TD 2 : Formes et différentielles

Exercice 1. Formes différentielles et $\mathbb{C}$-linéarité. On rappelle que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, dont $(dx = \mathrm{Ré}, dy = \mathrm{Im})$ et $(dz = dx + i dy, d\overline{z} = dx - i dy)$ sont deux bases.

1. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ lisse (U est un ouvert de $\mathbb{C}$) et $z \in \mathrm{U}$. Sa différentielle est une application $\mathbb{R}$-linéaire $d_z f : \mathrm{T}_z\mathrm{U} \simeq \mathbb{C} \to \mathrm{T}_{f(z)}\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$. La décomposer dans les deux bases évoquées dans le préambule.
2. Exprimer $dz \wedge d\overline{z}$ et $dx \wedge dy$ l'un en fonction de l'autre.
3. Que sont les 1-formes différentielles réelles, les 1-formes différentielles complexes, les 1-formes différentielles complexes de type $(1,0)$ et les différentielles holomorphes sur $\mathbb{C}$?
4. En considérant l'atlas standard à deux cartes, montrer que la seule différentielle holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ est la forme nulle.
5. Pour tout entier $k \geqslant 0$, construire une forme méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ n'ayant qu'un pôle, d'ordre k, ou démontrer que c'est impossible.

Exercice 2. Quelques propriétés des tores. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$. On note $\mathrm{X} = \mathbb{C}/\Lambda$ et $p : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$ la surjection canonique.

1. Rappeler ce que vaut Ω^1_{X}.
2. Montrer qu'il existe une application lisse $\varphi : \mathrm{TX} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout point $x \in \mathrm{X}$, la restriction $\varphi_{|\mathrm{T}_x\mathrm{X}}$ soit un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire entre $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ et $\mathbb{C}$. (C'est une des manières de dire que TX est *isomorphe au fibré trivial.*)
3. Cette propriété est-elle vraie pour $\mathrm{X} = \overline{\mathbb{C}}$? (On n'hésitera pas à utiliser des théorèmes célèbres, même si on n'en connaît pas la démonstration.)
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $d_x p : \mathrm{T}_x\mathbb{C} \to \mathrm{T}_{p(x)}\mathrm{X}$ est un isomorphisme.
5. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$ holomorphe. Montrer qu'il existe $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f = p \circ \widetilde{f}$.

Exercice 3. Modules des tores. Soit Γ et Λ deux réseaux. On suppose que les tores quotients $\mathbb{C}/\Gamma$ et $\mathbb{C}/\Lambda$ sont biholomorphes. Étant donné un point $z \in \mathbb{C}$, on note $[z]_\Gamma$ sa classe dans $\mathbb{C}/\Gamma$ et $[z]_\Lambda$ sa classe dans $\mathbb{C}/\Lambda$.

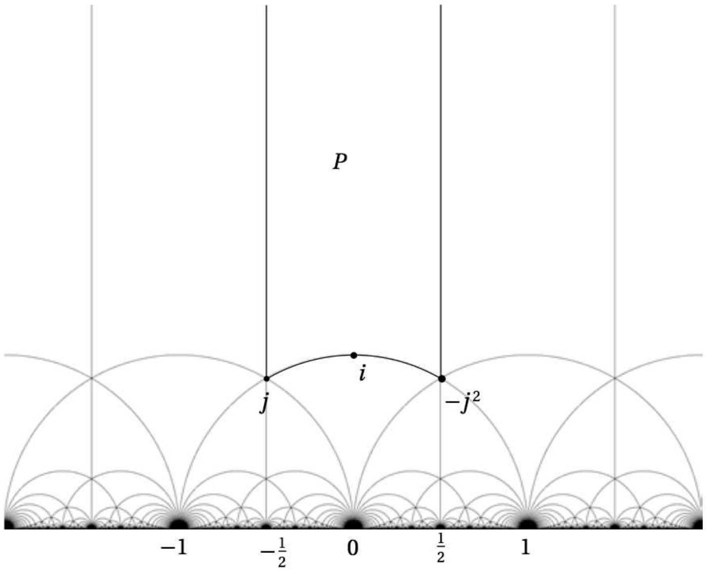
1. Montrer qu'il existe un biholomorphisme $f : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Lambda$ tel que $f([0]_\Gamma) = [0]_\Lambda$.
2. Montrer qu'il existe $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que le diagramme suivant commute (les flèches verticales sont les projections canoniques) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\ \mathbb{C}/\Gamma \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Lambda. \end{tikzcd}$$

3. Montrer qu'un tel $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est nécessairement un biholomorphisme tel que $\widetilde{f}(\Gamma) = \Lambda$.

4. En déduire que deux tores $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Gamma$ sont holomorphes si et seulement si les réseaux Λ et Γ sont images l'un de l'autre par une similitude directe.
5. Montrer que tout réseau est semblable à un réseau $\langle 1, \tau \rangle$ avec $\tau \in \mathbb{H}$ et que deux réseaux $\langle 1, \tau \rangle$ et $\langle 1, \tau' \rangle$ sont semblables si et seulement si

$$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) : \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$



Quelques domaines fondamentaux pour l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}^2$.
(Reproduit avec l'aimable autorisation d'H. P. de Saint-Gervais)

Exercice 4. Deux uniformisations explicites.

- (*Uniformisation de la bande*) Montrer que $z \mapsto \operatorname{th} z$ définit un biholomorphisme de la bande $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mathrm{Im}\, z| < \pi/4 \right\}$ sur $\mathbb{D}$.
- (*Fonction de Žukóvskij*) Montrer que $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ définit un biholomorphisme de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.