DM 01 : révisions calculatoires

Exercice. Résolution d'inéquations.

Pour les deux inéquations suivantes, commencer par déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation a un sens, puis la résoudre.

L'un des intérêts de cet exercice est de vous exercer à la rédaction d'un raisonnement précis : veillez à être rigoureux à toutes les étapes de votre résolution, et à bien expliquer ce que vous entreprenez.

(a) $|2x+1| < 2 - x^2$;

(b) $\sqrt{2x^2+2x+1} \leqslant 1 + x - x^2$.

Problème. Les premières inégalités de Shapiro.

1. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geqslant \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}.$$

> Par une récurrence facile (que **l'on ne vous demande pas de rédiger**), on montre de la même façon que, pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a
>
> $$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}. \qquad (\star)$$

2. **Inégalité de Nesbitt = Shapiro III.** Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer $3(ab+ac+bc) \leqslant (a+b+c)^2$.
   (b) En utilisant $(\star)$, en déduire $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.
3. **Inégalité de Shapiro IV.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer $2\left[a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)\right] \leqslant (a+b+c+d)^2$.
   (b) En déduire $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \geqslant 2$.
4. **Inégalité de Shapiro V.** Soit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geqslant \frac{5}{2}.$$

5. **Inégalité de Shapiro VI.** Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $xy + xz + yz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$.
   (b) En déduire
   $$\begin{aligned} a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b) \\ \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad + be + cf). \end{aligned}$$
   (c) Montrer
   $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geqslant 3.$$
6. **Extension des inégalités de Shapiro.** Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que les sommes $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ et $\alpha + \gamma$ soient **strictement** positives.
   En appliquant la question 2b à des nombres strictement positifs bien choisis, montrer
   $$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geqslant \frac{3}{2}.$$
   On pourra utiliser le théorème de passage à la limite des inégalités larges *: si une suite* ***convergente*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et un nombre réel* $m \in \mathbb{R}$ *vérifient* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.
   > On pourrait de même étendre les autres inégalités que nous avons démontrées.

Remarque. Il serait en revanche faux de croire (comme le mathématicien américain Harold S. Shapiro (1928-2021) en 1954) que, pour tout $n \geqslant 3$ et tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{n}{2}. \qquad (\mathrm{Sh}_n)$$

En effet, on pourrait alors étendre l'inégalité en ne demandant que la positivité (au sens large) de $a_1, \ldots, a_n$ et la stricte positivité des dénominateurs, comme on l'a fait à la dernière question. Or,
$$\begin{aligned} \frac{0}{42+2} + \frac{42}{2+42} + \frac{2}{42+4} + \frac{42}{4+41} + \frac{4}{41+5} + \frac{41}{5+39} + \frac{5}{39+4} + \frac{39}{4+38} \\ + \frac{4}{38+2} + \frac{38}{2+38} + \frac{2}{38+0} + \frac{38}{0+40} + \frac{0}{40+0} + \frac{40}{0+42} = \frac{202\,566\,829}{28\,938\,140} < 7. \end{aligned}$$

En fait, l'inégalité (Sh_n) est vraie si et seulement si $n \leqslant 13$ ou $n \in \{15, 17, 19, 21, 23\}$, même si la méthode employée dans ce DM, due à Louis J. Mordell (1888-1972) en 1958, ne permet pas de montrer d'autres cas que ceux que nous avons traités.