UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Année 2008/2009

Master 2 de mathématiques — Théorie géométrique des groupes

Novembre 2008

Corrigé du contrôle continu du 4 novembre 2008

Exercice 1

Soit n un entier non nul. On considère la présentation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =< a \mid a^n = 1 >$.

On note $\mathcal{C}$ le 2-complexe de Cayley associé à cette présentation. On munit $\mathcal{C}$ d'une métrique compatible avec sa topologie.

1. (ne pas justifier la réponse) Décrire topologiquement les petites boules de $\mathcal{C}$. Précisément, pour tout point x de $\mathcal{C}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les boules centrées en x de rayon inférieur à ϵ sont homéomorphes à un espace qu'on décrira.

Si $x \in \mathcal{C}^1$, alors une petite boule autour de x est homéomorphe à la réunion de n demi-disques collés sur leurs diamètres. Si $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^1$, alors une petite boule autour de x est homéomorphe à un disque.

On note $p : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ le revêtement universel de $\mathcal{C}$.

2. Quel est le nombre de sommets, d'arêtes et de faces (2-cellules) de $\tilde{\mathcal{C}}$? (justifier la réponse)

On sait du cours que la fibre au-dessus d'un point est en bijection avec $\pi_1(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc $\tilde{\mathcal{C}}$ possède n sommets. Les centres des arêtes et des 2-cellules (images des centres de $[0,1]$ et de $\mathbb{D}^2$ par les applications de paramétrisation des cellules) se relèvent également en n points chacun. Cela montre que $\tilde{\mathcal{C}}$ possède n arêtes et n 2-cellules.

3. Déterminer $\tilde{\mathcal{C}}$.

On considère l'espace X formé de n copies du disque $\mathbb{D}^2$ collés le long de leurs frontières selon l'homéomorphisme trivial. On note S le cercle frontière commume des disques. On triangule S comme un lacet à n sommets et n arêtes, on pointe X par un de ces sommets noté x_0. On a ainsi muni X d'une structure de 2-complexe. Il existe un unique morphisme polyédral de X dans $\mathcal{C}$ envoyant les sommets de X sur le sommet de $\mathcal{C}$. Ce morphisme est clairement un revêtement, les petites boules de $\mathcal{C}$ pouvant être pris comme voisinages élémentaires. De plus X est simplement connexe. En effet, on 'sait du cours que $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe au "π_1 combinatoire" ("groupe d'arêtes", edge-groupe) $\pi(X, x_0)$, qui est le quotient du groupe infini cyclique engendré par le lacet combinatoire S par le sous-groupe normal engendré par les bords des disques de X. Comme S est homotope à zéro, on a que $\pi_1(X, x_0)$ est trivial. Par unicité, cela montre que X est le revêtement universel $\tilde{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Donner (avec justifications) un sous-groupe du groupe libre $F(a, b)$ de rang 2 qui est un groupe libre de rang infini. Donner une base de ce sous-groupe.

Il suffit de donner un revêtement d'un bouquet de deux cercles C_2 qui est homotopiquement équivalent à un bouquet d'une infinité de cercles. On peut par exemple prendre l'espace *topologique $X = \mathbb{R} \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ où S_n désigne une copie du cercle $\mathbb{S}^1$ collé à $\mathbb{R}$ par identification d'un point du bord à $n \in ZZ$. On identifie $\mathbb{R}$ et son image (injective) dans X, et on munit X d'une structure naturelle de 1-complexe de 0-squelette $\mathbb{Z}$. Il y a un revêtement naturel de X sur C_2 envoyant les points $n \in \mathbb{Z}$ sur le point base de C_2, les cercles S_n sur l'un des deux cercles et la droite $\mathbb{R}$ sur l'autre cercle. Un arbre maximal de X est $\mathbb{R}$ et le groupe fondamental de X est isomorphe au groupe libre $F(\mathbb{Z})$. Le sous-groupe de $F(a,b)$ correspondant est le sous-groupe engendré par $< b^n\, a\, b^{-n},\ n \in \mathbb{Z} >$, et comme le groupe fondamental de X s'injecte dans $F(a,b)$, l'ensemble $\{b^n\, a\, b^{-n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est bien une base du groupe libre $< b^n\, a\, b^{-n},\ n \in \mathbb{Z} >$.*

Remarque : On peut vérifier que le groupe de revêtement est transitif sur les fibres, ce qui revient à dire (théorème classique, voir la bibliographie) que le sous-groupe $< b^n\, a\, b^{-n},\ n \in \mathbb{Z} >$ est distingué dans $F(a,b)$. C'est le sous-groupe normal de $F(a,b)$ engendré par a.

Exercice 3

Soit $G =< X \mid R >$ une présentation d'un groupe G. On note $\mathcal{N}(R)$ le sous-groupe normal du groupe libre $F(X)$ engendré par R.

Pour tout $x \in \mathcal{N}(R)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $r_1, ..., r_k \in R \cup R^{-1}$ et $x_1, ..., x_k \in F(X)$ tels que $x = x_1 r_1 x_1^{-1} ... x_k r_k x_k^{-1}$. On dit qu'une telle écriture est minimale si k est minimal pour cette propriété. On appelle un tel entier k minimal l'*aire (combinatoire)* de x et on le note $A(x)$. Cette notion est relative à la présentation de G.

On admet le fait suivant qui précise l'existence des diagrammes : avec les notations ci-dessus, si x est un mot réduit et si $x = x_1 r_1 x_1^{-1} ... x_k r_k x_k^{-1}$, alors il existe un diagramme D représentant x dont les faces correspondent injectivement aux relations r_i, précisément tel qu'il existe une injection ϕ de l'ensemble des faces de D dans l'ensemble $\{1, ..., k\}$ de sorte que toute face w de D représente la relation $r_{\phi(w)}$.

On considère la présentation $\mathbb{Z}^2 =< a, b \mid [a,b] = 1 >$. On note $\mathcal{C}$ son 2-complexe de Cayley et $\tilde{\mathcal{C}}$ son revêtement universel. Le 2-complexe $\tilde{\mathcal{C}}$ a pour espace topologique sous-jacent le plan $\mathbb{R}^2$ pointé en $(0,0)$, pour 0-squelette l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ et pour 1-squelette $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$. On associe au générateur a les lignes horizontales et au générateur b les lignes verticales.

1. Dessiner un diagramme représentant le mot $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$ trivial dans $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $A(a^n b a^{-n} b^{-1}) \leq n$ et que $A(a^n b^n a^{-n} b^{-n}) \leq n^2$.

Un calcul évident (inspiré du diagramme) montre que :

$a^n b a^{-n} b^{-1} = a^{n-1}[a,b]a^{-n+1}.a^{n-2}[a,b]a^{-n+2}...[a,b]$,

d'où la première inégalité. Comme on a :

$a^n b^n a^{-n} b^{-n} = b^{n-1}(a^n b a^{-n} b^{-1})b^{-n+1}.b^{n-2}(a^n b a^{-n} b^{-1})b^{-n+2}...(a^n b a^{-n} b^{-1})$,

on obtient la seconde inégalité.

Remarque : on peut aussi invoquer le fait général suivant, conséquence du résultat admis dans l'énoncé : l'aire combinatoire est le nombre minimum de faces d'un diagramme représentant le mot trivial. La preuve de ce fait est assez claire sur le dessin mais un peu pénible à rédiger.

2. On considère un diagramme D représentant le mot $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$. Montrer que l'image de D dans $\tilde{\mathcal{C}}$ par le morphisme naturel de 2-complexes contient tous les points du carré $]0,n[\times]0,n[$.

Si l'image de D évite un point $x \in]0,n[\times]0,n[$, le lacet correspondant au mot $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$ est un lacet homotope à zéro dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$. Or on sait du cours, par projection radiale de $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ sur un cercle centré en x, que $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ a un groupe fondamental non trivial, infini cyclique. L'image du lacet carré $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$ dans $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x\})$ est un générateur de ce groupe. Contradiction.

3. En déduire que $A(a^n b^n a^{-n} b^{-n}) = n^2$.

D'après la question précédente, D doit contenir au moins n^2 faces donc d'après le fait admis, $A(a^n b^n a^{-n} b^{-n}) \geq n^2$.

Avec les notations précédentes, on considère la fonction $f_{<X \mid R>} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = \max_{x \in B(n)} A(x)$$

où $B(n)$ désigne la boule de rayon n de $F(X)$ (l'ensemble des mots réduits de longueur inférieure ou égale à n). On appelle cette fonction la *fonction de Dehn* de la présentation, elle quantifie la relation entre les longueurs des relations et leurs aires combinatoires (relations d'*isopérimétrie*).

La dernière question montre que pour tout entier n on a $f_{<a,b \mid [a,b]=1>}(4n) \geq n^2$.

4. Montrer que si la présentation $< X \mid R >$ est à petite simplification $C'(\frac{1}{6})$, alors pour tout entier $n > 0$ on a $f_{<X \mid R>}(n) \leq n$.

L'algorithme de Dehn fait passer d'un mot $w = apb$ de longueur n trivial dans G à un mot strictement plus court aqb trivial dans G, où $r = pq^{-1}$ est conjugué cyclique d'un élément de $R \cup R^{-1}$. Cette opération s'écrit $w = ara^{-1}.aqb$. Par récurrence, si aqb s'écrit comme produit d'au plus $n-1$ conjugués d'éléments de $R \cup R^{-1}$, alors w s'écrit comme produit d'au plus n conjugués d'éléments de $R \cup R^{-1}$.