
TD 9 : Points de Weierstraß

Exercice 1. Lückensatz.

Soit X une surface de Riemann et $p \in X$ un point. Un entier $n \in \mathbb{N}$ est une *lacune* (en ce point) s'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{M}(X)$, holomorphe sur $X \setminus \{p\}$ et dont p soit un pôle d'ordre n .

1. Soit p un point quelconque d'une surface de Riemann de genre 0. Quelles sont les lacunes en ce point ?
2. Montrer que si $g \geq 1$, 1 est une lacune.
3. Soit p un point sur une surface de Riemann de genre g . Démontrer qu'il y a exactement g lacunes, comprises entre 1 et $2g - 1$.
4. Un point dont les g lacunes ne sont pas les g premiers entiers $1, 2, \dots, g$ est appelé un *point de Weierstraß*. Montrer que l'ensemble des points de Weierstraß est invariant sous l'action de $\text{Aut}(X)$ et que si $g = 1$, il est vide.

Exercice 2. Poids des points de Weierstraß.

1. On reprend les notations de l'exercice précédent et on note $n_1, \dots, n_g$ les g lacunes au point p . On appelle *poids* du point p la somme $w(p) = \sum (n_i - i)$, de telle sorte que les points de Weierstraß sont exactement les points de poids > 0 . Démontrer l'égalité

$$w(p) = \sum_{n=1}^{2g-2} \ell_n - \frac{g(g+1)}{2} + 1,$$

où l'on a noté $\ell_n = \ell(np)$.

2. Montrer l'inégalité $\forall n \leq 2g, \ell_n \leq 1 + \lfloor n/2 \rfloor$.
3. Un point p est dit *hyperelliptique* si 2 n'est pas une lacune. Montrer que dans ce cas, la suite des lacunes est donnée par $n_i = 2i - 1$ et que l'inégalité de la question précédente est une égalité.
4. Dédire de ce qui précède l'inégalité $w(p) \leq \frac{g(g-1)}{2}$ et que le cas d'égalité caractérise les points hyperelliptiques.

Exercice 3. Critère wronskien.

1. Soit $q \geq 1$. On appelle q -différentielle holomorphe une expression de la forme « $f(z)(dz)^q$ ». Plus précisément, une q -différentielle η est la donnée pour chaque carte z d'une fonction holomorphe f_z définie sur l'ouvert de carte telle que les changements de cartes soient de la forme $f_w = f_z(w) \left(\frac{dz}{dw} \right)^m (dw)^m$. Que sont les 1-différentielles ? Donner des exemples de q -différentielles pour $q \geq 2$. Les q -différentielles méromorphes sont définies de la même façon, *mutatis mutandis*.
2. Soit n_j une lacune en p . Montrer qu'il existe une différentielle holomorphe $\omega_j \in \Omega_X$ d'ordre exactement $n_j - 1$ en p .

3. Si z est une carte, on écrit les différentielles holomorphes de la question précédente sous la forme $\omega_j = f_j dz$ et on définit leur *wronskien* (par rapport à la carte z)

$$\mathcal{W}_z = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_g \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_g \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(g-1)} & f_2^{(g-1)} & \cdots & f_g^{(g-1)} \end{vmatrix}.$$

Démontrer que cela définit une q -différentielle holomorphe, pour une certaine valeur de q que l'on précisera.

4. Démontrer que l'ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une q -différentielle en un point est bien défini. Quel est le degré du diviseur correspondant

$$\text{div}(\eta) = \sum_p \text{ord}_p(\eta) p \in \text{Div}(X) ?$$

5. Démontrer que l'ordre d'annulation de la q -différentielle holomorphe $\mathcal{W}$ en tout point de X est égal au poids de ce point.
6. En déduire la formule

$$\sum_{p \in X} w(p) = (g-1)g(g+1).$$

7. En déduire que le nombre N de points de Weierstraß de X satisfait l'inégalité

$$2g+2 \leq N \leq g^3 - g$$

et que le cas d'égalité $N = 2g+2$ correspond au cas où tous les points de Weierstraß sont hyperelliptiques (c'est en fait équivalent au fait que X elle-même soit hyperelliptique).