M1 Mathématiques Avancées, année 2010-2011

Partiel de Surfaces de Riemann

30 mars 2011, 8h-10h

L'usage des notes de cours, ainsi que des énoncés et notes de TD, est autorisé, à l'exclusion de tous autres documents. Les exercices sont indépendants.

1 (i) Montrer que les biholomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont simplement transitifs sur les triplets (z_1, z_2, z_3) de points distincts : si (z_1, z_2, z_3) et (z'_1, z'_2, z'_3) sont deux tels triplets, il existe un unique biholomorphisme φ tel que $\varphi(z_i) = z'_i$, $i = 1, 2, 3$.

(ii) Montrer que les biholomorphismes de Δ sont simplement transitifs sur les couples (z_1, z_2) tels que $f(z_1, z_2) := \left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|$ est fixé non nul : si (z_1, z_2) et (z'_1, z'_2) sont deux couples tels que $f(z_1, z_2) = f(z'_1, z'_2) \neq 0$, il existe un unique biholomorphisme φ tel que $\varphi(z_i) = z'_i$, $i = 1, 2$.

*Question subsidiaire : interpréter $f(z_1, z_2)$.

2 (i) Soit $f : \overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \geq 0\} \to \mathbb{R}$ continue, harmonique sur $\mathbb{H}$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Est-elle bornée sur $\mathbb{H}$?

(ii) On suppose de plus que f est bornée sur $\mathbb{H}$. Montrer que si $x + iy \in \mathbb{H}$ on a

$$f(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{y dt}{(x - t)^2 + y^2}.$$

Indication. Traiter d'abord le cas où $f(z)$ a une limite quand $|z| \to \infty$. Utiliser le biholomorphisme $z \mapsto \dfrac{z - i}{z + i}$ de $\mathbb{H}$ sur Δ et la formule de Poisson $g(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial\Delta} g(z) \frac{1 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2} \frac{d\zeta}{\zeta}$ **[et non** $\underline{g(\zeta)}$ **comme indiqué malencontreusement le jour du partiel]**, $z \in \Delta$, pour g continue sur $\overline{\Delta}$ et harmonique sur Δ.

3 On appelle *anneau rond* une partie de $\mathbb{C}$ de la forme $A_{r,R} = \Delta_R \setminus \overline{\Delta}_r$, $1 < r < R < \infty$, et *anneau* un ouvert $A \subset X$ d'une surface de Riemann homéomorphe à un anneau rond, ou ce qui revient au même à $\mathbb{C}^*$ ou à Δ^*.

(i) Montrer que tout anneau $A \subset X$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{H}/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Bihol}(\mathbb{H})$ agissant proprement et librement, et que ces deux cas sont exclusifs l'un de l'autre.

(ii) On suppose $A \approx \mathbb{H}/\Gamma$. On admettra que Γ est engendré par un élément. En déduire que $\mathbb{A}$ est biholomorphe à Δ^* ou à un anneau rond.

(iii) Si $A \subset \mathbb{C}$ est un anneau dont le complémentaire a au moins deux points, montrer qu'il n'est pas biholomorphe à $\mathbb{C}^*$. On pourra utiliser le petit théorème de Picard (vu en TD) : toute fonction entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ qui évite deux points est constante.

(iv) À quelle condition deux anneaux ronds $A_{r,R}$ et $A_{s,S}$ sont-ils biholomorphes ?

4 (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On définit $Y_n = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^n + y^n = 1\}$ [«courbe de Fermat»]. Montrer que Y_n est connexe, et est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann. Pour chaque point $(x, y) \in Y_n$, exhiber une uniformisante en ce point.

(ii) Identifier Y_1, Y_2.

(iii) On pose $Y_n(\varepsilon) = \{(x,y) \in Y_n \mid |x| > \varepsilon^{-1}\}$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $Y_n(\varepsilon)$ a n composantes connexes $C_1(\varepsilon), \cdots, C_n(\varepsilon)$, et que chacune est biholomorphe à $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_{\varepsilon^{-1}}}$ **[et non Δ_ε comme indiqué le jour du partiel]** via la projection $(x,y) \mapsto x^{-1}$. En déduire qu'il existe une surface de Riemann compacte X_n telle que $Y_n = X_n \setminus \{p_1, \cdots, p_n\}$, où les p_i sont distincts et la fonction ζ_i qui vaut $\frac{1}{x}$ sur $C_i(\varepsilon)$ et 0 en p_i est une uniformisante.

Si l'on préfère, on pourra considérer $\mathbb{C}^2$ comme contenu dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et poser $X_n = \overline{Y}_n$.

(iv) Identifier X_1, X_2.

(v) Montrer que $x : Y_n \to \mathbb{C}$ et $y : Y_n \to \mathbb{C}$ sont méromorphes sur X_n. Donner leurs pôles et leurs degrés.

(vi) Montrer que $\mathcal{M}(X_n) = \mathbb{C}(x,y)$. **En fait cette question est trop dure, la preuve est proche de celle donnée dans le cours pour le fait que toute fonction méromorphe est algébrique de degré borné sur $\mathbb{C}(f)$.**

On suppose maintenant $n \geq 3$.

(vii) Montrer que les formes $\omega_{i,j} = x^i y^j dx$, $0 \leq i \leq n-3$, $1-n \leq j \leq -2-i$, sont des différentielles holomorphes c'est-à-dire appartiennent à Ω^1_X. Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

(viii) Si $n = 3$, montrer que $\omega_{0,-2} = y^{-2}dx$ est non singulière.