DM 02 : logique [corrigé]

Exercice 1. Inégalité arithmético-géométrique à n arguments.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrer $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

   Il suffit de développer le terme de gauche dans l'inégalité $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$.

2. **Principe de récurrence de Cauchy.** Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble vérifiant les propriétés suivantes.
   (i) $1 \in A$;
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$;
   (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$.

   Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

   - *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *notons* $P(m)$ *l'assertion* $2^m \in A$. *Montrons* $\forall m \in \mathbb{N}, 2^m \in A$ *par récurrence.*

     Initialisation. *Si* $m = 0$, $2^m = 1$, *qui appartient bien à l'ensemble* A, *d'après la première hypothèse.*

     Hérédité. *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $2^m \in A$. *On a alors* $2^{m+1} = 2 \times 2^m \in A$ *d'après la troisième hypothèse.*

     Cela clôt la récurrence.

   - *Montrons l'assertion suggérée par l'énoncé.*
     Soit $p \in A$. *On souhaite montrer* $[\![1, p]\!] \subseteq A$.
     Pour tout $q \in [\![1, p]\!]$, *on note* $Q(q)$ *l'assertion* $q \in A$. *Montrons* $\forall q \in [\![1, p]\!], Q(q)$ *par récurrence finie descendante.*

     Initialisation. *Par hypothèse, on a* $p \in A$, *c'est-à-dire* $Q(p)$.

     Hérédité. *Soit* $q \in [\![2, p]\!]$ *tel que* $Q(q)$. *Montrons* $Q(q-1)$.
     Comme $q \geqslant 2$, *l'entier* $n = q-1$ *appartient à* $\mathbb{N}^*$, *et vérifie* $n+1 \in A$. *D'après la deuxième hypothèse, on en déduit* $n \in A$, *ce qui montre* $Q(q-1)$ *et clôt la récurrence.*

   - *On peut maintenant conclure.*
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *En prenant un entier* m *supérieur ou égal à* $\dfrac{\ln n}{\ln 2}$, *on a* $n \leqslant 2^m$.
     D'après le premier point du raisonnement, $2^m \in A$.
     D'après le deuxième point du raisonnement (appliqué à $p = n$ *et* $q = 2^m$*), on a* $n \in A$.
     On a ainsi montré l'inclusion $\mathbb{N}^* \subseteq A$.
     L'inclusion réciproque étant une hypothèse de la question, on a bien montré $\mathbb{N}^* = A$.

3. **Inégalité arithmético-géométrique.** Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^n$, alors

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

   Soit

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right\}$$

   l'ensemble des nombres d'arguments pour lesquels l'inégalité arithmético-géométrique est vraie. Nous allons démontrer que A *vérifie les trois hypothèses de la question précédente, et on en déduira* $A = \mathbb{N}^*$, *c'est-à-dire la validité de l'inégalité arithmético-géométrique générale.*

(i) *Si* $n = 1$*, l'inégalité dit simplement* $\forall x_1 \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[1]{x_1} = \dfrac{x_1}{1}$*, ce qui est évident. On a donc* $1 \in A$.

(ii) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+1 \in A$*. Nous allons démontrer que* $n \in A$*. Soit donc* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$.
Soit $y \in \mathbb{R}_+$*, que l'on fixera bientôt.*
En utilisant le fait que $n+1 \in A$*, on obtient l'inégalité*

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n\, y} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n + y}{n+1}.$$

Le jeu va être de choisir y *de telle sorte à retomber sur l'inégalité arithmético-géométrique.*
Le terme de gauche vaut

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n\, y} = x_1^{1/(n+1)} \cdots x_n^{1/(n+1)}\, y^{1/(n+1)}.$$

Si l'on veut que ce terme vaille $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = x_1^{1/n} \cdots x_n^{1/n}$*, il faut que*

$$y^{1/(n+1)} = x_1^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \cdots x_n^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = x_1^{1/n(n+1)} \cdots x_n^{1/n(n+1)}.$$

Posons donc $y = x_1^{1/n} \cdots x_n^{1/n} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$*. On a alors*

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &= \sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n\, y} \\ &\leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n + y}{n+1} && \textit{(car } n+1 \in A\textit{)} \\ &\leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n+1} + \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}{n+1} \\ \textit{donc} \quad \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{=\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &\leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \\ \textit{donc} \quad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &\leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \end{aligned}$$

On a donc bien $n \in A$.

(iii) *Soit* $n \in A$*. Nous allons montrer que* $2n \in A$*. Soit donc* $(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}_+^n$*. On a*

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{x_1\, x_2 \cdots x_{2n-1}\, x_{2n}} &= \sqrt[n]{\sqrt{x_1\, x_2} \cdots \sqrt{x_{2n-1}\, x_{2n}}} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{x_1\, x_2} + \cdots + \sqrt{x_{2n-1}\, x_{2n}}}{n} && \textit{(car } n \in A\textit{)} \\ &\leqslant \frac{\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \cdots + \dfrac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}}{n} && \textit{(d'après la question 1)} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} + x_{2n}}{2n}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $2n \in A$ *et clôt la preuve.*

4. **Application.** Soit $n \geqslant 1$. En appliquant la question précédente à $n+1$ réels positifs habilement choisis, montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geqslant 1}$?

Soit $n \geqslant 1$.

On applique la question précédente à $1, \underbrace{1+\frac{1}{n}, \dots, 1+\frac{1}{n}}_{n \text{ fois}}$ *pour obtenir :*

$$\sqrt[n+1]{1 \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant \frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ *sur* $\mathbb{R}_+$*, on en déduit*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

On a donc montré $\forall n \geqslant 1, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$*, c'est-à-dire que* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ *croît.*

Exercice 2

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{2k} = 2u_k \\ u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}. \end{cases}$$

Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Après avoir calculé les premiers termes, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ *l'assertion* $u_n = n$.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence forte.*

Initialisation. *On a* $P(1)$ *par définition de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall j \in [\![1, n]\!], P(j)$. *Montrons* $P(n+1)$.

On distingue deux cas.

- *Supposons* $n+1$ *pair.*
  On peut alors trouver $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n+1 = 2k$.
  - *Comme* $n+1 \geqslant 2$, *on a* $k \geqslant 1$.
  - *On en déduit que* $k < 2k = n+1$, *donc* $k \leqslant n$.

  En particulier, on sait que $P(k)$ *est vrai.*
  On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{2k} \\ &= 2\,u_k && \text{(déf. de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{)} \\ &= 2\,k && \text{(d'après } P(k)\text{)} \\ &= n+1. \end{aligned}$$

- *Supposons* $n+1$ *impair, c'est-à-dire* n *pair.*
  On peut alors trouver $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k$.

- *Comme* $n \geqslant 1$, *on a* $k > 0$, *donc* $k \geqslant 1$. A fortiori, $k+1 \geqslant 1$.
- *On en déduit que* $k < 2k = n$, *donc* $k \leqslant n$ *et* $k+1 \leqslant n$.

En particulier, on sait que $P(k)$ *et* $P(k+1)$ *sont vrais.*
On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{2k+1} \\ &= u_k + u_{k+1} && \textit{(déf. de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\textit{)} \\ &= k + (k+1) && \textit{(d'après } P(k) \textit{ et } P(k+1)\textit{)} \\ &= n+1. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré $u_{n+1} = u_n$.
Cela montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

Exercice 3. Fonctions localement constantes.

Étant donné une partie $I \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est *localement constante* si

$$\forall x \in I, \exists y \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta \Rightarrow f(t) = y.$$

*Pour illustrer la diversité des approches possibles (qui ne se résument pas au « **Candidat :** » du cours), le corrigé compose en **gras** les différentes manières d'introduire les « témoins » qui montrent une ∃-assertion.*

1. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ constante est localement constante.

   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction constante. On peut donc trouver* $y_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall s \in I, f(s) = y_0$ (♠).
   Montrons que f *est localement constante.*
   Soit $x \in I$.

   Montrons $\exists y \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta \Rightarrow f(t) = y$.
   Candidats : $y = y_0$ *et* $\delta = 1$.
   - *On a bien* $y \in \mathbb{R}$ *et* $\delta > 0$.
   - *Montrons* $\forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta \Rightarrow f(t) = y$.
     Soit $t \in I$ *tel que* $|t-x| \leqslant \delta$.
     D'après (♠), *on a* $f(t) = y_0 = y$, *ce qui conclut.*

2. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que la somme de deux fonctions localement constantes est localement constante.

   Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions localement constantes. Montrons que* $f+g$ *est localement constante.*
   Soit $x \in I$.
   Comme f *est localement constante, on peut trouver* $y' \in \mathbb{R}$ *et* $\delta' > 0$ *tels que*

   $$\forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta' \Rightarrow f(t) = y'. \qquad (\heartsuit)$$

   Comme g *est localement constante, on peut trouver* $y'' \in \mathbb{R}$ *et* $\delta'' > 0$ *tels que*

   $$\forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta'' \Rightarrow f(t) = y''. \qquad (\diamondsuit)$$

Montrons $\exists y \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta \Rightarrow (f+g)(t) = y$.
Candidats : $y = y' + y''$ *et* $\delta = \min(\delta', \delta'')$.

- *On a bien* $y \in \mathbb{R}$ *et* $\delta > 0$.
- *Soit* $t \in I$ *tel que* $|t-x| \leqslant \delta$.
  - *En appliquant* $(\heartsuit)$ *à* t*, qui vérifie* $|t-x| \leqslant \delta \leqslant \delta'$*, on a* $f(t) = y'$.
  - *En appliquant* $(\diamondsuit)$ *à* t*, qui vérifie* $|t-x| \leqslant \delta \leqslant \delta''$*, on a* $f(t) = y''$.

  On en déduit $(f+g)(t) = f(t) + g(t) = y' + y'' = y$*, ce qui conclut.*

3. Donner un exemple de partie $I \subseteq \mathbb{R}$ et de fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui soit localement constante, mais pas constante.

   Soit $I = \{-1, 1\}$*. On définit* $f : I \to \mathbb{R}$ *en posant* $f(-1) = -1$ *et* $f(1) = 1$.

   - *La fonction* f *n'est pas constante, car* $f(-1) \neq f(1)$.
   - *Montrons que* f *est localement constante. Soit* $x \in I$*. On a* $x = -1$ *ou* $x = 1$.
     - *Si* $x = -1$*,* ***posons*** $y = -1$ *et* $\delta = 1$.
       Soit $t \in I$ *tel que* $|t-x| \leqslant \delta$*. On a donc* $t \in [-2, 0]$.
       Comme $t \in I$*, on a nécessairement* $t = -1$*, donc* $f(t) = -1 = y$.
     - *Si* $x = 1$*, on montre exactement de la même façon que* $y = 1$ *et* $\delta = 1$ ***conviennent****.*

4. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. On rappelle que I est un *intervalle* si

   $$\forall x, y, z \in I, (x \leqslant y \leqslant z \text{ et } x \in I \text{ et } z \in I) \Rightarrow y \in I.$$

   Montrer que I est un intervalle si et seulement si toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ localement constante est constante.

   - *Supposons que* I *est un intervalle.*
     Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *localement constante. Montrons que* f *est constante.*
     - *Si* I *est l'ensemble vide ou un singleton, la fonction* f *est trivialement constante.*
     - *On suppose donc que* I *est un intervalle ayant au moins deux éléments. On va utiliser l'indication et montrer que* f *est dérivable, de dérivée nulle.*
       Soit $x \in I$.

       Comme f *est localement constante, on peut trouver* $y \in \mathbb{R}$ *et* $\delta > 0$ *tels que*

       $$\forall t \in I, |t-x| \leqslant \delta \Rightarrow f(t) = y.$$

       En particulier, pour tout $t \in I$ *différent de* x *et tel que* $|t-x| \leqslant \delta$*, on a*

       $$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{y - y}{t - x} = 0.$$

       Autrement dit, pour t *suffisamment proche de* x*, le taux d'accroissement de* f *entre* t *et* x *est nul.*
       Cela montre[1] *que* $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \xrightarrow[t \to x]{} 0$*, c'est-à-dire que* f *est dérivable en* x*, et que* $f'(x) = 0$.

       Puisque notre raisonnement a été mené pour un $x \in I$ *quelconque, on a donc montré que* f *était dérivable en tout point et de dérivée nulle, donc elle est constante.*

1. *On utilise ici un fait, intuitivement évident, qui dit que la limite d'une fonction – ici le taux d'accroissement de* f *– en un point ne dépend que de ce qu'il se passe autour dudit point. On appellera cette propriété le* ***caractère local de la limite****, et on le démontrera facilement quand on aura des définitions précises de tout cela.*

- *On va montrer la réciproque du point précédent par contraposée. Autrement dit, on va montrer que si* I *n'est pas un intervalle, alors il existe une fonction* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *qui est localement constante sans être constante.*

  Supposons donc que I *ne soit pas un intervalle, c'est-à-dire que*

$$\exists x, y, z \in \mathrm{I} : \big(x \leqslant y \leqslant z \textit{ et } x \in \mathrm{I} \textit{ et } z \in \mathrm{I}\big) \textit{ et } y \notin \mathrm{I}.$$

  On peut donc trouver $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tels que* $x \leqslant y \leqslant z$ *et* $x, z \in \mathrm{I}$ *et* $y \notin \mathrm{I}$.
  On définit alors la fonction

$$f : \begin{cases} \mathrm{I} \to & \mathbb{R} \\ t \mapsto & \begin{cases} 0 & \textit{si } t < y \\ 1 & \textit{si } t > y. \end{cases} \end{cases}$$

  - *Cette fonction n'est pas constante, car* $f(x) = 0$ *et* $f(z) = 1$.
  - *Montrons* f *localement constante. Soit* $a \in \mathrm{I}$.
    Montrons $\exists v \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall t \in \mathrm{I}, |t - a| \leqslant \delta \Rightarrow f(t) = v$.
    On distingue alors deux cas.

    - *Supposons* $a < y$.
      *On **pose** alors* $v = 0$ *et* $\delta = y - a$.
      - *On a bien* $v \in \mathbb{R}$ *et, comme* $y \notin \mathrm{I}$*, la différence* $y - a$ *est non nulle donc* > 0.
      - *Soit* $t \in \mathrm{I}$ *tel que* $|t - a| \leqslant \delta$.
        On a donc $a - y \leqslant t - a \leqslant y - a$ *donc* $t \leqslant y$*. Comme* $y \notin \mathrm{I}$*, on a même* $t < y$.
        Il s'ensuit $f(t) = 0 = v$.
    - *Supposons* $a > y$.
      On montre alors de la même façon que $v = 1$ *et* $\delta = a - y$ ***conviennent****, car un élément* $t \in \mathrm{I}$ *tel que* $|t - a| \leqslant a - y$ *vérifiera alors* $t > y$*, donc* $f(t) = 1 = v$.

Exercice 4

On note $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres triangulaires.

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit *bon* si

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!], \exists k \in \mathbb{N}^* : T_k \equiv \ell \pmod{n}.$$

Déterminer les bons entiers.

On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*, le* k*-ième nombre triangulaire est* $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + k$*. En particulier, pour tout* $k \geqslant 2$*, on a* $T_k = k + T_{k-1}$.

On commence par observer quelques cas. On écrit, dans la n-ième ligne du tableau suivant, l'unique entier de $[\![0, n-1]\!]$ congru modulo n aux différents nombres triangulaires.

T_k	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
modulo 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
modulo 2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
modulo 3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
modulo 4	1	3	2	2	3	1	0	0	1	3	2	2	3	1	0	0	1	3	2	2
modulo 5	1	3	1	0	0	1	3	1	0	0	1	3	1	0	0	1	3	1	0	0
modulo 6	1	3	0	4	3	3	4	0	3	1	0	0	1	3	0	4	3	3	4	0
modulo 7	1	3	6	3	1	0	0	1	3	6	3	1	0	0	1	3	6	3	1	0
modulo 8	1	3	6	2	7	5	4	4	5	7	2	6	3	1	0	0	1	3	6	2
modulo 9	1	3	6	1	6	3	1	0	0	1	3	6	1	6	3	1	0	0	1	3
modulo 10	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0

On observe une forme de périodicité avec des « blocs » de n nombres qui se répètent, à l'identique ou avec une alternance entre deux formes. Cette périodicité va être la clef de notre raisonnement.

Étape 0. *Clairement,* 1 *est bon.*

Étape 1. Le premier bloc de n nombres ne suffit pas (sauf si $n = 1$). *Soit $n \geqslant 2$.*

On a, pour tout $k \geqslant 2$, $T_k = k + T_{k-1}$ donc $T_k \equiv k + T_{k-1} \pmod n$.

En particulier, $T_{n-1} \equiv T_n \pmod n$. (Notons qu'on utilise ici l'hypothèse $n \geqslant 2$.)

Cela signifie que, modulo n, les n premiers entiers $T_1, \ldots, T_n$ ne sont pas tous distincts. On ne peut donc pas avoir $\forall \ell \in [\![0, n-1]\!], \exists k \in [\![1, n]\!] : T_k \equiv \ell \pmod n$: le premier bloc ne suffit pas.

Étape 2. Comparaison de T_{k+n} et T_k. *Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$T_{k+n} = 1 + \cdots + k + (k+1) + \cdots + (k+n) = T_k + n \times k + (1 + \cdots + n)$$
$$\equiv T_k + \frac{n(n+1)}{2} \pmod n.$$

Étape 3. Si $n > 1$ est impair, il n'est pas bon. *Si n est impair, on a $\dfrac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$.*

Cela montre que l'entier n divise $\dfrac{n(n+1)}{2}$. L'étape précédente entraîne $\forall k \in \mathbb{N}^*, T_{k+n} \equiv T_k \pmod n$.

Cela montre que, modulo n, la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est n-périodique.

On va en déduire que si, en outre $n > 1$, alors n n'est pas bon.

En effet, d'après l'étape 1, on peut trouver un entier $\ell \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], T_k \not\equiv \ell \pmod n$.

Soit maintenant $k' \in \mathbb{N}^*$. On peut trouver $k \in [\![1, n]\!]$ et $d \in \mathbb{N}$ tel que $k' = k + dn$.

Par n-périodicité, on en déduit $T_{k'} \equiv T_k \pmod n$ et donc $T_{k'} \not\equiv \ell \pmod n$, ce qui montre que ℓ n'est congru à aucun nombre triangulaire (et donc que n n'est pas bon).

En résumé (et en rajoutant l'étape 0), on a montré que ***le seul entier impair qui soit bon est*** **1.**

Étape 4. Tout diviseur d'un bon est bon. *Soit n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que n_1 divise n_2.*

En particulier, $n_1 \leqslant n_2$ et, si deux entiers sont congrus modulo n_2, ils le sont a fortiori *modulo n_1.*

Supposons n_2 bon et montrons n_1 bon.

Soit $\ell \in [\![0, n_1 - 1]\!]$. On a a fortiori *$\ell \in [\![0, n_2 - 1]\!]$.*

Par bonté de n_2, on peut trouver $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k \equiv \ell \pmod{n_2}$. On en déduit $T_k \equiv \ell \pmod{n_1}$, ce qui conclut.

Par contraposée, on en déduit que tout multiple d'un entier qui n'est pas bon n'est pas bon. En particulier, aucun entier dont la division en facteurs premiers fait intervenir un nombre premier impair ne peut être bon.

Ainsi, ***si un nombre n'est pas une puissance de 2, il n'est pas bon.***

Étape 5. Les puissances de 2 sont bonnes. *Commençons par deux remarques.*

- *Pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\frac{2^{\nu+1}(2^{\nu+1}+1)}{2} = 2^{\nu}(2^{\nu+1}+1) = 2^{2\nu+1} + 2^{\nu} \equiv 2^{\nu} \pmod{2^{\nu+1}},$$

  car $\nu + 1 \leqslant 2\nu + 1$, *donc* $2^{\nu+1}$ *divise* $2^{2\nu+1}$.
  Avec l'étape 2, on en déduit $\forall k \in \mathbb{N}^*, T_{k+2^{\nu+1}} \equiv T_k + 2^{\nu} \pmod{2^{\nu+1}}$.
  On observe d'ailleurs cela dans le tableau des exemples : quand on passe d'un bloc au suivant dans une ligne $n \geqslant 2$ *qui est une puissance de 2, on ajoute à tous les éléments* $n/2$ *modulo* n, *ce qui explique que les blocs alternent entre deux formes réellement différentes.*
- *Soit* $\nu \in \mathbb{N}$ *et* a, b *deux entiers congrus modulo* 2^{ν}. *Attardons-nous sur leur relation modulo* $2^{\nu+1}$.
  Le quotient $q = \dfrac{b-a}{2^{\nu}}$ *est donc entier.*
  - *Si* q *est pair,* $2^{\nu+1}$ *divise* $b - a$, *donc* $a \equiv b \pmod{2^{\nu+1}}$.
  - *Si* q *est impair,* $\dfrac{q-1}{2} = \dfrac{b-a-2^{\nu}}{2^{\nu+1}}$ *est entier, donc* $a \equiv b + 2^{\nu} \pmod{2^{\nu+1}}$.

Passons à la démonstration proprement dite, que l'on va faire « par récurrence sur l'exposant ».
Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, *on note* $P(\nu)$ *l'assertion « 2^{ν} est bon. »*

Initialisation. *On a vu à l'étape* 0 *que* 1 *est bon, ce qui montre* $P(0)$.

Hérédité. *Soit* $\nu \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(\nu)$. *Montrons* $P(\nu+1)$.
Soit $\ell \in [\![0, 2^{\nu+1}-1]\!]$. *Notons* ℓ' *l'unique entier de* $[\![0, 2^{\nu}-1]\!]$ *qui est congru à* ℓ *modulo* 2^{ν}.
D'après $P(\ell)$, *on peut trouver* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $T_k \equiv \ell' \equiv \ell \pmod{2^{\nu}}$.
Grâce à la deuxième remarque plus haut, on peut distinguer deux cas :

- *si* $T_k \equiv \ell \pmod{2^{\nu+1}}$, *on a fini ;*
- *si* $T_k \equiv \ell + 2^{\nu} \pmod{2^{\nu+1}}$, *on utilise l'étape 2 et la première remarque :*

$$T_{k+2^{\nu+1}} \equiv T_k + 2^{\nu} \equiv \ell + 2^{\nu} + 2^{\nu} \equiv \ell \pmod{2^{\nu+1}}.$$

Dans les deux cas, on a trouvé un entier $k' \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $T_{k'} \equiv \ell \pmod{2^{\nu+1}}$, *ce qui montre* $P(\nu+1)$, *et clôt la récurrence.*

In fine, ***les entiers qui sont bons sont exactement les puissances de 2.***