Compléments : groupe libre et revêtements

Exercice 1.— Groupes libres

Étant donné une classe $\mathcal{C}$ de groupes, on dit qu'un groupe $G \in \mathcal{C}$ est un groupe $\mathcal{C}$-libre sur un ensemble $X \subset G$ si toute application de X vers un groupe $H \in \mathcal{C}$ se prolonge en un unique morphisme $G \to H$.

Existe-t-il des groupes $\mathcal{C}$-libres pour les classes suivantes de groupes :

(a) la classe $\mathcal{F}$ des groupes finis ;

(b) la classe $\mathcal{A}$ des groupes abéliens ;

(c) la classe $\mathcal{I}$ des groupes indiçables, c'est-à-dire admettant un morphisme surjectif vers $\mathbb{Z}$;

(d) la classe $\mathcal{B}_n$ des groupes d'exposant n, c'est-à-dire des G tels que

$$\forall g \in G, g^n = e?$$

Exercice 2.— Exemples de revêtements.

(a) Décrire le revêtement universel de l'union d'une sphère et d'un de ses diamètres.

(b) Décrire le revêtement universel de l'union d'une sphère et d'un cercle qui la coupe en deux points.

(c) Décrire à isomorphisme près tous les revêtements de degré 2 et 3 du bouquet de deux cercles. Décrire son revêtement universel.

(d) Démontrer que tout graphe fini 4-régulier (c'est-à-dire dont tous les sommets sont de degré 4) est homéomorphe à l'espace total d'un revêtement du bouquet de deux cercles.

Exercice 3.— Actions de groupes

Soit un groupe G agissant sur un espace topologique X. Décrire une condition topologique simple sur l'action impliquant que la projection $p : G \to X/G$ est un revêtement. Tous les revêtements sont-ils obtenus ainsi ?