UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Année 2008/2009

Master 2 de mathématiques — Théorie géométrique des groupes

Septembre 2008

feuille de TD n^{o} 1

Groupes libres. Présentations.

Exercice 1
Quels sont les groupes libres abéliens ?

Exercice 2
Déterminer le centre d'un groupe libre.

Exercice 3 *Démonstrations de résultats du cours*
En utilisant la propriété universelle, montrer que :

1. X engendre tout groupe libre $F(X)$ sur X.

2. Tous les groupes libres sur X sont isomorphes.

Exercice 4
Soit X un ensemble, $F(X)$ le groupe libre de base X. Montrer que le sous-groupe engendré par toute partie $A \subset X$ est un groupe libre de base A.

Exercice 5
Montrer que $\mathbb{Z}^2 =< a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 >$.

Exercice 6

1. Montrer que le groupe diédral D_n (groupe de symétries du n-gone régulier) a pour présentation

$$< a, b \mid a^2 = 1,\ b^n = 1,\ aba^{-1} = b^{-1} >.$$

2. Montrer que le groupe de présentation

$$< a, b \mid a^2 = 1,\ aba^{-1} = b^{-1} >$$

est infini.

Exercice 7
Soit G un groupe engendré par une partie X.

1. Définir ce que peut être une "relation" vérifiée par les éléments de X dans G.

2. Soit R un ensemble de relations vérifées par X dans G. Montrer qu'il y a un unique morphisme du groupe libre $F(X)$ dans G envoyant les éléments de X dans $F(X)$ sur les éléments de X dans G correspondant.

Homotopie. Groupe fondamental.

Exercice 8

1. Montrer que tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ est contractile.

2. Montrer que "contractile" implique "simplement connexe".

3. Donner une équivalence d'homotopie entre $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Donner une équivalence d'homotopie entre tout espace topologique X et $X \times [0,1]$, puis entre X et $X \times Y$ pour Y un espace topologique contractile.

5. Définir le ruban de Moëbius et donner une équivalence d'homotopie entre le ruban de Moëbius et $\mathbb{S}^1$. Montrer que ces deux espaces ne sont pas homéomorphes.

Exercice 9 *Démonstrations de résultats du cours*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ des chemins d'un espace topologique X tels que α_1 et $\alpha 2$, resp. β_1 et β_2, sont homotopes relativement à leurs extrémités (communes donc), et $\alpha_i(1) = \beta_j(0)$, $i, j = 1, 2$.

1. Montrer que les chemins $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ sont homotopes relativement à leurs extrémités. Essayer de décrire l'homotopie à l'aide d'applications affines du carré $[0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ composées par les lacets α_i, β_j.

Soit α un lacet d'un espace topologique X.

2. Montrer que $\alpha\alpha^{-1}$ est homotopiquement trivial, c'est-à-dire homotope à un chemin constant. Essayer de décrire l'homotopie à l'aide d'applications affines du carré $[0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ composées par le lacet α.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ des chemins d'un espace topologique X tels que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_(0)$, $\beta_1(0) = \alpha_1(1)$, $\beta_1(1) = \alpha_2(1)$, $\beta_2(0) = \alpha_2(1)$ et $\beta_2(1) = \alpha_3(1)$.

3. Montrer que le lacet $((\alpha_1\beta_1)\alpha_2^{-1})((\alpha_2\beta_2)\alpha_3^{-1})$ est homotope au lacet $((\alpha_1\beta_1)\beta_2)\alpha_3$ relativement à leur origine commune. Essayer de décrire l'homotopie à l'aide d'applications affines du carré $[0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ composées par les lacets α_i, β_j.

Exercice 10

Soient X un espace topologique connexe par arc, et U, V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$, $U \cap V$ est connexe par arc et U, V sont simplement connexes.

Montrer que X est simplement connexe.

Indication : Prendre une origine x_0 dans $U \cap V$. Pour un lacet $\alpha : [0,1] \to X$, montrer qu'il existe $t_0 = 0 < ... < t_n = 1$ tels que pour tout $i = 0, ..., n-1$, on a $\alpha(]t_i, t_{i+1}[) \subset U$ ou $\alpha(]t_i, t_{i+1}[) \subset V$. À l'aide de chemins joignant x_0 aux $\alpha(t_i)$ et contenus dans U, V ou $U \cap V$, décomposer le lacet α en produit de lacets contenus dans U ou dans V. Conclure.

Exercice 11 *Démonstrations de résultats du cours*

On note $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On identifiera parfois $\mathbb{S}^1$ avec la partie de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

On considère la projection $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $t \mapsto e^{i2\pi t}$.

1. Montrer que p est un revêtement.

2. Montrer que tout revêtement est un homéomorphisme local.

3. Montrer le lemme de relèvement des chemins pour $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, puis pour tout revêtement $p : E \to X$. Si $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ est un chemin, chercher $0 = t_0 < ... < t_n = 1$

tels que tout intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ est envoyé dans un voisinage élémentaire de $\mathbb{S}^1$. Construire le relèvement de α par relèvement local sur chaque $]t_i, t_{i+1}[$ et recollement pour $i = 0$ à $i = n$.

4. Montrer l'unicité d'un relèvement. Prendre deux relèvements et on regardera jusqu'où les relèvements coïncident. Utiliser la connexité de $[0, 1]$.

5. Généraliser la preuve du relèvement des chemins au relèvement des homotopies. En quoi le relèvement des homotopies est une généralisation du relèvement des chemins ?

Exercice 12

Déterminer "le" revêtement universel des espaces suivants :

1. $\mathbb{S}^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

2. l'espace projectif $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

3. le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ qu'on identifiera à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ pour l'action par translation du réseau $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13

On considère le morphisme suggéré par la figure suivante :

1. Indiquer comment définir proprement les espaces E, X et la projection $p : E \to X$ puis comment vérifier que c'est un revêtement.

2. Montrer que le groupe de revêtement est trivial.

3. Déterminer l'action du groupe fondamental de la base, pour un point base donné, sur les fibres du revêtement. Cette action est-elle transitive ?

Exercice 14

On considère le sous-espace topologique X de $\mathbb{R}^2$ union des cercles de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n}$.

Montrer que X n'est pas semi-localement simplement connexe, et que X n'a pas de revêtement universel.

Exercice 15

Imaginer un revêtement de degré deux du ruban de Moëbius par un anneau.

Exercice 16

Soit $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces topologiques pointés. Montrer que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Exercice 17 *(détermination différentiable de l'angle et homotopie différentiable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)*

On note p la projection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$ définie par $t \mapsto e^{i2\pi t}$. On voit $\mathbb{S}^1$ comme une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^2$.

1. (relèvement différentiable des chemins) Soit α un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{S}^1$. Montrer qu'il existe un unique chemin $\tilde{\alpha}$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ qui relève α, c'est-à-dire tel que $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$.

Soit α un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. À l'aide du lemme de relèvement des chemin de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe des applications $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telles que $\alpha = \rho e^{i\theta}$.

On dit que θ est une *détermination continue* de l'angle pour α.

3. Écrire la forme différentielle $\frac{dz}{z}$ (en coordonnée complexe du plan) en coordonnées réelles (x, y).

4. Écrire la restriction de la forme $\frac{dz}{z}$ au chemin α dans la coordonnée locale t en fonction de θ et ρ. En déduire que pour tout lacet différentiable de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'intégrale de la forme $\frac{dz}{z}$ le long du lacet est un multiple entier de 2π.

Autre preuve : montrer que la forme $\frac{dz}{z}$ est invariante par application radiale de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (application qui préserve les rayons issus de $(0,0)$) et projeter un lacet fermé de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur un lacet de $\mathbb{S}^1$. Terminer par un calcul sur le cercle (calcul élémentaire de résidu).

5. Montrer que si F est une homotopie $\mathcal{C}^1$, relative aux extrémités communes, d'un lacet α de classe $\mathcal{C}^1$ à un lacet β de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ le long du lacet $F(., t)$ varie continuement en fonction de t.

6. En déduire qu'il n'y a pas d'homotopie de classe $\mathcal{C}^1$ du lacet $a : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ défini par $a(t) = (\cos(t), \sin(t))$ au lacet trivial en $(1,0)$.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Année 2008/2009

Master 2 de mathématiques — Théorie géométrique des groupes

Septembre 2008

feuille de TD n$^{\text{o}}$ 2

Complexes cellulaires

Exercice 1 *(rétract par déformation)*

1. Montrer que les deux complexes cellulaires suivants :

sont homotopiquement équivalents.

On dit qu'un sous-espace A d'un espace X est un *rétract par déformation* s'il existe une homotopie $F : X \times [0,1] \to X$ relative à A (c'est-à-dire $F(a,t) = a$ pour tout t) telle que $F(.,0) = \mathrm{id}$ et $F(x,1) \in A$ pour tout $x \in X$.

2. Montrer que si A est un rétract par déformation de X, alors A et X sont homotopiquement équivalents.

3. Montrer que les deux complexes cellulaires de la première question sont des rétracts par déformation d'un même espace.

Exercice 2 *Démonstrations de résultats du cours*

Soit $\mathcal{C}$ un complexe cellulaire.

1. Montrer que tout compact de $\mathcal{C}$ ne rencontre qu'un nombre fini de cellules.

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est localement contractile.

3. Montrer que la topologie de $\mathcal{C}$ est la topologie faible.

Exercice 3

Montrer que tout complexe polyédral fini possède une triangulation.

Exercice 4 *(exercice du cours)*

Appliquer la preuve du théorème d'approximation simpliciale pour donner une approximation simpliciale de l'application $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ suivante :

Revêtements

Exercice 5 *Démonstrations de résultats du cours [Greenberg-Harper, chapitre 5]*

Soit $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ un revêtement de groupe de revêtement G. Montrer que si E est simplement connexe localement connexe par arcs, alors G est (canoniquement) isomorphe à $\pi_1(X, x_0)$.

Exercice 6 *[Massey, chapitre 5]*

Soit G un groupe agissant comme groupe d'homéomorphismes sur un espace topologique X. On dit que l'action de G est *proprement discontinue* si tout $x \in X$ possède un voisinage U tel que pour tout $g \in G$, $g.U \cap U = \emptyset$. En particulier l'action est *libre* (ou *sans point fixe*), ce qui signifie que le seul élément de G agissant avec point fixe est le neutre.

1. Montrer que si $p : \tilde{X} \to X$ est un revêtement, le groupe de revêtement agit proprement discontinuement sur $\tilde{X}$. L'action de $\pi_1(X, x_0)$ est-elle proprement discontinue ?

Soit G un groupe agissant proprement discontinument sur un espace topologique X connexe localement connexe par arcs. On note $\alpha : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ cette action. On munit X/G de la topologie quotient.

2. Montrer que la projection $p : X \to X/G$ est un revêtement, de groupe de revêtement égal à $\alpha(G)$.

3. Montrer que si X est simplement connexe, alors $\pi_1(X/G, y_0)$ est isomorphe à G (pour tout $y_0 \in X/G$).

4. Soit $x_0 \in X$. Montrer que $p_*(\pi_1(X, x_0))$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(X/G, p(x_0))$.

Exercice 7

1. Montrer que si $p_1 : X_1 \to X_2$ et $p_2 : X_2 \to X_3$ sont des revêtements, alors $p_2 \circ p_1$ est un revêtement.

2. Déterminer tous les revêtements du cercle.

3. Montrer que le revêtement d'un graphe est un graphe.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER Année 2008/2009

Master 2 de mathématiques Théorie géométrique des groupes

Octobre 2008

feuille de TD n° 3

Graphes et groupes libres

Exercice 1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini. On note n_0 le nombre de sommets de $\mathcal{G}$ et n_1 le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}$. On appelle caractéristique d'Euler du graphe le nombre $n_0 - n_1$.

Montrer que la caractéristique d'Euler est un invariant d'homotopie des graphes.

Exercice 2 *(exercices du cours)*

1. Déterminer les sous-groupes des groupes libres associés aux revêtements suivant :

2. Déterminer les revêtements associés aux sous-groupes $< a >$ et $\mathcal{N}(a)$ du groupe libre $F(a,b)$.

Produit libre

Exercice 3

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de groupe. On supposera $I = \{1,2\}$ pour soulager les notations et on notera G, H les deux groupes.

Soient donc G, H deux groupes.

On appelle *produit libre* de G et H un groupe F muni de deux morphismes surjectifs $f_G : G \to F$ et $f_H : H \to F$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout groupe K et tous morphismes $g : G \to K$ et $h : H \to K$, il existe un unique morphisme $f : F \to K$ tel que $f \circ f_G = g$, $f \circ f_H = h$.

1. Montrer que si le produit libre existe, les morphismes f_G et f_H sont injectifs.

2. Montrer que deux produits libres de G et H sont isomorphes.

On appelle mot réduit le symbole 1 et toute écriture $g_1h_1g_2h_2...g_nh_n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$, $h_i \in H$ tel que h_1, g_2,..., g_n sont non triviaux.

3. Munir l'ensemble des mots réduits d'une loi de composition définie par la concaténation suivi par des simplifications, de sorte que l'ensemble des mots réduits muni de cette loi soit un produit libre de G et H.

4. Donner une présentation du produit libre.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Année 2008/2009

Master 2 de mathématiques — Théorie géométrique des groupes

Octobre 2008

feuille de TD n^o 4

Exercice 1

Dans le groupe $\mathbb{Z}^2 =< a, b \mid [a, b] = 1 >$, donner un diagramme réduit représentant les éléments triviaux $bababa^{-2}b^{-2}a^{-1}b^{-1}a$ et $b^2ab^{-1}a^{-2}bab^{-2}$ de $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2

Soit F_k le groupe libre sur un ensemble X à k éléments.

1. Déterminer pour tout entier n le nombre d'éléments de longueur n de F_k.

2. Déterminer pour tout entier n le nombre de mots cycliquement réduits de longueur n de F_k.

On considère la loi de probabilité uniforme p_n sur la boule de rayon n de F_k. Si $a \in F_k$ (resp. si a est un mot sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$), on dit que a est un *sous-mot* de $w \in F_k$ (resp. de w un mot sur $X \cup X^{-1}$) s'il existe $u, v \in F_k$ (resp. de u, v des mots sur $X \cup X^{-1}$) tels que uav est une écriture réduite de w (resp. tels que $w = uav$).

3. Soit $a \in F_k$. Montrer que la probabilité pour qu'un mot réduit de la boule de rayon n de F_k possède a comme sous-mot tends vers 0 quand n tends vers l'infini. Montrer que la probabilité pour qu'un conjugué cyclique d'un mot cycliquement réduit de la boule de rayon n de F_k possède a comme sous-mot tends vers 1 quand n tends vers l'infini.

4. Montrer que la probabilité pour que deux mots réduits de la boule de rayon n de F_k possède un même sous-mot en commun de longueur supérieure ou égale à $\frac{n}{}$ tends vers 0 quand n tends vers l'infini.

Exercice 3

Soit G un groupe. À toute famille génératrice X de G est associé un morphisme du groupe libre $F(X)$ dans G. Si le noyau de ce morphisme est engendré en tant que sous-groupe normal par un ensemble R, alors $G =< X \mid R >$.

Donner une présentation de $\mathbb{Z}$ induite par le système générateur $\{2, 3\}$ et tracer le graphe de Cayley de cette présentation. Imaginer le 2-complexe de Cayley en fonction de plusieurs ensembles de relateurs.

Exercice 4

1. Montrer que le groupe symétrique S_3 a pour présentation :

$$S_3 =< a, b \mid a^2 = b^3 = 1,\ aba^{-1} = b^2 >.$$

2. Tracer le graphe de Cayley de S_3 pour cette présentation.

Exercice 5

On dit que deux espaces métriques (X, d) et (X', d') sont *quasi-isométriques* s'il existe deux applications $f : X \to X'$ et $g : X' \to X$ et des constantes A, B telles que pour tout $x, y \in X$, $x', y' \in X'$, on a :

$d'(f(x), f(y)) \leq A\ d(x, y) + B$,

$d(g(x'), g(y')) \leq A\ d'(x', y') + B$,

$d(x, g \circ f(x)) \leq B$,

$d(x', f \circ g(x')) \leq B$.

On dit que f et g sont des *quasi-isométries*.

1. Montrer que pour tout entier n, les espaces $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{R}^n$ munis de la métrique euclidienne sont quasi-isométriques.

2. Montrer que $f : X \to X'$ est une quasi-isométrie si et seulement si il existe des constantes A, B telles que pour tout $x, y \in X$, on a :

$d'(f(x), f(y)) \leq A\ d(x, y) + B$,

$d(x', f(X)) \leq B$.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe. On munit l'intervalle $[0, 1]$ de la métrique standard de $\mathbb{R}$ et chaque arête de $\mathcal{G}$ de la distance rendant isométrique l'application de paramétrisation de $[0, 1]$ sur l'arête.

3. Soit $c : [0, 1] \to \mathcal{G}$ un chemin de $\mathcal{G}$. Montrer que la quantité $\sum_{i=0}^{n} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$ est indépendante de $n \in \mathbb{N}$ et $0 = t_0 < ... < t_n = 1$ tels que pour tout i, l'arc $c([t_i, t_{i+1}])$ est contenu dans une arête de $\mathcal{G}$. on l'appelle la *longueur* de c. Montrer que cette longueur coïncide avec la longueur au sens combinatoire des chemins simpliciaux (*edge-path*).

Si $x, y \in \mathcal{G}$, on définit $d(x, y)$ comme l'infimum des longueurs des chemins joignant x à y.

4. Montrer que d est une distance sur $\mathcal{G}$.

On appelle cette distance la distance ou métrique simpliciale sur $\mathcal{G}$. Si G est un groupe présenté par $< X \mid R >$, la restriction à $G = Cay_2^0(< X \mid R >)$ de la métrique simpliciale sur le graphe de Cayley associé au système générateur X s'appelle la longueur ou métrique des mots sur G associée au système générateur X.

5. Montrer que tous les groupes libres de type fini munis de la métrique des mots associée à une base sont quasi-isométriques.

6. Soit G un groupe de type fini. Montrer que les graphes de Cayley de G associés à deux parties génératrices finies quelconques sont quasi-isométriques.