TD 7 : Courbes affines et projectives

Exercice 1. Désingularisation du point double ordinaire. On considère pour $\varepsilon \in [0, +\infty[$ l'ensemble $V_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = \varepsilon \right\}$.

1. Démontrer que pour $\varepsilon > 0$, V_ε est une sous-variété complexe de dimension 1 de $\mathbb{C}^2$. À quoi est-elle biholomorphe ?
2. Démontrer que le module de $V_\varepsilon \cap B(0, 1)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0.
3. Montrer que l'équation $xy = \varepsilon$ définit dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe lisse, biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.
4. À quoi est homéomorphe l'adhérence de V_0 dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?

Exercice 2. Un exemple de courbe singulière. Déterminer les singularités (dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) de la courbe plane d'équation $y^2 = x^2(x + 1)$.

Exercice 3. Fonction à un point critique. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe propre telle que $\text{Crit}(f) = \{0\}$ et $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $|\lambda| = 1$ tels que $f(z) = \lambda z^k$.

Exercice 4. Courbes (hyper)elliptiques.

1. Soit $a_1, \dots, a_{2g+1}$ $2g + 1$ points différents de $\mathbb{C}$. Montrer que

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i) \right\}$$

est une courbe affine lisse. En donner des cartes explicites.

2. Montrer que l'application $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ qui associe à un couple $(x, y) \in S$ sa première coordonnée x est une application holomorphe. En déterminer le degré, les points critiques, leur valeur et leur degré.
3. Montrer que l'adhérence $\overline{S} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une courbe projective lisse. Donner des cartes explicites en les points à l'infini de $\overline{S}$ (c'est-à-dire les points de $\overline{S} \setminus S$).
4. Montrer que l'application $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge en une application holomorphe $f : \overline{S} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Les points à l'infini sont-ils des points critiques pour f ?
5. Démontrer qu'il existe un automorphisme involutif $\sigma : \overline{S} \rightarrow \overline{S}$ et que le quotient $\overline{S}/\langle \sigma \rangle$ hérite naturellement d'une structure de surface de Riemann.
6. Reprendre les questions de l'exercice avec $2g + 2$ points $a_1, \dots, a_{2g+2}$ et une courbe

$$S' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i) \right\}.$$

Exercice 5. Formule de Riemann-Hurwitz.

On admet que pour tout polyèdre homéomorphe à une surface compacte de genre g , les nombres s , a et f de sommets, d'arêtes et de faces sont liés par une relation

$$\chi = s - a + f = 2 - 2g.$$

L'entier noté χ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la surface.

1. Vérifier la formule admise pour les cinq polyèdres platoniciens et pour un polyèdre homéomorphe à un tore.
2. Montrer que s'il existe un revêtement fini $f : \tilde{F} \rightarrow F$ entre deux surfaces compactes, leurs genres sont liés par la formule suivante :

$$\chi(\tilde{F}) = \deg f \cdot \chi(F) \quad (\text{formule de multiplicativité de la caractéristique d'Euler-Poincaré}).$$

3. Soit $f : \tilde{F} \rightarrow F$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann compact. Montrer que, si $m_x(f)$ est le degré de f en $x \in \tilde{F}$, on a la formule suivante, dite *de Riemann-Hurwitz* :

$$\chi(\tilde{F}) = \deg f \cdot \chi(F) - \sum_{x \in \text{Crit} f} (m_x(f) - 1).$$

4. Déterminer le genre des courbes hyperelliptiques définies à la question précédente.