TD 4 : Un peu d'analyse

Exercice 1. Courbes rationnelles dans le tore. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $\mathbb{C}/\Lambda \to \overline{\mathbb{C}}$ non constante mais que toute fonction holomorphe $\overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}/\Lambda$ est constante.

Exercice 2. Formule de Poisson. Soit $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique sur $\mathbb{D}$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{D}, u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1-|a|^2}{|z-a|^2} u(z) dz.$$

Exercice 3. Partiel 2011.

1. Soit $f : \overline{\mathbb{H}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im} z \geqslant 0 \right\} \to \mathbb{R}$ continue, harmonique sur $\mathbb{H}$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Est-elle bornée sur $\mathbb{H}$?
2. On suppose de plus que f est bornée sur $\mathbb{H}$. Montrer que si $x + iy \in \mathbb{H}$, on a

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{y\,dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

   Indication. Traiter d'abord le cas où $f(z)$ a une limite quand $|z| \to \infty$. Utiliser le biholomorphisme $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$ et la formule de Poisson.

Exercice 4. Lemme de Weyl. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. On suppose que u est *harmonique au sens des distributions*, c'est-à-dire que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \iint u(x) \Delta \varphi(x) = 0,$$

où $\mathscr{D}(\Omega)$ désigne comme d'habitude l'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω. Le *lemme de Weyl* affirme qu'alors u est lisse et harmonique au sens usuel. Le but de cet exercice est de démontrer ce résultat.

1. Soit K un compact dans Ω et V un voisinage compact de K. Soit enfin $k, l \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que
$$\forall z \in \mathrm{K}, \left| \partial^{(k,l)} u(z) \right| \leqslant \mathrm{C} \|u\|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{V})}.$$
2. Déduire du résultat précédent que si une suite de fonctions harmoniques converge uniformément sur les compacts de Ω, sa limite est encore harmonique.
3. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que si une suite de fonctions harmoniques sur Ω est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$, elle admet une valeur d'adhérence harmonique pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

4. Soit $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ une fonction positive d'intégrale 1. On définit les approximations $(u_h)_{h>0}$ par la formule
$$u_h(z) = \frac{1}{h^2} \iint_{\mathbb{C}} \rho\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) u(\zeta) d\mathrm{Leb}(\zeta).$$
Montrer que les u_h sont lisses et harmoniques, et que u_h converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, lorsque $h \to 0$, vers u.
5. Conclure la preuve du lemme de Weyl.

Exercice 5. Polynômes et racines.

Si X est un espace topologique, on note $\mathrm{Sym}^n(\mathrm{X})$ son *produit symétrique*, c'est-à-dire le quotient de X^n par le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$, muni de la topologie quotient de la topologie produit. La classe de l'élément $(x_1, \ldots, x_n)$ sera notée $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (attention : des répétitions sont possibles).

On note $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$ et ${}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ le sous-espace affine des polynômes unitaires de degré n.

1. Montrer que l'application $\mathrm{L} : {}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ qui associe à un polynôme P la liste non ordonnée de ses racines est une bijection d'inverse continue.
2. Expliquer comment ${}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ peut-être vu comme une partie de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]) \simeq \mathbb{CP}^n$.
3. On définit
$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{C}}) & \to & \mathbb{P}(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]) \\ \{z_1, \ldots, z_p, \infty, \ldots, \infty\} & \mapsto & \left[\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - z_i)\right] \end{array}.$$
Montrer que σ est une bijection continue prolongeant $\mathrm{L}^{-1} : \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \to {}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.
Indication : vous pouvez essayer d'exprimer cette application en coordonnées homogènes en utilisant les *polynômes symétriques homogènes* :
$$\sigma_i^h((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)) = \sum_{\varphi \in \mathfrak{S}(n)} x_{\varphi(1)} \cdots x_{\varphi(i)} \cdot z_{\varphi(i+1)} \cdots z_{\varphi(n)}.$$
4. En déduire la continuité de l'application $\mathrm{L} : {}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ et les homéomorphismes $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{CP}^n$ et $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$.

Remarque. Il ne nous manque guère que les définitions de base de la géométrie complexe pour voir que ces homéomorphismes sont en fait des biholomorphismes.