DM 01 : révisions calculatoires [corrigé]

Exercice. Résolution d'inéquations.

Pour les deux inéquations suivantes, commencer par déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation a un sens, puis la résoudre.

(a) $|2x+1| < 2 - x^2$;

Il n'y a aucun problème de définition : l'inéquation a un sens pour $x \in \mathbb{R}$.
On peut par exemple utiliser une disjonction de cas pour se débarrasser de la valeur absolue.

- *Soit $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$, de telle sorte que $2x+1 \leqslant 0$. On a alors la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} |2x+1| < 2-x^2 &\Leftrightarrow -(2x+1) < 2-x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x+1 > x^2-2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-1, 3\right[, \end{aligned}$$

car les racines du polynôme $X^2 - 2X - 3$ sont -1 et 3.
Parmi les $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$, les solutions sont donc les nombres > -1.

- *Soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, de telle sorte que $2x+1 \geqslant 0$. On a alors la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} |2x+1| < 2-x^2 &\Leftrightarrow 2x+1 < 2-x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x-1 < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right[, \end{aligned}$$

car les racines du polynôme $X^2 + 2X - 1$ sont $-1 \pm \sqrt{2}$.
Comme $-1-\sqrt{2} < -1 < -\dfrac{1}{2}$, parmi les $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, les solutions sont les nombres $< \sqrt{2}-1$.

In fine, *les solutions de l'inéquation sont les éléments de l'intervalle $\mathcal{S} = \left]-1, \sqrt{2}-1\right[$.*

(b) $\sqrt{2x^2+2x+1} \leqslant 1 + x - x^2$.

Le polynôme $2X^2 + 2X + 1$ étant de discriminant < 0, on a $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2+2x+1 > 0$, et l'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour se débarrasser de la racine carrée, on va utiliser l'équivalence

$$\sqrt{a} \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \leqslant b^2, \end{cases}$$

valable pour tous $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$. Cette équivalence est justifiée, dans le sens direct, par la croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et, dans le sens réciproque, par la croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ et le fait que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \sqrt{t^2} = t$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc la chaîne d'équivalences

$$\sqrt{2x^2+2x+1} \leqslant 1+x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x-x^2 \geqslant 0 \\ 2x^2+2x+1 \leqslant (1+x-x^2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 \leqslant 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \leqslant x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ x = 0 \text{ ou } x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ x = 0 \text{ ou } x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[\,. \end{cases}$$

Comme $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 3$, *les intervalles* $]-\infty, -1]$ *et* $[3, +\infty[$ *sont disjoints du segment* $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ *et l'on obtient que la seule solution de l'inéquation est* 0.

Problème. Les premières inégalités de Shapiro.

1. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geqslant \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}.$$

En « chassant les dénominateurs », c'est-à-dire en multipliant par $b_1\, b_2\,(b_1 + b_2) > 0$, *on voit que la différence* $\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} - \dfrac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}$ *est du même signe que*

$$\begin{aligned} a_1^2\, b_2\,(b_1 + b_2) + a_2^2\, b_1\,(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)^2\, b_1\, b_2 &= a_1^2\, b_2^2 + a_2^2\, b_1^2 - 2\, a_1\, a_2\, b_1\, b_2 \\ &= (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

> Par une récurrence facile (que **l'on ne vous demande pas de rédiger**), on montre de la même façon que, pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a
>
> $$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \qquad (\star)$$

2. **Inégalité de Nesbitt = Shapiro III.** Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer $3(ab + ac + bc) \leqslant (a + b + c)^2$.

   La différence vaut

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc) &= \Big(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\Big) - 3(ab + ac + bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\ &= \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2\right] \geqslant 0. \end{aligned}$$

(b) En utilisant ($\star$), en déduire $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}\\&\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}&&\text{(d'après ($\star$))}\\&\geqslant\frac{3(ab+ac+bc)}{2(ab+ac+bc)}=\frac{3}{2}.&&\text{(d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

3. **Inégalité de Shapiro IV.** Soit $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer $2\left[a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)\right]\leqslant(a+b+c+d)^2$.

On a

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2-2\left[a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)\right]\\&\qquad=\Big(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\Big)\\&\qquad\qquad-2\left(ab+2ac+ad+bc+2bd+cd\right)\\&\qquad=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\\&\qquad=(a-c)^2+(b-d)^2\geqslant0.\end{aligned}$$

(b) En déduire $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant2$.

On a, en utilisant ($\star$) et la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}&=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\\&\overset{\star}{\geqslant}\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}\geqslant2.\end{aligned}$$

4. **Inégalité de Shapiro V.** Soit $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geqslant\frac{5}{2}.$$

On va suivre le raisonnement des deux questions précédentes. On a

$$\begin{aligned}&2(a+b+c+d+e)^2-5\left(a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+a)+e(a+b)\right)\\&\quad=2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\\&\quad=\frac{1}{2}\big[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2\\&\qquad\qquad+(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2\big]\geqslant0\end{aligned}$$

donc $(a+b+c+d+e)^2\geqslant\dfrac{5}{2}\big(a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+a)+e(a+b)\big)$, *d'où*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+a)}+\frac{e^2}{e(a+b)}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\star}{\geqslant} \frac{(a+b+c+d+e)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+a)+e(a+b)}\\
&\geqslant \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

5. **Inégalité de Shapiro VI.** Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Montrer que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $xy + xz + yz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$.

   On a, comme à la question 2a,

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + xz + yz) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geqslant 0.$$

   (b) En déduire

$$\begin{aligned}
&a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b)\\
&\qquad\qquad \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad + be + cf).
\end{aligned}$$

   On applique la question précédente à $x = a + d$, $y = b + e$ *et* $z = c + f$ *: on obtient*

$$(a+d)(b+e) + (a+d)(c+f) + (b+e)(c+f) \leqslant (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2$$

   et on vérifie un peu laborieusement que

$$\begin{aligned}
(a+d)(b+e) + (a+d)(c+f) + (b+e)(c+f) &= a(b+c) + b(c+d) + c(d+e)\\
&\quad + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b)\\
\text{et}\quad (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad + be + cf),
\end{aligned}$$

   (dans la première égalité, on trouve en fait tous les « produits croisés » $ab, ac, \dots, ef$*, à l'exception de* ad*,* be *et* cf*) ce qui conclut.*

   (c) Montrer

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geqslant 3.$$

   En notant $S = a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b)$ *la somme majorée à la question précédente, on réutilise la méthode des questions précédentes :*

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b}\\
&\quad = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+d)} + \frac{c^2}{c(d+e)} + \frac{d^2}{d(e+f)} + \frac{e^2}{e(f+a)} + \frac{f^2}{f(a+b)}\\
&\quad \overset{\star}{\geqslant} \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{S}\\
&\quad \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2S + 2(ad + be + cf)}{S}\\
&\quad \geqslant 2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad + be + cf)}{S} \geqslant 3,
\end{aligned}$$

   d'après la question précédente.

6. **Extension des inégalités de Shapiro.** Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que les sommes $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ et $\alpha+\gamma$ soient **strictement** positives.
   En appliquant la question 2b à des nombres strictement positifs bien choisis, montrer

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geqslant \frac{3}{2}.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on applique la question 2b aux nombres strictement positifs* $\alpha+\frac{1}{n}$*,* $\beta+\frac{1}{n}$ *et* $\gamma+\frac{1}{n}$*. On obtient ainsi*

$$\frac{\alpha+1/n}{\beta+\gamma+2/n}+\frac{\beta+1/n}{\gamma+\alpha+2/n}+\frac{\gamma+1/n}{\alpha+\beta+2/n} \geqslant \frac{3}{2}.$$

   Or, on a (en utilisant $\beta+\gamma>0$ *et les inégalités analogues)*

$$\frac{\alpha+1/n}{\beta+\gamma+2/n}+\frac{\beta+1/n}{\gamma+\alpha+2/n}+\frac{\gamma+1/n}{\alpha+\beta+2/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta},$$

   et le théorème passage à la limite dans les inégalités larges donné dans le sujet conclut.