Compléments : quasi-isométries

A. Généralités

Rappels

Soit X et Y deux espaces métriques. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note d les différentes distances.
On dit que $f : X \to Y$ est une *application lipschitzienne à grande échelle* s'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall x, x' \in X, d(f(x), f(x')) \leqslant C \cdot d(x, x') + C.$$

On note $\mathrm{LGÉ}(X, Y)$ l'ensemble des applications lipschitziennes à grande échelle entre X et Y.
Étant donné deux fonctions $f, g : X \to Y$, on note $f \approx g$ si les deux fonctions sont *à distance bornée*, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in X, d(f(x), g(x)) \leqslant C.$$

Deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ sont *quasi-inverses* si $f \circ g \approx \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \approx \mathrm{id}_X$.
Une application $f : X \to Y$ est un *plongement quasi-isométrique* s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x, x' \in X, \frac{1}{C} \cdot d(x, x') - C \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant C \cdot d(x, x') + C.$$

Une application $f : X \to Y$ est dite *presque surjective* si tout point de Y est à distance bornée de $f(X)$, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : d(f(x), y) \leqslant C.$$

1. Montrer que, pour $f \in \mathrm{LGÉ}(X, Y)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- f admet un quasi-inverse $g \in \mathrm{LGÉ}(Y, X)$;
- f est un plongement quasi-isométrique presque surjectif.

On dit dans ce cas que f est une *quasi-isométrie* et que X et Y sont *quasi-isométriques*.
Remarques.—
- La composition des fonctions préserve le caractère lipschitzien à grande échelle et est compatible avec la relation d'équivalence $\approx$.

– Cela permet de mettre un cadre catégorique à la *géométrie à grande échelle* : il existe une catégorie *Géom*$_{G\acute{E}}$ dont les objets sont les espaces métriques (ou, disons, une classe raisonnable d'espaces métriques) et les morphismes sont les classes d'équivalence pour la relation $\approx$ d'applications lipschitziennes à grande échelle. Les isomorphismes de cette catégorie sont ainsi les ($\approx$-classes de) quasi-isométries.
– Les plongements quasi-isométriques méritent leur nom : ils réalisent en effet une quasi-isométrie entre leur espace de départ et leur image (tout comme les plongements topologiques réalisent un homéomorphisme sur leur image).

2. Soit X, Y et Z trois espaces métriques tels qu'il existe des injections $X \overset{i_1}{\hookrightarrow} Y \overset{i_2}{\hookrightarrow} Z$ et que la composée $i_2 \circ i_1 : X \to Z$ est une quasi-isométrie. Montrer que Y est quasi-isométrique à Z (et donc aussi à X).

B. Sous-groupes d'indice finis

3. Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme entre groupes de type fini. Montrer que, pour des systèmes générateurs finis, φ induit une application lipschitzienne pour la métrique des mots.

4. Soit $N \triangleleft G$ d'indice fini. Montrer que, munis d'une métrique des mots, ces groupes sont quasi-isométriques.

5. Étendre ce résultat à tous les sous-groupes d'indice fini.

6. En déduire que les groupes libres $\mathbb{L}_n$ $(n \geqslant 2)$ sont deux-à-deux quasi-isométriques.

C. Une preuve géométrique

Commençons par un peu de terminologie sur les espaces métriques : si x et x' sont deux points d'un espace métrique X, on appelle *segment géodésique* entre x et x' toute isométrie $\gamma : [0, \delta] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(\delta) = x'$. Évidemment, cela implique $\delta = d(x, x')$. Un espace métrique est dit *géodésique* si entre deux quelconques de ses points il existe un segment géodésique. Par ailleurs, un espace métrique est *propre* si ses boules fermées sont compactes.
Enfin, on dit qu'un groupe Γ *agit proprement* sur un espace topologique X si, pour tout compact $C \subset X$, l'ensemble $\left\{\gamma \in \Gamma \,\middle|\, \gamma \cdot C \cap C \neq \varnothing\right\}$ est fini.

7. Donner des exemples d'espaces métriques propres et géodésiques, ni propres ni géodésiques, propres sans être géodésiques et *vice versa*. Donner des exemples d'actions propres et d'actions qui ne le sont pas.
Pour les deux questions suivantes, X est un espace métrique géodésique et propre et Γ est un groupe agissant sur X proprement et par isométries. On suppose en outre que l'action est *cocompacte*, c'est-à-dire que le quotient $\Gamma \backslash X$ est compact.

8. Justifier l'existence d'une boule $B = \overline{B}(x_0, R)$ de X dont les translatés $(\gamma \cdot B)_{\gamma \in \Gamma}$ recouvrent X. Montrer qu'alors l'ensemble fini $S = \left\{ \gamma \in \Gamma \,\middle|\, \gamma \cdot C \cap C \neq \varnothing \right\}$ engendre Γ.

9. Montrer que Γ, muni d'une métrique des mots, est isométrique à X.

10. En déduire le résultat de la question 5.

11. Montrer que si G est un groupe de type fini et que $N \triangleleft G$ est fini, alors G est quasi-isométrique au quotient G/N.