. Cette courbe est bien définie à isomorphisme birationnel près. De plus, si X_P est associée à X et X_Q est associée à Y, la restriction donne une bijection naturelle entre $\mathrm{Hol}(X, Y)$ et $\mathrm{Mor}(X_P, X_Q)$. Enfin, l'application (f, g) : $X \setminus (f^{-1}(\{\infty\} \cup g^{-1}(\{\infty\})$ se prolonge en une application holomorphe $X \to X_P$ qui est isomorphe à la désingularisation de X_P.*
- *À une courbe algébrique projective $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, qui détermine P à une constante multiplicative près, on associe la surface de Riemann compacte $\widehat{X}_P$, munie d'une projection $\pi : \widehat{X}_P \to X_P$. Cette projection, appelée désingularisation ou normalisation, est un isomorphisme au-dessus de Rég(X_P), et l'image réciproque de tout $p \in \mathrm{Sing}(X_P)$ a autant d'éléments que X_P a de branches en p. Ces propriétés caractérisent $(\widehat{X}_P, \pi)$ à isomorphisme près. De plus, $\mathcal{M}(\widehat{X}_P) = \mathbb{C}(x_P, y_P)$, où x_P et y_P sont les extensions de $x \circ \pi$ et $y \circ \pi$ définies au-dessus de $\pi^{-1}(Y_P) \subset \mathbb{C}^2$.*

6 Genre d'une surface de Riemann compacte, théorème de Riemann-Roch

6.1 Théorème de finitude, définition du genre

Notations. Soit X une surface de Riemann compacte, et soit $D = \sum_{i=1}^k d_i p_i \in \mathrm{div}(X)$ un diviseur. On note $\Omega^1_X(D)$ ou $\Omega^1(D)$ l'espace des différentielles méromorphes ω telles que $\mathrm{div}(\omega) + D \geq 0$. De même, on note $\mathcal{L}_X(D)$ ou $\mathcal{L}(D)$ l'espace des fonctions méromorphes f telles que $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$. Noter que si z_i est une uniformisante en p_i, $(\omega \in \Omega^1_X(D))$ veut dire que $z_i^{d_i}\omega$ est holomorphe en p_i pour tout i. Et de même, $(f \in \mathcal{L}_X(D))$ veut dire que $z_i^{d_i} f$ est holomorphe en p_i pour tout i. En particulier,

$$\Omega^1_X(0) = \Omega^1_X \ , \ \mathcal{L}_X(0) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}.$$

Théorème. *(i) L'espace Ω^1_X est de dimension finie.*

(ii) Plus généralement, $\Omega^1_X(D)$ est de dimension finie pour tout $D \in \mathrm{Div}(X)$.

(iii) De même, $\mathcal{L}_X(D)$ est de dimension finie pour tout $D \in \mathrm{Div}(X)$.

Démonstration. Clairement, (ii) implique (i). Et (ii) et (iii) sont équivalents, car il existe $\omega_0 \in \mathcal{M}^1_X$ non nulle, ce qui donne des isomorphismes linéaires $f \mapsto f\omega_0$ de $\mathcal{L}_X(\mathrm{div}(\omega_0) + D)$ sur $\Omega^1_X(D)$ et de $\mathcal{L}_X(D)$ sur $\Omega^1_X(D - \mathrm{div}(\omega_0))$. Reste à montrer (iii).

Quitte à rajouter des points p_i avec $d_i = 0$, on peut trouver un recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ et des uniformisantes $z_i : (U_i, p_i) \approx (\Delta, 0)$ telles que $p_i \notin U_j$ si $j \neq i$. **(à justifier)**. Alors pour $\varepsilon >$ assez petit, les $V_i = z_i^{-1}(\Delta_{1-\varepsilon})$ recouvrent encore X et $z_i^{-1}(\Delta_\varepsilon) \cap U_j = \emptyset$ si $j \neq i$. On définit alors, pour $f \in \mathcal{L}_X(D)$:

$$||f||_1 = \max_{1\leq i\leq k} ||z_i^{d_i} f||_{L^\infty(U_i)} \ , \ ||f||_2 = \max_{1\leq i\leq k} ||z_i^{d_i} f||_{L^\infty(V_i)}.$$

Lemme. *(i) $||f||_1$ et $||f||_2$ sont deux normes équivalentes sur $\mathcal{L}_X(D)$.*

(ii) $||f||_1$ (et donc $||f||_2$) est complète.

(iii) La boule unité de $||.||_1$ est relativement compacte pour $||.||_2$.

Preuve du lemme. (i) La seule chose non immédiate est que $||f||_1 \leq \mathrm{cste}||f||_2$. Or $U_i \setminus V_i$ est contenu dans la réunion des $U_j \setminus z_j^{-1}(\Delta_\varepsilon)$ et sur $U_i \cap U_j \setminus (V_i \cup z_j^{-1}(\Delta_\varepsilon))$ on a $\frac{1}{2} \leq |z_i| \leq 1$, $\varepsilon \leq |z_j| \leq 1$, donc $|z_j^{d_j} z_i^{-d_i}| \leq C$ avec C indépendante de (i, j). Donc

$$||z_i^{d_i} f||_{L^\infty(U_i)} \leq \max(||z_i^{d_i} f||_{L^\infty(V_i)}, C \max_{j\neq i} ||z_j^{d^j} f||_{L^\infty(V_j)}) = \max(1, C)||f||_2,$$

d'où $||f||_1 \leq \max(1, C)||f||_2$.

(ii) Ceci résulte de ce que $z_i^{d_i} f$ est holomorphe et bornée sur U_i, que $C^0_b(U_i, \mathbb{C})$ muni de la norme sup est complet, et qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe. Ou : l'espace des fonctions holomorphes bornées $\mathrm{Hol}_b(U_i, \mathbb{C})$ est complet pour la norme sup. De même pour $\mathrm{Hol}_b(V_i, \mathbb{C})$.

(iii) L'application de restriction $\mathrm{Hol}_b(U_i, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hol}_b(V_i, \mathbb{C})$ est isométrique à $\mathrm{Hol}_b(\Delta, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hol}_b(\Delta_{1-\varepsilon}, \mathbb{C})$. La boule unité est envoyée dans un ensemble de fonctions bornées par 1, qui est équilipschitzien puisque $|f'| \leq (1-\varepsilon)^{-1}$ par formule de Cauchy. Donc par Ascoli cet ensemble est relativement compact. Donc la boule unité de $||.||_1$ a une image relativement compacte dans chaque $\mathrm{Hol}_b(V_i, \mathbb{C})$, donc est relativement compacte pour $||.||_2$.

Fin de la preuve du théorème. La boule unité de $||.||_1$ est compacte pour $||.||_1$ puisque les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{L}_X(D)$ est de dimension finie par le théorème de Riesz.

Remarque. Cette preuve se généralise pour montrer que le noyau de tout opérateur elliptique sur une variété compacte dans bord est de dimension finie. Exemple : $\ker(\Delta - \lambda\mathrm{Id})$, espace propre du laplacien sur une variété riemannienne.

Définition et notations. Le *genre* d'une surface de Riemann compacte X (dit aussi *genre analytique*) est

$$g_X = g = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_X).$$

Par ailleurs, on note

$$\ell_X(D) = \ell(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_X(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D).$$

6.2 Autre preuve de la finitude de $\ell(D))$ et premières estimations

Proposition 1. *Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X. Alors $\ell(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$ est fini et vérifie*

$$\ell(D) \leq \max(0, \deg(D) + 1).$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $\deg(D) < 0$, il s'agit de montrer que $\mathcal{L}(D) = 0$: ceci vient du fait que $\deg \operatorname{div}(f) = 0$ pour une fonction méromorphe non constante. Ensuite, si $\deg(D) \geq 0$, en prenant $p_1, \cdots, p_N \in X \setminus \operatorname{supp}(X)$ distincts avec $N = \deg(D) + 1$, l'application d'évaluation

$$f \in \mathcal{L}(D) \mapsto (f(p_1), \cdots, f(p_N)) \in \mathbb{C}^N$$

a pour noyau $\mathcal{L}(D - (p_1 + \cdots + p_N)) = 0$, donc $\dim \mathcal{L}(D) \leq \deg(D) + 1$.

La même idée permet de prouver la

Proposition 2. *Soient D et D' deux diviseurs sur X compacte, avec D positif. Alors*

$$\ell(D + D') \leq \deg(D) + \ell(D').$$

Démonstration. Écrivons $D = \sum_{i=1}^{k} d_i p_i$ avec les p_i distincts, $d_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum d_i = \deg(D)$. Fixons des uniformisantes z_i en les p_i. Soit $d'_i = \deg_{p_i}(D')$. Pour $f \in \mathcal{L}(D + D')$, on peut définir $T_{p_i}(f) \in \mathbb{C}_{d_i - 1}[z_i]$, le développement de Taylor de degré $d_i - 1$ de $z^{d_i + d'_i} f$ en z_i. Alors l'application d'évaluation

$$f \in \mathcal{L}(D + D') \mapsto (T_{p_1}(f), \cdots, T_{p_k}(f)) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{C}_{d_i - 1}[z_i] \approx \mathbb{C}^{\deg(D)}$$

a pour noyau $\mathcal{L}(D')$, donc

$$\ell(D + D') = \dim \mathcal{L}(D + D') \leq \deg(D) + \dim \mathcal{L}(D') = \deg(D) + \ell(D').$$

6.3 Théorie de Hodge pour les surfaces de Riemann compactes

Soit X une surface de Riemann, compacte ou non. Rappelons que si $\mathcal{H}^1(X, \mathbb{R})$ désigne l'espace des formes harmoniques réelles, on a un isomorphisme $\Omega^1_X \approx \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R})$ donné par $\omega \mapsto \Re\omega$. Si X est compacte de genre g, on a donc

$$g = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}) \ , \ \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2g}.$$

On note $H^1(X, \mathbb{R})$ le groupe de cohomologie de De Rham :

$$H^1(X, \mathbb{R}) = \frac{\{\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{R}) \mid d\alpha = 0\}}{dC^\infty(X, \mathbb{R})}.$$

On définit de même $H^1(X, \mathbb{C})$. Puisque toute forme harmonique est fermée, on a une application naturelle $i_X : \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(X, \mathbb{R})$. Si X est compacte, toute fonction harmonique est constante, donc i_X est injective.

L'énoncé suivant est un cas particulier du théorème général de Hodge que sur une variété riemannienne compacte l'inclusion des formes harmoniques dans la cohomologie de De Rham est un isomorphisme.

Théorème. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors toute classe de cohomologie dans $H^1(X, \mathbb{R})$ admet un représentant harmonique. Donc i_X donne un isomorphisme canonique $\mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}) \approx H^1(X, \mathbb{R})$. Donc si X est de genre g on a*

$$\dim_{\mathbb{R}} H^1(X, \mathbb{R}) =: b_1(X) = 2g.$$

[la notation $b_1(X)$ veut dire : «premier nombre de Betti»]

Démonstration. On va trouver le représentant harmonique par minimisation d'une intégrale de Dirichlet. La preuve est semblable à la construction d'un potentiel dipolaire, mais beaucoup plus simple puisque X est compacte et qu'on n'a pas à modifier l'intégrale de Dirichlet ni à distinguer suivant qu'on est loin ou près d'un certain point p.

Soit $\alpha_0 \in \Omega^1(X,\mathbb{R})$ un représentant de la classe donnée, on cherche $\alpha = \alpha_0 + du$ où $u \in C^\infty(X,\mathbb{R})$. Pour $u, w \in C^1(X,\mathbb{R})$, notons

$$\mathcal{D}_{\alpha_0}(u) = ||\alpha_0 + du||^2_{L^2(X)} = \iint_X ||\alpha_0 + du||^2$$
$$\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u,w) = \langle \alpha_0 + du, dw\rangle_{L^2(X)} = \iint_X (\alpha_0 + du, dw).$$

On a donc la propriété

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\alpha_0}(u+w) &= ||\alpha_0 + du + dw||^2_{L^2(X)}\\ &= ||\alpha_0 + du||^2_{L^2(X)} + 2\langle \alpha_0 + du, dw\rangle_{L^2(X)} + ||dw||^2_{L^2(X)}\\ &= \mathcal{D}_{\alpha_0}(u) + 2\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u,w) + \mathcal{D}_X(w).\end{aligned}$$

Le principe de Dirichlet dans ce cas s'énonce ainsi.

Proposition. *Soit $u \in C^2(X,\mathbb{R})$. Sont équivalents :*

(i) $\alpha_0 + du$ est harmonique

(ii) u minimise $\mathcal{D}_{\alpha_0}$ sur $C^1(X,\mathbb{R})$

(iii) Pour tout $w \in C^1(X)$, on a $\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u,w) = 0$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Si $w \in C^1(X,\mathbb{R})$, on a, en posant $\alpha = \alpha_0 + du$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u,w) = \iint_X (\alpha, dw) = \iint_X dw \wedge *\alpha &= \iint_X d(w * \alpha) - wd(*\alpha)\\ &= -\iint_X wd(*\alpha) \quad \text{par Stokes.}\end{aligned}$$

Ceci est nul pour tout w si et seulement si $*\alpha = 0$. Puisque $d\alpha = 0$, ceci équivaut au fait que α est harmonique.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (ii) équivaut à : pour tout $w \in C^1(X,\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \mathcal{D}_{\alpha_0}(u+tw) = \mathcal{D}_{\alpha_0}(u) + 2t\mathcal{D}'_{\alpha_0}(u,w) + t^2\mathcal{D}_{\alpha_0}(w)$ a un minimum en 0. Puisque $\mathcal{D}_X(w) \geq 0$, ceci équivaut à (iii).

Remarques. En fait, comme avant cette proposition est vraie dès que u est de classe C^1. De plus, comme pour le potentiel dipolaire, nous construirons un minimum dont nous montrerons en même temps qu'il est harmonique.

Preuve du théorème. On considère une suite minimisante (u_n), donc $\lim \mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n) = \inf_{C^1(X,\mathbb{R})} \mathcal{D}_{\alpha_0} =: d$, et nous allons trouver une fonction $u \in C^\infty(X)$ telle que $\alpha_0 + du$ est harmonique et du_n converge vers du dans $L^2\Omega^1(X)$.

1) On montre d'abord la propriété de suite de Cauchy L^2. La formule du parallélogramme

$$\Big|\Big|\frac{\alpha-\beta}{2}\Big|\Big|^2_{L^2(X)} + \Big|\Big|\frac{\alpha+\beta}{2}\Big|\Big|^2_{L^2(X)} = \frac{1}{2}(||\alpha||^2_{L^2(X)} + ||\beta||^2_{L^2(X)})$$

implique

$$||du_n - du_m||^2_{L^2(X)} = 2(\mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n) + \mathcal{D}_{\alpha_0}(u_m)) - 4\mathcal{D}_{\alpha_0}(\frac{u_n+u_m}{2}).$$

Or $\mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n)$ et $\mathcal{D}_{\alpha_0}(u_m)$ tendent vers d, et $\mathcal{D}_{\alpha_0}(\frac{u_n+u_m}{2}) \geq d$. Donc le terme de droite tend vers 0, cqfd.

2) Soit q un point de X. Il est contenu dans l'intérieur d'un disque conforme lisse $D \subset X$. Sur D, α_0 est exacte, $\alpha_0 = dv_0$. Comme en 3.3, en utilisant le lemme de la section 2.6, on peut trouver $\widetilde{u}_n \in C^1(X,\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{D}_D(v_0 + \widetilde{u}_n) \leq \mathcal{D}_D(v_0 + u_n)$, $\widetilde{u}_n = u_n$ hors de D, et $v_0 + \widetilde{u}_n$ est harmonique sur D_n, où D_n est un sous-disque conforme de D tel que $D_n \subset \mathrm{Int}(D_{n+1})$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathrm{Int}(D)$. On a

$$\mathcal{D}_{\alpha_0}(\widetilde{u}_n) = \mathcal{D}_D(v_0 + \widetilde{u}_n) + \iint_{X\setminus D} ||\alpha_0 + du_n||^2 \leq \mathcal{D}_{\alpha_0}(u_n),$$

donc $(\widetilde{u}_n)$ est encore une suite minimisante pour $\mathcal{D}_{\alpha_0}$, donc $d(\widetilde{u}_n - u_n)$ tend vers 0 dans $L^2(X)$, et a fortiori dans $L^2(D)$. Puisque (du_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(D)$, il en est de même de $(d\widetilde{u}_n)$. Exactement comme en 3.3, le contrôle des normes C^k des fonctions harmoniques par l'intégrale de Dirichlet implique que $\alpha_0 + du_n$ converge dans $L^2\Omega^1(X)$ vers une forme harmonique α, et aussi que $\alpha - \alpha_0$ est exacte. Ceci achève la preuve du théorème.

6.4 Décomposition de Hodge

(i) La coholomogie de De Rham $H^1(X,\mathbb{C})$ se décompose en une somme directe $H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$, où

$$H^{p,q}(X) = \frac{\Omega^{p,q}(X) \cap \ker d}{\Omega^{p,q}(X) \cap dC^\infty(X,\mathbb{C})}.$$

Ce sont des sous-espaces complexes, isomorphes comme sous-espaces réels par la conjugaison. Donc, en notant $h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}}(H^{p,q}(X))$, on a

$$h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) = g.$$

(ii) L'application naturelle des formes harmoniques $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ vers $H^{p,q}(X)$ est un isomorphisme.

(iii) L'application naturelle $H^{0,1}(X) \to \frac{\Omega^{0,1}(X)}{\overline{\partial} C^\infty(X,\mathbb{C})} = \operatorname{coker}(\overline{\partial})$ est un isomorphisme.

Démonstration. On la donnera plus tard.

6.5 Cohomologie de De Rham algébrique

Définition. L'espace $\frac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d\mathcal{M}(X)}$ est appelé le H^1 *de De Rham algébrique* et noté $H^{1,alg}_{DR}(X)$. (En fait, les algébristes le notent simplement $H^1_{DR}(X)$). Sa dimension est $h^{1,alg}_{DR}(X)$.

Proposition. *La dimension sur $\mathbb{C}$ de l'espace $\frac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d\mathcal{M}(X)}$, quotient des différentielles méromorphes sans résidus [= de seconde espèce] par les formes exactes, est de dimension au plus $2g$. Ou encore : la dimension de $\frac{\mathcal{M}^{1,sr}(X)}{d\mathcal{M}(X) \oplus \Omega^1_X}$ est au plus g.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $H^{1,alg}_{DR}(X)$ s'injecte naturellement dans $H^1(X,\mathbb{C})$. C'est une généralisation de la preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii) dans les propriétés des surfaces simplement connexes.

Soit $\omega \in \mathcal{M}^{1,sr}_X$. Au voisinage de chaque pôle p_i, choisissons une uniformisante z_i définie sur U_i et l'envoyant sur Δ_2, de sorte que les U_i soient disjoints. Alors ω admet une primitive méromorphe u_i sur U_i. Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ de classe C^∞ qui vaut 1 hors de $[0,1]$ et 0 près de 0. Alors la forme $\widetilde{\omega}$ qui vaut ω hors des $z_i^{-1}(\overline{\Delta})$ et $d(\rho(|z_i|)u_i)$ sur U_i est bien définie. De plus, $\widetilde{\omega} \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ et $d\widetilde{\omega} = 0$.

On a ainsi associé à ω une forme fermée $\widetilde{\omega} \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ telle que $\widetilde{\omega} - \omega$ est exacte, c'est-à-dire de la forme df où f est localement la somme d'une fonction C^∞ et d'une fonction méromorphe. Donc la classe $[\widetilde{\omega}] \in H^1(X,\mathbb{C})$ est bien définie et ne dépend que de la classe $[\omega] \in H^{1,alg}_{DR}(X)$, et l'on obtient ainsi une application linéaire de $H^{1,alg}_{DR}(X)$ dans $H^1(X,\mathbb{C})$. Cette application est injective, car si $\widetilde{\omega}$ est exacte, $\omega = \widetilde{\omega} - df$ l'est aussi.

Remarque. En fait cette application est un isomorphisme, donc $h^{1,alg}_{DR}(X) = 2g$. Ceci résulte aussi du fait que l'on a une suite exacte courte

$$0 \to \Omega^1_X \to H^{1,sr}(X) \to \frac{\Omega^{0,1}(X)}{\overline{\partial} C^\infty(X,\mathbb{C})}.$$

6.6 Minoration de $\ell(D)$

Proposition. *Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X de genre g.*

(i) On suppose D positif et de degré $g+1$. Alors $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g$.

(ii) Plus généralement, on a toujours $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g$. En particulier, si $\deg(D) \geq g+1$ on a $\ell(D) \geq 2$ c'est-à-dire qu'il existe une fonction f méromorphe non constante telle que $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$. En particulier, il existe toujours une fonction méromorphe de degré au plus $g+1$.

Démonstration. (i) Écrivons $D = \sum_{i=1}^k d_i p_i$ avec $p_1, \cdots, p_k \in X$ distincts, $d_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum d_i = g+1$. Pour $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i$, soit $\omega_{i,j} \in \mathcal{M}^{1,sr}_X$ ayant exactement un pôle d'ordre $j+1$ en p_i et holomorphe ailleurs :

une telle forme existe d'après 3.4. Ces formes sont en nombre d, donc puisque l'espace $\frac{\mathcal{M}_X^1}{d\mathcal{M}(X)\oplus\Omega_X^1}$ est de dimension au plus g, il existe $d-g\geq 1$ relations linéaires

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j}^{(r)}\omega_{i,j} = df^{(r)} + \omega_i,$$

où $\omega_i \in \Omega_X^1$ qui sont indépendantes c'est-à-dire que si $(\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(d-g)})$ est non nul, il existe un (i,j) tel que $\sum_r \mu^{(r)}\lambda_{i,j}^{(r)} \neq 0$. Donc la forme $\sum_r \mu^{(r)} df^{(r)}$ est non nulle, donc la fonction $\sum \mu^{(r)} f^{(r)}$ est non constante. Comme elle est dans $\mathcal{L}(D)$, on a montré que $\mathcal{L}(D)$ contient les fonctions linéairement indépendantes $1, f^{(1)},\cdots,f^{(d-g)}$, cqfd.

(ii) Dans le cas général, il existe D positif tel que $D+D'$ est positif, et de degré $\geq g+1$. D'après 1) et la proposition 2 de 6.2, on a

$$\ell(D) \geq \ell(D+D') - \deg(D') \geq \deg(D+D') + 1 - g - \deg(D') = \deg(D) + 1 - g.$$

6.7 Surfaces de genre zéro

Théorème. *Toute surface de Riemann compacte de genre zéro est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On dit aussi qu'elle est* rationnelle.

Démonstration. D'après la section précédente, une telle surface X admet une fonction méromorphe f non constante avec un pôle unique, et qui est simple. Comme application de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, elle est donc de degré un c'est-à-dire un isomorphisme.

Corollaire (théorème de Luröth, version géométrique). *Soit X une surface de Riemann admettant une application holomorphe non constante $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to X$. Alors X est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Démonstration. D'abord, X est compacte puisque f est ouverte et fermée donc surjective. Soit $\omega \in \Omega_X^1$, alors $f^*\omega \in \Omega^1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$, donc $f^*\omega = 0$, donc $\omega = 0$ puisque df est presque partout non nulle. Donc $\Omega_X^1 = 0$, c'est-à-dire que X est de genre zéro, donc $X \approx \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Remarque. Algébriquement, ceci dit que toute courbe projective algébrique *unirationnelle* est rationnelle, ou que tout sous-corps de $\mathbb{C}(x)$ contenant strictement $\mathbb{C}$ est de la forme $\mathbb{C}(f)$, cf les TD.

Proposition. *Si X est de genre zéro, $\ell(D) = \max(0, \deg(D)+1)$.*

Démonstration. 1) Première preuve. Nous connaissons déjà la majoration (valable en genre quelconque), reste à montrer la minoration, qui est non triviale seulement si $\deg(D) \geq 0$. D'après la minoration de 6.4, on a

$$\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1,$$

cqfd.

2) Seconde preuve, plus concrète. On peut supposer $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $D = \sum_{i=1}^k d_i z_i + d_\infty \infty$ avec $z_i \in \mathbb{C}$ et $\sum d_i = \deg(D)$. Alors $\mathcal{L}(D)$ est l'espace des fractions rationnelles $R(z)$ telles

- $R(z)\prod_{i=1}^k (z-z_i)^{d_i} = P(z) \in \mathbb{C}[z]$.
- $R(z) = O(|z|^{d_\infty})$ à l'infini

Ceci équivaut à $R(z) = P(z) \times \prod_{i=1}^k (z-z_i)^{-d_i}$ où $P(z)$ est un polynôme de degré au plus $\sum d_i z_i + d_\infty = \deg(D)$, donc $\ell(D) = \dim \mathbb{C}_{\leq \deg(D)}[z] = \max(0, \deg(D)+1)$.

6.8 Théorème de Riemann-Roch

Soit D un diviseur sur une surface de Riemann X compacte de genre g. Nous allons estimer $\ell(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$. Remarquons d'abord que si f_0 est une fonction méromorphe non nulle, l'application $f \mapsto ff_0$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(D + \mathrm{div}(f_0))$ sur $\mathcal{L}(D)$. Donc $\mathcal{L}(D)$ ne dépend que de la classe $[D] \in \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Divprinc}(X)$.

Diviseur canonique. Rappelons que la *classe canonique* $K_X \in \mathrm{Pic}(X)$ est la classe de $\mathrm{div}(\omega)$ pour n'importe quelle différen-tielle méromorphe non nulle. Par abus de langage, on la considère comme un diviseur, appelé *diviseur canonique*, ce qui donne un sens aux expressions $\ell(D+K_X)$ et (bien que ce soit plus abusif) $\mathcal{L}(D+K_X) \approx \Omega^1(D)$. En particulier, on a $\mathcal{L}(K_X) \approx \Omega_X^1$, d'où $\ell(K_X) = g$.

Théorème de Riemann-Roch. *Pour tout diviseur D sur une surface de Riemann compacte X de genre g, on a*

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Preuve du théorème de Riemann-Roch. Traitons d'abord le cas où $g = 0$, soit $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors Ω^1_X contient la forme dz qui a un pôle double en l'infini et aucun zéro, donc $\deg(K_X) = -2 = 2g - 2$. Puis, si $\deg(D) \geq -1$, $\ell(D) = \deg(D) + 1$ et $\ell(K_X - D) = 0$, donc $\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg(D) + 1 = \deg(D) + 1 - g$. Enfin, si $\deg(D) \leq -1$, $\ell(D) = 0$ et $\ell(K_X - D) = \deg(K_X - D) + 1 = -\deg(D) - 1$, donc $\ell(D) - \ell(K_X - D) = 0 - (\deg(D) - 1) = \deg(D) + 1 = \deg(D) + 1 - g$.

Supposons maintenant $g \geq 1$. Considérons la fonction

$$f(D) = \ell(D) - \ell(K_X - D) - \deg(D).$$

Il s'agit de montrer que $f(D) = 1 - g$.

1) On a

$$f(D+p) - f(D) = \big(\ell(D+p) - \ell(D)\big) + \big(\ell(K_X - D) - \ell(K_X - D - p)\big) - 1,$$

et les deux premiers termes à droite sont dans $\{0, 1\}$ d'après la proposition 2 de 6.2. Il faut donc montrer qu'ils ne sont pas tous les deux égaux à 1. Mais ceci voudrait dire qu'il existe $f \in \mathcal{L}(D+p) \setminus \mathcal{L}(D)$, et $\omega \in \Omega^1(-D) \setminus \Omega^1(-D-p)$, ce qui implique que $f\omega \in \Omega^1(p) \setminus \Omega^1_X$, et on a vu que c'était impossible.

2) D'après la minoration $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ et le fait que $\ell(D) = 0$ si $\deg(D) < 0$, on a $f(D) \geq \deg(D) + 1 - g - 0 - \deg(D) = 1 - g$ si $\deg(D) > \deg(K_X)$.

Ensuite, pour $D = 0$ on a $f(0) = 1 - g - 0 - 0 = 1 - g$. D'après le lemme, on a $f(D) = 1 - g$ pour $D \geq 0$.

Ensuite, $f(K_X) = g - 1 - \deg(K_X)$, et comme $g \geq 1$ on a $K_X \geq 0$, donc $g - 1 - \deg(K_X) = 1 - g$, soit $\deg(K_X) = 2g - 2$. (On obtient donc cette égalité au cours de la preuve et non comme corollaire).

Enfin, si $\deg(D) \leq -1$, on a $\ell(D) = 0$ et $\ell(K_X - D) \geq 2g - 2 - \deg(D) + 1 - g = g - 1 - \deg(D)$, donc

$$\ell(D) \leq 0 + 1 - g + \deg(D) - \deg(D) = 1 - g.$$

Comme $f(D) = 1 - g$ pour $\deg(D) \leq -1$ ou $\deg(D) \geq \deg(K_X) + 1 = 2g - 1$, et que $f(D+p) \leq f(D)$, on en déduit $f(D) \equiv 2 - g$, cqfd.

6.9 Premiers corollaires de Riemann-Roch

(i) *Le degré du diviseur canonique est* $\deg(K_X) = 2g - 2$. *En particulier, si* $g = 1$ *toute forme holomorphe est non singulière.*

(ii) *Si* $\deg(D) \geq 2g - 1$, $\ell(D) = 2g - 1$.

(iii) Formule de Riemann-Hurwitz. *Si $f : X \to Y$ est un revêtement ramifié de degré d entre deux surfaces de Riemann compactes, on a, en notant* $R(f) = \sum_{x \in X} (\deg_x(f) - 1)x \in \mathrm{Div}(X)$, *le* diviseur de ramification *:*

$$2g_X - 2 = d(2g_Y - 2) + \deg R(f) = d(2g_Y - 2) + \sum_{x \in \mathrm{crit}(f)} (\deg_x(f) - 1).$$

Démonstration. (i) On applique le théorème à $D = K_X$:

$$\ell(K_X) - \ell(0) = g - 1 = \deg(K_X) + 1 - g,$$

d'où la valeur de $\deg(K_X)$.

(ii) On a $\deg(K_X - D) \leq -1$ d'après (i), donc $\ell(K_X - D) = 0$, d'où le résultat.

(iii) Soit $\omega \in \Omega^1_Y$ non nulle. Pour tout $x \in X$, on peut écrire f sous la forme locale z^k, $k = \deg_x(f)$ et ω sou la forme $z^j dz$, $j = \deg_{f(x)}(\omega)$, donc $f^*\omega = kz^{k(j+1)-1}dz$, d'où

$$\deg_x(f^*\omega) = \deg_x(f).(\deg_{f(x)}(\omega) + 1) - 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
2g_X - 2 = \deg(f^*\omega) &= \sum_{x\in X} (\deg_x(f).(\deg_{f(x)}(\omega)+1)-1) \\
&= \sum_{y\in Y} \Big(\sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} \deg_x(f)\Big) \deg_y(\omega) + \sum_{x\in X} (\deg_x(f)-1) \\
&= d \sum_{y\in Y} \deg_y(\omega) + \deg R(f) \\
&= d\deg(\omega) + \deg R(f) \\
&= d(2g_Y - 2) + \deg R(f).
\end{aligned}$$

6.10 Formule du genre d'une courbe plane

Théorème. *Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique plane (irréductible), de degré d.*
(i) Si X_P est lisse, son genre est

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{d(d-3)}{2} + 1.$$

(ii) En général, le genre de la désingularisée (ou normalisée) $\widehat{X}_P$ est

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{p\in \mathrm{Sing}(p)} \delta_p,$$

où $\delta_p \in \mathbb{N}^*$. De plus, si le point p est un point double ordinaire [aussi appelé nœud*] ou cusp ordinaire [point de rebroussement de première espèce], on a $\delta_p = 1$. Dans tous les autres cas, $\delta_p \geq 2$.*

Démonstration. Traitons d'abord les cas $d = 1$, $d = 2$.

Si $d = 1$, X_P est toujours lisse, c'est une droite projective [géométriquement et biholomorphiquement] donc $g = 0 = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Si $d = 2$, X_P est une conique non dégénérée. Si elle est lisse, elle est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: fixant $p_0 \in X_P$ qu'on peut supposer égal à $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, l'application $\varphi : (x,y) \in X_P \mapsto \frac{y}{x} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [géométriquement une projection centrale] est un biholomorphisme, car la droite $y = tx$ coupe la conique en deux points, l'un étant déjà connu donc l'autre est fonction rationnelle de t. Explicitement, si $P(x,y) = ax+by+cx^2+dxy+ey^2$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, $(c,d,e) \neq (0,0,0)$ et $ax+by$ ne divise pas $cx^2+dxy+ey^2$, son inverse est obtenu en posant $y = tx$, ce qui donne

$$ax + btx + cx^2 + dtx^2 + et^2x^2 = 0.$$

Soit en divisant par x et en résolvant :

$$x = -\frac{a+bt}{c+dt+et^2} \ , \ y = -\frac{at+bt^2}{c+dt+et^2}.$$

Autre exemple : avec la courbe $x^2+y^2 = 1$ et le point $p_0 = (1,0)$, en posant $y = t(x-1)$ on trouve

$$x^2 + t^2(x-1)^2 = 1,$$

et en divisant par $x-1$ on trouve le paramétrage

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \ , \ y = \frac{-2t}{t^2+1}.$$

On suppose maintenant $d \geq 3$.

(i) Nous allons exhiber une forme holomorphe non nulle ω, et calculer son nombre de zéros (avec multiplicités $\deg(\omega)$, que nous savons par ailleurs être égal à $\deg(K_X) = 2g-2$.

On pose $\omega = \frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}}$, qui est a priori une forme méromorphe. Puisque $dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy$ s'annule sur X_P, on a $\omega = -\frac{dy}{\frac{\partial P}{\partial x}}$. Comme dP ne s'annule pas sur $X_P \cap \mathbb{C}^2 = Y_P$, et que x (resp. y) est une coordonnée holomorphe si $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ (resp. $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$), ω est holomorphe et non singulière sur Y_P.

Reste à voir ce qui se passe à l'infini. Quitte à remplacer $P(x,y)$ par $(1+\varepsilon y)^d P(\frac{x}{1+\varepsilon y}, \frac{y}{1+\varepsilon y})$ avec $\varepsilon \neq 0$ assez petit (ce qui revient à remplacer la droite à l'infini par $(y = -\varepsilon^{-1})$, on peut supposer que la composante homogène de degré d est de la forme $\lambda \prod_{i=1}^d (y - \alpha_i x)$ avec les α_i distincts. Géométriquement, les points de $X_P \cap \mathbb{P}^1_\infty$ sont différents de $[0:0:1]$ et transverses. Si $(t,u) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$ sont les coordonnées de U_1, on a

$$P_1(t,u) = t^d P(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}) = \lambda \prod_{i=1}^d (u - \alpha_i) + tQ(t,u).$$

Donc les points à l'infini de X_P sont tous dans U_1, donnés par $t = 0, u = \alpha_1, \cdots, \alpha_d$. Ils sont au nombre de d et pour chacun d'eux, t est une uniformisante.

Par ailleurs, écrivant $(x,y) = (\frac{1}{t}, \frac{u}{t})$, $P(x,y) = x^d P_1(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}) = x^d P_1(t,u)$, il vient

$$dx = -t^{-2}dt \ , \ \frac{\partial P}{\partial y} = x^d . \frac{1}{x}\frac{\partial P_1}{\partial u}(t,u) = t^{1-d}\frac{\partial P_1}{\partial u}(t,u),$$

donc

$$\omega = \frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}} = t^{d-3}\frac{dt}{\frac{\partial P_1}{\partial u}}.$$

Puisque la forme $\frac{dt}{\frac{\partial P_1}{\partial u}}$ est holomorphe et non singulière sur U_1, ω est non singulière partout si $d = 3$, et si $d = 4$ elle a pour zéros les points de $X_L \cap \mathbb{P}^1_\infty$, qui sont au nombre de d et d'ordre $d-3$. Dans tous les cas, on a

$$\deg(\mathrm{div}(\omega)) = d(d-3) = 2g-2,$$

ce qui donne la formule annoncée.

(ii) Notons $\pi : \widehat{X}_P \to X_P$ la désingularisation. On peut supposer comme en (i) que les points à l'infini sont différents de $[0:1:0]$ et transverses, donc au nombre de d. En particulier, ils sont contenus dans $\mathrm{Rég}(X_P)$. Puisque $\mathcal{M}(\widehat{X}_P) = \mathbb{C}(x_P, y_P)$ où x_P et y_P sont les extensions à $\widehat{X}_p$ des fonctions x et y définies sur $\mathrm{Rég}(X_P) \subset \widehat{X}_P$, on peut encore définir $\omega = \frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}}$. En-dehors de $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X_P))$ c'est-à-dire sur $\mathrm{Rég}(X_P)$, ω est holomorphe avec les mêmes zéros qu'avant, soit $d(d-3)$ avec multiplicités.

On a donc

$$\deg(\mathrm{div}(\omega)) = d(d-3) - 2\sum_{p \in \mathrm{Sing}(X_P}\delta_p \ , \ \delta_p = -\frac{1}{2}\sum_{q\in\pi^{-1}(\{p\})}\deg_q(\omega).$$

Identifiant ceci à $2g-2$, il reste à montrer que les δ_p sont des entiers strictement positifs (en fait ω a un pôle en chaque point $q \in \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X_P))$) et pairs. **Nous l'admettrons dans le cas général**, et traiterons seulement le cas où p est un nœud ou un cusp ordinaire. Remarque : on peut montrer que toute surface de Riemann se réalise comme courbe plane projective avec des nœuds comme seules singularités.

• Si p_0 est un nœud, on peut supposer $p_0 = (0,0)$ et $P_2 = xy$ (les deux tangentes sont horizontale et verticale). Les deux branches sont alors de la forme $(x, f(x))$ et $(g(y), y)$ avec f et g nulles à l'ordre deux en 0. On a alors $\pi^{-1}(p_0) = \{q_x, q_y\}$. Au-dessus de la première branche, on a $\frac{\partial P}{\partial y} = x + O(x^2) = x(1+o(x))$, donc $\omega = (1+o(x))\frac{dx}{x}$. Donc ω a un pôle simple en q_x, et de même elle a un pôle simple en q_y, donc $\delta_p = 1+1 = 2$.

• Si p_0 est un cusp ordinaire, on peut supposer $p_0 = (0,0)$ et $P_2 = y^2$, $P_3 = -x^3 + O(|x^2y| + |xy^2| + |y^3| + |x|^4)$ [par définition, un cusp ordinaire est une singlarité qui a cette forme dans des coordonnées convenables]. L'unique branche est alors de la forme $(t^2, t^3 + h(t))$ avec h nulle à l'ordre 4 en 0. Donc $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + O(x^3+y^3) = 2t^3(1+o(1))$, donc

$$\omega = \frac{2tdt}{2t^3(1+o(1))} = (1+o(1))\frac{dt}{t^2}.$$

Donc ω a un pôle double en l'unique point $q \in \pi^{-1}(\{p_0\})$, donc $\delta_p = 2$.

7 Courbes elliptiques

7.1 Réalisation d'une surface de genre un comme cubique ou comme quartique plane

Soit X une surface de Riemann compacte de genre un. Nous savons que X admet une fonction méromorphe f de degré au plus deux, en fait exactement deux sinon X serait biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donc de genre zéro. Par Riemann-Hurwitz, cette fonction a une ramification totale de 4, et les ramifications sont simples, donc il y a 4 valeurs critiques a, b, c, d. Remplaçant f par $h \circ f$ où $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et utilisant la 3-transitivité de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [cf le partiel], on peut imposer que $(a, b, c, d) = (0, 1, \infty, \lambda)$, mais nous ne le ferons pas.

Nous allons montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{M}(X)$ telle que $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)(f-d)$ si a, b, c, d sont finis, et $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)$ si $d = \infty$. Cette fonction peut être construite par prolongement analytique, mais nous allons donner une construction plus algébrique.

D'après l'étude générale de $\mathcal{M}(X)$, on a $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ où g vérifie une équation $g^2 + P(f)g + Q(f)) = 0$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[x]$. Remplaçant g par $g + \frac{1}{2}P(f))$, on peut supposer

$$g^2 = R(f) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (f - a_i)^{d_i}$$

avec les a_i distincts. Et en divisant g par un polynôme en f, on peut supposer que $\lambda = 1$ et que tous les d_i sont égaux à 1, soit $g^2 = \prod_{i=1}^{k} (f - a_i)$. Ceci implique que si $f(p) = a_i$ on a $\deg_p(g) = \frac{1}{2} \deg_p(f - a_i)$, donc $\{a_1, \cdots, a_k\} \subset \{a, b, c, d\} \cap \mathbb{C}$. De plus, si $k = 2$, alors $\mathbb{C}(f, g) = \mathbb{C}(h)$, ce qui implique que le genre de X est nul par le théorème de Luröth.

Donc

- soit $k = 4$, donc $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)(f-d)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts ;
- soit $k = 3$, disons $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Dans ce dernier cas, $d = \infty$: sinon, f aurait un pôle simple, donc $(f-a)(f-b)(f-c)$ aurait un pôle triple, donc ne pourrait être un carré.

Remarque. En général, une fonction $f \in \mathcal{M}(X)$ non nulle n'a une racine n-ième que si $\deg_p(f) \in n\mathbb{Z}$ pour tout $p \in f^{-1}(\{0, \infty\})$, et l'on peut montrer que cette condition est suffisante. Donnons une preuve utilisant la théorie des revêtements. L'application $f : X \setminus f^{-1}(\{0, \infty\}) \to \mathbb{C}^*$ vérifie que si $f_\sharp : \pi_1(X, p0) \to \mathbb{Z}$ est l'homomorphisme induit au niveau des groupes fondamentaux, $\mathrm{im}(f_\sharp) \subset n\mathbb{Z} = \pi_\sharp(\mathbb{C})$, où π est le revêtement $z \mapsto z^n$ de $\mathbb{C}^*$ sur lui-même. En effet, tout lacet dans $X \setminus f^{-1}(\{0, \infty\})$ est homotope à un produit de lacets locaux en les points de $f^{-1}(\{0, \infty\})$, et l'hypothèse dit que ces lacets ont une image multiple de n. Donc on peut trouver $g : X \to \mathbb{C}^*$ continue telle que $\pi \circ g = f$ soit $g^n = f$, et g est clairement holomorphe, et s'étend holomorphiquement aux points de $f^{-1}(\{0, \infty\})$.

En résumé, nous avons montré la

Proposition. *Si X est une surface de Riemann compacte de genre un, il existe une fonction $f \in \mathcal{M}(X)$ de degré 2, ramifiée simplement au-dessus de quatre points distincts a, b, c, d. De plus :*

(i) Si $d = \infty$, il existe $g \in \mathcal{M}(X)$ telle que $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ et $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)$.

(ii) Si $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$, il existe $g \in \mathcal{M}(X)$ telle que $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ et $g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)(f-d)$.

Compléments

(i) Si $d = \infty$ donc $\{a, , b, c\} \subset \mathbb{C}$, soit $P(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)$. La courbe X_P, $P(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)$ est lisse, et l'application $(f, g) : X \setminus (f^{-1}(\{\infty\} \cup g^{-1}(\{\infty\})$ se prolonge en un isomorphisme de X sur X_P.

(ii) Si $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$, soit $P(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. La courbe X_P, a pour seule singularité l'unique point à l'infini, qui a deux branches lisses ayant un contact d'ordre deux [en anglais tacnode], et l'application $(f, g) : X \setminus (f^{-1}(\{\infty\} \cup g^{-1}(\{\infty\})$ se prolonge en une application holomorphe $X \to X_P$ qui est isomorphe à la désingularisation de X_P.

Démonstration. En utilisant l'équivalence entre surfaces de Riemann compactes et courbes algébriques projectives (section 5.11), il suffit de montrer les énoncés sur les singularités.

(i) Nous avons déjà vu que X_P est lisse.

(ii) Par un argument déjà vu, X_P est lisse dans $\mathbb{C}^2$. En effet, puisque $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ est à racines distinctes, $p(x)$ et $p'(x)$ ne s'annulent pas simultanément, donc

$$(P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}) = (y^2 - p(x), -p'(x), 2y)$$

ne prend jamais la valeur $(0,0,0)$. Reste à étudier ce qui se passe à l'infini. Il y a une seule direction asymptotique, qui est verticale, donc il suffit de regarder ce qui se passe dans la carte U_2. On a

$$P_2(v,w) = w^4 P(\frac{v}{w}, \frac{1}{w}) = w^2 - (v-aw)(v-bw)(v-cw)(v-dw)$$

Près de $(0,0)$, $(P_2(v,w) = 0)$ a deux branches lisses de la forme $w = \pm v^2 + O(v^3)$. Ceci est un cas particulier de la théorie de Newton-Puiseux, donnons-en une preuve dans ce cas. On écrit $w = (1+t)v^2$, alors $P(v,(1+t)v^2) = v^4(2t + O(v))$. Par théorème des fonctions implicites analytique, $2t + O(v) = 2(t - f(v))(1 + O(v,t))$ avec $f \in v\mathbb{C}\{v\}$, ce qui donne une première branche lisse $t = f(v)$ soit $\frac{w}{v^2} - 1 = f(v)$, $w = v^2(1+f(v))$.

Et de même, on a $P(v,(-1+t)v^2) = 2v^4(t-g(v))(1+O(v,t))$ d'où une deuxième branche $w = v^2(-1+g(v))$, lisse et ayant un contact d'ordre deux avec la première . Ces deux branches sont distinctes, donc $P_2(v,w)$ est divisible dans $\mathbb{C}\{v,w\}$ par

$$(w - v^2(1+f(v))(w + v^2(1-g(v)) = w^2 - v^4 + O(v^5),$$

donc le quotient est une unité, il n'y a pas d'autre branche,cqfd.

7.2 Surfaces de genre un et cubiques lisses, forme de Weierstrass

Nous avons vu que toute surface de genre un se représente comme une cubique lisse. Réciproquement :

Proposition. *Toute cubique lisse $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est de genre un.*

Démonstration. L'argument de la formule du genre montre que la forme $\omega = \frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}}$ est holomorphe et non singulière. Donc $\deg(K_{X_P}) = 0$, donc X_P est de genre un. Donc il existe $f, g \in \mathcal{M}(X)$ telles que $\deg(f) = 2$ et (f,g) donne un isomorphisme de X_P sur $X_{y^2-(x-a)(x-b)(x-c)}$ avec $a,b,c \in \mathbb{C}$ distincts.

Théorème (forme de Weierstrass d'une cubique lisse). *Soit $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une cubique projective lisse. Quitte à changer de coordonnées projectives, c'est-à-dire modulo l'action de* $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ *sur* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$*, on a $P = y^2 - (x^3 + px + q)$ avec $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. On dit alors que X est* sous forme de Weierstrass.

Variante : on peut obtenir $P = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{C}$ distincts.

Démonstration. Montrons que toute courbe lisse $X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 3$ a un *point d'inflexion*, c'est-à-dire un point lisse p_0 tel que le contact entre la cubique et la droite projective tangente est a moins 3.

Lemme. *Soit $X = X_P$ une courbe algébrique lisse dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, de degré $d \geq 2$. On note $H(x_0, x_1 x_2) = \det(D^2\widetilde{P}(x_0,x_1,x_2))$, déterminant hessien. Alors $p = [x_0 : x_1 : x_2] \in X$ est un point d'inflexion si et seulement si $H(x_0,x_1,x_2) = 0$. Autrement dit, les points d'inflexion de X_P sont $X_P \cap X_H$.*

Preuve du lemme. La propriété est projectivement invariante, donc on peut supposer $p = [1:0:0]$ et que la tangente est $X_2 - X_0 = 0$ (soit $(x,y) = (0,0)$ et $y = 0$ en coordonnées non homogènes). Alors, à un facteur constant non nul près on a

$$P = Y + aX^2 + bXY + cY^2 + \cdots,$$

et le point $(0,0)$ est d'inflexion si et seulement si $a = 0$. On a alors

$$\widetilde{P} = X_0^{d-1}X_2 + aX_0^{d-2}X_1^2 + bX_0^{d-2}X_1X_2 + cX_0^{d-2}X_2^2 + \cdots,$$

d'où

$$D^2\widetilde{P}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d-1 \\ 0 & 2a & b \\ d-1 & b & 2c \end{pmatrix}.$$

Comme $d \geq 2$, le déterminant est nul si et seulement si $a = 0$, cqfd.

Fin de la preuve. Puisque H est un polynôme homogène de degré $3(d-2) \geq 1$, la forme faible du théorème de Bézout dit que $X_P \cap X_H$ est non vide.

Soit p_0 un point d'inflexion, on peut supposer que $p_0 = [0 : 0 : 1]$ (direction asymptotique verticale) et que la tangente est la droite à l'infini. Dans la carte sur U_2 donnée par $(v, w) = (\frac{1}{y}, \frac{x}{y})$, on a $p_0 = (0, 0)$, la tangente est $v = 0$, et le fait qu'il y a un point d'inflexion se traduit par le fait que la composante de degré 2 de P_2 est divisible par v et celle de degré 3 contient w^3 avec un coefficient non nul, qu'on peut imposer égal à -1. On a donc [avec des notations traditionnelles pour les coefficients, qui seront plus naturelles en coordonnées (x, y)] :

$$P_2(v, w) = (v + a_1vw + a_3v^2) - (w^3 + a_2vw^2 + a_4v^2w + a_6v^3),$$

soit en revenant aux coordonnées (x, y) :

$$P(x, y) = (y^2 + a_1xy + a_3y) - (x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6).$$

Remplaçant y par $y + \frac{a_1}{2}x + \frac{a_3}{2}$, on peut supposer $a_1 = a_3 = 0$. Puis remplaçant x par $x + \frac{a_2}{3}$, on peut supposer $a_2 = 0$. Posant $p = a_4, q = a_6$ on obtient la forme cherchée. La lissité de X_P dit que les racines a, b, c de $x^3 + px + q$ sont distinctes, donc le discriminant $4p^3 + 27q^2$ est non nul.

Remarque. Cette forme normale de Weierstrass est valable pour toute cubique lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2, 3$, avec la même preuve.

7.3 Isomorphisme sur un tore

Soit X une surface de Riemann de genre un. Par définition, $\Omega^1_X = \mathbb{C}\omega$ avec ω différentielle holomorphe non nulle. De plus, $\deg(\omega) = 0$ donc ω est non singulière. Ce dernier fait se retrouve dans la représentation de X par une cubique X_p, puisque l'on a vu que $\frac{dx}{\frac{\partial P}{\partial y}}$ est une différentielle holomorphe non singulière. En particulier, si $P = y^2 - (x - a)(x - b)(x - c)$, on peut prendre

$$\omega = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)}}.$$

Définitions. Une *période* de ω est un nombre complexe de la forme $\lambda = \int_\gamma \omega$, où γ est un lacet C^1 par morceaux sur X (ou C^∞). L'ensemble des périodes est noté Λ_ω, c'est un sous-groupe de $\mathbb{C}$, bien défini par X à multiplication par un scalaire près.

Théorème. *L'ensemble des périodes Λ_ω est un* réseau, *c'est-à-dire $\Lambda_\omega = \lambda_1\mathbb{Z} \oplus \lambda_2\mathbb{Z}$ avec $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De plus, si $p_0 \in X$ est fixé, l'application d'intégration*

$$p \in X \mapsto [I]_{p_0}(p) = \Big[\int_{p_0}^{p} \omega \Big] \in \mathbb{C}/\Lambda_\omega$$

est un biholomorphisme.

Démonstration. Soit v le champ de vecteurs sur X tel que $\omega(v) = 1$. Puisque ω est non singulière, il est bien défini et holomorphe, et il en est de même de zv pour tout $z \in \mathbb{C}$. Puisque X est compacte, l'équation différentielle $\dot\gamma = zv(\gamma)$ a un flot $(\varphi^t_z)_{t\in\mathbb{R}}$ bien défini, de plus $(p, z) \mapsto \varphi^t_z$ est holomorphe pour tout t.

Pour $p_0 \in X$, on pose $\psi_{p_0}(z) = \varphi^1_z(p_0)$, c'est une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans X. Par construction, $\psi^*_{p_0}\omega - dz$ s'annule sur le champ de vecteurs radial, donc comme c'est une forme de type $(1, 0)$ elle est nulle, soit $\psi^*_{p_0}\omega = dz$.

Soient $z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$ tels que $\psi_{p_0}(z_1) = \psi_{p_0}(z_2)$. Considérons les chemins $c_i(t) = \psi_{p_0}(z_i + tw)$, $i = 1, 2$. Puisque $\psi^*_{p_0}\omega = dz$, ils vérifient tous deux l'équation différentielle régulière $\omega(\dot c_i) = w$. Comme $c_1(0) = c_2(0)$, ceci implique $c_1 = c_2$ donc $\psi_{p_0}(z_1 + w) = \psi_{p_0}(z_2 + w)$. Donc $\Lambda := \psi^{-1}_{p_0}(\{p_0\})$ est l'ensemble des périodes de ψ_{p_0}, c'est donc un sous-groupe de $\mathbb{C}$, discret puisque ψ_{p_0} n'est pas constante. De plus, ψ_{p_0} passe au quotient pour donner une application holomorphe injective $\psi : \mathbb{C}/\Lambda \to X$.

Si p_1 est un autre point de X, définissons de même $\psi_{p_1} : \mathbb{C} \to X$. Le même argument que ci-dessus montre que si $\psi_{p_0}(z) = \psi_{p_1}(z_1)$, alors $\psi_{p_0}(z + w) = \psi_{z_1}(z_1 + w)$ pour tout w. Donc les images $\psi_z(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$, sont disjointes ou confondues. Comme elles ont ouvertes et que X est connexe, elles sont confondues, donc

ψ_{x_0} est surjective. Donc ψ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C}/\Lambda$ sur X. Comme X est compacte, Λ est un réseau.

Enfin, puisque $\psi^*\omega = dz$, on a $\Lambda_\omega = \Lambda$ et $\psi \circ [I]_{p_0}([z]) = [z]$, cqfd.

7.4 Courbes elliptiques, loi de groupe

Définition. Une *courbe elliptique* (sur $\mathbb{C}$) est une surface de Riemann compacte X de genre un munie d'un point p_0.

Nous avons vu qu'un tel objet était naturellement muni d'une structure de groupe, nous allons en donner une autre description.

Loi de groupe. Si $p, q \in X$, le diviseur $p + q - p_0$ est de degré 1, donc $\ell(p + q - p_0) = 1$ c'est-à-dire qu'il existe une fonction méromorphe, unique à un facteur près, telle que $\operatorname{div}(f) + p + q - p_0 \geq 0$, soit

$$\operatorname{div}(f) + p + q - p_0 = r \in X.$$

On note $r = p \oplus q$, ce qui définit une loi commutative sur X, avec p_0 pour élément neutre. Autrement dit, $p \oplus q$ est caractérisé par la propriété

$$p \oplus q \sim p + q - p_0$$

pour la relation d'équivalence linéaire, c'est-à-dire modulo $\operatorname{Divprinc}(X)$.

Rappelons que nous avons noté $\operatorname{Pic}(X)$ le groupe $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Divprinc}(X)$. Notons $\mathrm{J}(X)$ son sous-groupe $\operatorname{Div}_0(X)/\operatorname{Divprinc}(X)$, appelé *jacobienne* de X (cette définition est valable pour une courbe de genre quelconque, on obtient alors un tore $\mathbb{C}^g/\Lambda$). On a une application naturelle

$$\varphi : p \in X \mapsto [p - p_0] \in \mathrm{J}(X),$$

qui est bijective. En effet, si $[p - p_0] = [q - p_0]$, on a $[p - q] = 0$, donc $q = q$, puisque sinon il existerait une fonction méromorphe ayant uniquement un pôle simple. Donc φ est injective. Et φ est surjective, puisque si D est un diviseur de degré 0, $p_0 + D$ est de degré 1 donc il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $\operatorname{div}(f) + p_0 + D \geq 0$, soit $\operatorname{div}(f) + p_0 + D = p \in X$, soit $[p - p_0] = D$. Par construction, on a

$$\varphi(p \oplus q) = [(p \oplus q) - p_0] = [p - p_0 + q - q_0] = \varphi(p) + \varphi(q).$$

Donc $(X, \oplus)$ est un groupe et φ est un isomorphisme de groupes.

Théorème (Abel-Jacobi). *Soit ω une différentielle holomorphe non nulle sur X. Le biholomorphisme d'intégration $[I]_{p_0} : X \to \mathbb{C}/\Lambda_\omega$ est un isomorphisme des groupes $(X, \oplus)$ et $\mathbb{C}/\Lambda, +)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que c'est un homomorphisme. Soient $p, q, r \in X$, il s'agit de montrer que si $p + q \sim r + p_0$, alors $[I]_{p_0}(p) + [I]_{p_0}(q) = [I]_{p_0}(r)$. Cela revient à montrer que si f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et Λ-périodique, avec $f^{-1}(\{0\}) = \{p, q\} + \Lambda$ (zéros simples), $f^{-1}(\{\infty\}) = \{p_0, r\} + \Lambda$ (pôles simples), alors $p + q - p_0 - r \in \Lambda$.

On peut supposer que p, q, r, p_0 sont dans l'intérieur d'un parallélogramme fondamental $D = \operatorname{conv}(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$. Par le théorème des résidus,

$$p + q - r - p_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \frac{df}{f} = -\lambda_2 \int_0^{\lambda_1} \frac{df}{2\pi i f} + \lambda_1 \int_0^{\lambda_2} \frac{df}{2\pi i f}.$$

Les deux intégrales sont entières puisque f est Λ-périodique, cqfd.

7.5 Degré local d'intersection, diviseur hyperplan

Degré local d'intersection de deux courbes planes lisses. Soient X et Y deux courbes projectives planes lisses distinctes. Fixons $p \in X \cap Y$. Soit $f = 0$ une équation locale de X, alors $f|Y$ est une fonction holomorphe définie près de p, non nulle (puisque $X \neq Y$) et qui s'annule en p. Le degré $\deg_p(f) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend pas de f, on l'appelle *degré local d'intersection de X et de Y en p* et on le note $(X \cap Y)_p$ ou $(X.Y)_p$. On voit aisément que que si $g = 0$ est une équation locale de Y en p, on a $\deg_p(g|X) = \deg_p(f|Y)$, donc $(Y.X)_p = (X.Y)_p$. On pose $(X.Y)_p = 0$ si $p \notin X \cap Y$.

Les points d'intersection de X et de Y sont isolés, donc $X \cap Y$ est fini. Le théorème de Bézout (cas particulier) dit que $\sum_{p \in X \cap Y} (X.Y)_p = \deg X \deg Y$. Montrons-ceci dans le cas où Y est une droite L, soit $\sum_{p \in X \cap L} (X.L)_p = \deg X$. On peut supposer que $L = \{y = 0\}$ et que $X \cap L \subset \mathbb{C}^2$. Si $X = X_P$, l'hypthèse $X \cap L \subset \mathbb{C}^2$ veut dire que $P(x,0)$ est de degré $\deg P = \deg X$ et que $X \cap L = \{(x,0) \mid P(x,0) = 0\}$. Si $p = (x_0, 0)$ où x_0 est un zéro de $P(.,0)$ de degré $d_x = k$, on a

$$P(x,y) = P(x,y) - P(x,0) - (P(x,0) - P(x_0,0)) = y\big(\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,0) + o(1)\big) + a(x-x_0)^k \ , \ a \neq 0.$$

Si $\frac{\partial P}{\partial y}(x-0,0) \neq 0$, Y a une équation locale $y = a(x-x_0)^k(1+o(1))$, donc $(Y.L)_p = k$. Sinon, $k = 1$ puisque la courbe est lisse, donc Y a une équation locale $x - x_0 = f(y)$. Dans les coordonnées $(x-x_0)+ay = z, y)$, cette équation devient $z = f(y)+ay$. Si $a \neq -f'(0)$, ceci s'écrit $y = g(z)$ avec $g'(0) \neq 0$. Ceci permet de la comparer avec $y = 0$, donc $(X.L)_p = 1 = k$. Donc finalement $\sum_{p \in X \cap L}(X.Y) - P = \sum_{P(x,0)=0} d_x = \deg P = \deg X$.

Tangences, points d'inflexion. Si $p \in X \cap Y$, le degré d'intersectuon laocal $(X.Y)_p$ est ≥ 2 si et seulement si X et Y sont tangentes en p. Si Y est la droite projective tangente à x en p, on dit que x est un *point d'inflexion* si $(X.Y)_p \geq 3$.

Diviseur hyperplan. Soit $X = X_P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe lisse de degré $d \geq 2$. Si $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une droite, on définit le diviseur

$$X.L = \sum_{p \in X \cap L} (X.L)_p p \in \mathrm{Div}(X).$$

Ceci est bien défini puisque $X \neq L$ d'après l'hypothèse $\deg X \geq 2$.

Si L est une droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, notons $\varphi_L = ax + by + c$ une équation de L avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, bien définie à un multiple près. Par convention, pour la droite à l'infini $\mathbb{P}^1_\infty$ on pose $\varphi_L = 1$. La restriction $f_L = \varphi_L | X$ est une fonction méromorphe sur X.

Proposition

(i) On a $\mathrm{div}(f_L) = X.L - X.\mathbb{P}^1_\infty$.

(ii) Tous les diviseurs $X.L$ sont linéairement équivalents, c'est-à-dire que deux d'entre eux diffèrent d'un diviseur principal. Plus précisément, si L et L' sont deux droites on a

$$X.L - X.L' = \mathrm{div}\big(\frac{f_L}{f_{L'}}\big).$$

On note H la classe d:'equivalence de ce diviseur, qu'on appelle diviseur hyperplan.

(iii) On représente H par $X.\mathbb{P}^1_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $E_n = \mathbb{C}_{\leq n}[x_P, y_P] \subset \mathbb{C}(x_P, y_P) = \mathcal{M}(x_P, y_P)$. Alors $E_n \subset \mathcal{L}_X(nH)$ si $n \in \mathbb{N}$.

(iv) En fait, on a $\mathcal{L}_X(nH) = E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. (i) Si $L = \mathbb{P}^1_\infty$, c'est clair, donc on peut supposer $L \neq \mathbb{P}^1_\infty$, disons $L = \{x = 0\}$ soit $f_L = x$. Il suffit de montrer que si $p \in X$, on a $\deg_p(f_L) = (X.L)_p - (X.\mathbb{P}^1_\infty)_p$. Ceci résulte du fait que dans chacune des trois cartes standard, L et $\mathbb{P}^1_\infty$ ont des équations $f = 0$ et $g = 0$ avec $f = xg = \varphi_L g$:

1) Dans U_0, $f = x$ et $g = 1$.

2) Dans U_1, $f = 1$ et $g = t = \frac{1}{x}$.

3) Dans U_2, $f = v = \frac{x}{y}$ et $g = w = \frac{1}{y}$.

(ii) Si L et L' sont deux droites, on a $X.L - X.L' = \mathrm{div}\big(\frac{f_L}{f_{L'}}\big)$ d'après (i), donc $[X.L] = [X.L']$.

(iii) Puisque $E_n = (E_1)^n$, il suffit de le montrer pour $n = 1$. Or E_1 est engendré par es f_L, et l'on a $H + \mathrm{div}(f_L) = X.L \geq 0$ d'après (i), donc $f_L \in \mathcal{L}_X(nH)$.

(iv) Nous admettrons ce résultat en général, nous contentant de le prouver pour $n \geq d-2$, donc en particulier pour $d = 3$, $n = 1$. On a alors

$$\deg(nH) - (2g-1) = nd - (d(d-3)+1) \geq 0,$$

donc

$$\ell(nH) = \deg(nH) + 1 - g = nd + 1 - \frac{d^2 - 3d + 2}{2} = \frac{2nd - d^2 + 3d}{2}.$$

Par ailleurs, on a $E_n \approx \mathbb{C}_{\leq n}[x,y]/P\mathbb{C}_{\leq n-d}[x,y]$, donc pour $n \geq d-2$ on a

$$\dim E_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-d+1)(n-d+2)}{2} = \frac{2nd-d^2+3d}{2},$$

d'où le résultat.

7.6 Loi de groupe sur une cubique lisse

Soit $X = P \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une cubique projective lisse. On fixe un point $p_0 \in X$. Si p et q sont deux points de X, on définit $L_{p,q}$ la droite projective passant par p et q, $L_{p,p}$ étant la droite projective tangente en p. Il existe alors un unique point $s \in X$ tel que

$$X.L_{p,q} = p + q + s.$$

Autrement dit, s est le troisième point d'intersection de X et de L, en comptant les multiplicités. De même, il existe un unique point $r \in X$ tel que

$$X.L_{p_0,s} = p_0 + s + r.$$

On définit une loi de composition $\oplus$ sur X par $p \oplus q = r$. Puisque $X.L_{p,q}$ et $X.L_{p_0,s}$ sont linéairement équvalents, il vient $p+q+s \sim p_0+s+r$, donc $r \sim p+q-p_0$. Donc on retrouve la loi de groupe définie à la section 7.5. Noter que son élément neutre est p_0.

Remarque. On peut prouver «à la main» l'associativité de cette loi, mais ce n'est pas trivial, cf. par exemple [Kn] pp. 67-74.

Cas particulier. Le plus souvent, on prend pour p_0 un point d'inflexion. On a vu qu'il y en avait toujours un, et que la courbe avait alors la forme $y^2 = x^3 + px + q$ dans des coordonnées convenables, avec $p_0 = [0:0:1]$. Le fait que p_0 est un point d'inflexion se traduit par $X.L_{p_0,p_0} = 3p_0$. Si maintenant p est un point quelconque de X et que l'on note $n.p = \underbrace{p \oplus \cdots \oplus p}_{n \text{ fois}}$, on a $n(p-p_0) \sim (n.p) - p_0$, donc

$$n.p = 0 = p_0 \Leftrightarrow np \sim np_0.$$

Si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $np_0 = k(3p_0) = kH$. Donc $(n.p = 0)$ équivaut à l'existence de $f \in \mathcal{L}_X(nH)$ ayant un zéro d'ordre n en p, soit géométriquement une courbe (pas forcément lisse) de degré k ayant un contact d'ordre n avec X en p. En particulier, $(3.p = 0)$ équivaut à l'existence d'une droite ayant un contact d'ordre 3 avec X en p, c'est-à-dire que p est un point d'inflexion. On voit que les points d'inflexion correspondent aux points de 3-torsion de X, et puisque $X \approx \mathbb{C}/\Lambda$ ces points sont au nombre de 9 : donc toute cubique lisse a 9 points d'inflexion exactement. Il est de plus facile de voir que ces points sont alignés trois par trois.

7.7 Réalisation d'un tore complexe de dimension un comme cubique lisse

Tout tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$ de dimension un est de genre un puisque dz est une 1-forme holomorphe non singulière, donc se réalise comme cubique lisse. Nous en donnons une réalisation explicite.

Définition. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. La *fonction* $\mathfrak{P}_\Lambda = \mathfrak{P}$ *de Weierstrass* est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ définie par

$$\mathfrak{P}_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}.$$

Elle est bien définie et holomorphe car $\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = O(|\omega|^{-3})$ uniformément sur le complémentaire de tout ϵ-voisinage de Λ et que la série $S_a = \sum |\omega|^{-a}$ converge pour $a > 2$ comme l'intégrale de $|z|^{-a}$. Pour le voir, on peut remarquer que le nombre c_n de points de Λ de norme comprise entre n et $n+1$ est $\leq Cn$, d'où $S_a \leq C \sum n^{1-a}$. (En étant un peu plus précis on voit aussi que S_2 diverge). Il est clair que $\mathfrak{P}_\Lambda$ est périodique par rapport à Λ et a un pôle double en chaque point de Λ. Elle induit donc une fonction méromorphe que nous noterons y sur $\mathbb{C}/\Lambda$, avec un pôle double en $p_0 = [0]$.

La dérivée de $\mathfrak{P}_\Lambda$ s'obtient en dérivant chaque terme :

$$\mathfrak{P}'_\Lambda(z) = -\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{2}{(z+\omega)^3}.$$

Elle induit une fonction méromorphe x sur $\mathbb{C}/\Lambda$, avec un pôle triple en p_0. Notons $x = \mathfrak{P}$, $y = \mathfrak{P}'$, et cherchons une relation linéaire entre les fonctions $1, x, x^3, y^2$. Près de 0, on a

$$x = \mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + o(z^4)$$
$$y = \mathfrak{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + o(z^4).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3a}{z^2} + 3b + o(1). \\ y^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + o(1) \\ y^2 - 4x^3 &= -20\frac{a}{z^2} - 28b + o(1) \\ y^2 - 4x^3 + 20ax + 28b &= o(1). \end{aligned}$$

La relation cherchée est donc $y^2 = 4x^3 - 20ax - 28b$, reste à calculer a et b. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{\omega^2}\ (1 + (\frac{z}{\omega})^{-2} - 1) \\ &= \frac{1}{\omega^2}\ \left(-2\frac{z}{\omega} + 3(\frac{z}{\omega})^{-2} - 4(\frac{z}{\omega})^{-3} + 5(\frac{z}{\omega})^{-4} + o((\frac{z}{\omega})^{-4})\right) \\ &= -2\frac{z}{\omega^3} + 3\frac{z^2}{\omega^4} - 4\frac{z^3}{\omega^5} + 5\frac{z^4}{\omega^6} + o(\frac{z^4}{\omega^6}). \end{aligned}$$

En sommant sur ω les second et quatrième terme, il vient $a = 3G_2$, $b = 5G_3$ où

$$G_k = G_k(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}.$$

Finalement, on a l'équation de Weierstrass $y^2 = 4x^3 - 60G_2 x - 140G_3$, qu'on écrit traditionnellement sous la forme

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Ceci définit une cubique X_P dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, et $\varphi = (x, y)$ donne une application holomorphe de $\mathbb{C}/\Lambda$ dans X_P. En effet, près du pôle on a

$$[1 : x : y] = [1 : z^{-2} + o(z^{-2}) : 2z^{-3} + o(z^{-3})] = [z^3 : z + o(z) : 1 + o(1)]$$

qui s'étend bien holomorphiquement en envoyant 0 sur $p_0 = [1 : 0 : 0]$ le point à l'infini de X_P. Enfin, p_0 est un point lisse de X_P et il a une unique image réciproque, qui est un point régulier de φ. Donc φ est de degré un, ce qui prouve que X_P est lisse et que φ est biholomorphe.

7.8 Classification des surfaces de genre un

Théorème et définition. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre un. La réalisant sous la forme $X = X_{p,q} X_{y^2-(x^3+px+q}$, on définit l'*invariant modulaire

$$(*) \qquad j(X) = j(X_{p,q}) = 1728\frac{4p^3}{4p^3 + 27q^2} \in \mathbb{C}.$$

(i) Cet invariant ne dépend que de la classe de biholomorphisme de X, et donne une bijection des classes de biholomorphisme de surfaces de genre un sur $\mathbb{C}$.

(ii) Si X est réalisée sous la forme $\mathbb{C}/\Lambda$, on a

$$j(\mathbb{C}/\Lambda) = 1728\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

avec $g_2 = g_2(\Lambda) = 60G_2(\Lambda)$, $g_3 = g_3(\Lambda) = 140G_3(\Lambda)$.

(iii) Deux cubiques lisses qui sont biholomorphes sont projectivement équivalentes.

Démonstration. (i) et (iii) Si $X_{p,q}$ est biholomorphe à $X_{p',q'}$, il existe un biholomorphisme $\varphi : X_{p,q} \to X_{p',q'}$ un biholomorphisme tel que $\varphi([0:0:1]) = [0:0:1]$ puisque $X_{p,q}$ est homogène. Les fonctions méromorphes $x_{p,q}$ et $x_{p',q'} \circ \varphi : X_P \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont de degré 2 et ont un pôle double au point $p_0 = [1:0:0]$. Donc il existe $a \neq 0$ tel que $x_{p',q'} - ax_{p,q}$ a au plus un pôle simple en p_0, et est holomorphe ailleurs. Elle est forcément constante car sinon $X_{p,q}$ serait de genre 0, donc $x_{p',q'} = ax_{p,q} + b$. De même, $y_{p,q}$ et $y_{p',q'} \circ \varphi$ sont de degré 3 et ont un pôle triple en p_0, donc il existe $c \neq 0$, d et e tels que $y_{p',q'} = cy_{p,q} + dx_{p,q} + e$. Donc $X_{p',q'} = \Phi(X_{p,q})$ où φ est l'automorphisme projectif $\Phi(x,y) = (ax+b, cy+dx+e)$. Ceci prouve (iii).

Ensuite, le fait que X_P détermine P à un facteur près dit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$(cy+dx+e)^2 - ((ax+b)^3 + p'(ax+b) + q') = \alpha(y^2 - (x^3+px+q)).$$

Comparant les coefficients de y^2 et x^3, on a $\alpha = c^2 = a^3$. Les coefficients de xy et de y donnent $d = e = 0$, celui de x^2 donne $b = 0$. Enfin, les coefficients de x et de 1 donnent $p' = a^2 p, q' = a^3 q$, donc $j(X_{p',q'}) = j(X_{p,q})$.

Donc $j(X)$ ne dépend que de X. Il est clair qu'il prend toutes les valeurs dans $\mathbb{C}$. De plus, si $j(X_{p',q'}) = j(X_{p,q})$, on a $\frac{p'^3}{q'^2} = \frac{p^3}{q^2}$, donc il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $p' = a^2 p$, $q' = a^3 q$. Donc $X_{p,q}$ est biholomorphe à $X_{p',q'}$, ce qui achève la preuve de (i).

(ii) Dans la section précédente, on a vu que $\mathbb{C}/\Lambda$ est biholomorphe à $X_{y^2-(4x^3-g_2x-g_3}$, donc à $X_{p,q}$ avec $p = -\frac{g_2}{4}$, $q = -\frac{g_3}{4}$. On a alors

$$\frac{4p^3}{4p^3+27q^2} = \frac{-g_2^3}{-g_2^3+g_3^2} = \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2},$$

ce qui prouve (ii).

Remarque. Si $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$ avec $\tau \in \mathbb{H}$, alors en posant $q = \exp(2\pi i\tau) \in \Delta^*$, la propriété $j(\tau+1) = j(z)$ assure que $j(\tau)$ ne dépend que de q, donc est de la forme $j(\tau) = \widetilde{j}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n$. En fait, $\widetilde{j}$ a un pôle simple en 0, et le choix du coefficient 1728 assure que le résidu est 1 et que les a_n sont entiers (cf. [Se1], p.146 :

$$j(\exp(2\pi i\tau)) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$$