Sujet de l'examen du 13 Janvier 2009

On rappelle que la croissance d'un groupe finiment engendré est une classe d'équivalence (classe des fonctions comptant le nombre de points de la boule métrique de rayon n, $n \in \mathbf{Z}_+$ dans un graphe de Cayley).

(1) Montrer que la croissance d'un groupe libre non-abélien finiment engendré est exponentielle.

(2) Soit A et B deux groupes finiment engendrés non-triviaux. Déterminer la croissance du produit libre $A * B$.

(3) Déterminer la croissance du groupe $\mathbf{Z}^n$.

(4) On dit que deux groupes G_1 et G_2 sont commensurables lorsqu'il existe deux sous-groupes d'indice fini $H_1 \subset G_1$ et $H_2 \subset G_2$ qui sont isomorphes (les indices ne sont pas forcément les mêmes). Montrer que $\mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{Z}^m$ ne sont pas commensurables si $n \neq m$.

(5) On dit que deux groupes G_1 et G_2 sont virtuellement commensurables s'il existe une suite finie de groupes

$$G_1 \to A_1 \leftarrow A_2 \to A_3 \leftarrow A_4 \to \cdots A_k \leftarrow G_2$$

reliés par des homomorphismes ayant les noyaux finis et les images d'indice fini dans les groupes respectifs. Notez que les directions des flèches alternent.

(a) Montrer que $\mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{Z}^m$ ne sont pas virtuellement commensurables si $n \neq m$.

(b) Deux groupes finiment engendrés virtuellement commensurables et résiduellement finis sont commensurables.

(6) Montrer que la croissance du groupe de Grigorchuk n'est pas polynomiale.