Compléments : revêtements et structures cellulaires, simpliciales…

Exercice 1.— Exemples
Donner des décompositions cellulaire, polyédrale et simpliciale de S^n, T^2, RP^2.

Exercice 2.— Connexité et 1-squelette
Montrer qu'un espace X muni d'une décomposition cellulaire (resp. polyédrale, simpliciale) est connexe si et seulement si son 1-squelette $X^{(1)}$ l'est.

Exercice 3.— Groupe d'homotopie des sphères
Montrer que toute application $(S^k,x_0) \to (S^n,y_0)$ avec $k < n$ est homotope (relativement à x_0) à une application constante.

Exercice 4.— Classification galoisienne des revêtements
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. Soit X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. On appelle *isomorphisme pointé* entre les revêtements $p_1 : (\widetilde{X}_1,\widetilde{x}_1) \to (X,x_0)$ et $p_2 : (\widetilde{X}_2,\widetilde{x}_2) \to (X,x_0)$ un homéomorphisme $f : (\widetilde{X}_1,\widetilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2,\widetilde{x}_2)$ tel que $p_1 = p_2 \circ f$. Alors l'application $p \mapsto p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ réalise une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphie pointée de revêtements connexes $p : (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ et l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(X,x_0)$.
Si l'on omet les points-bases, cette correspondance met en bijection les classes d'isomorphie de revêtements et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X,x_0)$.
En outre, si l'on note $G(p)$ le groupe des automorphismes de revêtements de p et $H = p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \subset \pi_1(X,x_0)$, on a :

- Le revêtement p est normal si et seulement si $H \triangleleft G$;
- $G(p)$ est isomorphe au quotient $N(H)/H$ où $N(H)$ est le normalisateur de H dans $\pi_1(X,x_0)$.

Soit donc X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe et $x_0 \in X$.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts connexes par arcs $U \subset X$ tels que le morphisme induit par l'inclusion $\pi_1 U \to \pi_1 X$ est trivial forme une base de la topologie de X.

(b) On pose $\widetilde{X} = \left\{[\gamma] \,\middle|\, \gamma \text{ est un chemin dans } X \text{ partant de } x_0\right\}$, où $[\gamma]$ désigne la classe d'homotopie de γ à extrémités fixées. L'application $p : \widetilde{X} \to X$ envoyant γ sur $\gamma(1)$

est surjective. Pour un ensemble $U \in \mathcal{U}$ et un chemin γ allant de x_0 à un point de U, on pose

$$U_{[\gamma]} = \left\{ [\gamma\eta] \,\middle|\, \eta \text{ est un chemin dans } U \text{ commençant à } \gamma(1) \right\}.$$

Montrer que les $U_{[\gamma]}$ forment une base d'une topologie sur $\widetilde{X}$ rendant l'application p continue. On munira désormais $\widetilde{X}$ de cette topologie.

(c) Démontrer que $\widetilde{X}$ est simplement connexe.

(d) Démontrer que pour tout sous-groupe H de $\pi_1(X,x_0)$, il existe un revêtement $p_H : X_H \to X$ et un point $\widetilde{x}_0$ de la fibre de x_0 tels que $H = p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$.

(e) Achever la preuve du théorème.

(f) Pourquoi cette correspondance est-elle qualifiée de galoisienne?

Exercice 5.— Revêtement abélien maximal

Soit X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe. On dit qu'un revêtement connexe normal est *abélien* si le groupe des automorphismes du revêtement l'est. Montrer que X admet un revêtement $p : \widehat{X} \to X$ abélien revêtant tout autre revêtement abélien et que celui-ci est unique à isomorphisme près. Le décrire quand $X = S^1$, $X = S^1 \vee S^1$ et $X = S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Exercice 6.— Propriétés du groupe libre.

(a) Soit G un groupe. Montrer que les propriétés suivants sont équivalentes :
   - Pour tout $x \in G$ différent de l'élément neutre, il existe un sous-groupe d'indice fini H tel que $x \notin H$.
   - Pour tout $x \in G$ différent de l'élément neutre, il existe un sous-groupe distingué d'indice fini H tel que $x \notin H$.
   - Pour tout $x \in G$ différent de l'élément neutre, il existe un morphisme vers un groupe fini $\varphi : G \to K$ tel que $\varphi(x) \neq 1$.

   On dit alors que le groupe est *résiduellement fini.*

(b) Donner des exemples de groupes qui sont résiduellement finis et de groupes qui ne le sont pas.

(c) Soit $X = \bigvee^{n} S^1$ le bouquet de n cercles et $p : \widetilde{X} \to X$ un revêtement. Soit $Y \subset \widetilde{X}$ un sous-graphe connexe fini. Montrer que l'on peut construire un revêtement $p' : Z \to X$ où Z est un graphe fini contenant Y et ayant les mêmes sommets que lui de telle sorte que les restrictions $p_{|Y}$ et $p'_{|Y}$ coïncident.

(d) En déduire que les groupes libres L_n sont résiduellement finis.

(e) Montrer qu'un groupe résiduellement fini et de type fini est *hopfien*, c'est-à-dire que tout morphisme surjectif $G \to G$ est en fait un automorphisme. Peut-on étendre ce résultat aux groupes qui ne sont pas de type fini ?

(f) En déduire le théorème de Nielsen : Si $X \subset L_n$ est de cardinal n et engendre L_n, alors il l'engendre librement.

(g) Aviez-vous une preuve plus simple du fait que L_n n'est isomorphe à L_m que si $n = m$?