DM 02 : logique

Exercice 1. Inégalité arithmético-géométrique à n arguments.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrer $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. **Principe de récurrence de Cauchy.** Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble vérifiant les propriétés suivantes.
   (i) $1 \in A$;
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$;
   (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$.

   Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

   Indication. *On pourra notamment montrer* $\forall p \in A, [\![1, p]\!] \subseteq A$.
3. **Inégalité arithmético-géométrique.** Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^n$, alors
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
4. **Application.** Soit $n \geqslant 1$. En appliquant la question précédente à $n+1$ réels positifs habilement choisis, montrer que
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}.$$
   Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geqslant 1}$?

Exercice 2

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{2k} = 2u_k \\ u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}. \end{cases}$$

Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3. Fonctions localement constantes.

Étant donné une partie $I \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est *localement constante* si

$$\forall x \in I, \exists y \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall t \in I, |t - x| \leqslant \delta \Rightarrow f(t) = y.$$

1. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ constante est localement constante.
2. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que la somme de deux fonctions localement constantes est localement constante.
3. Donner un exemple de partie $I \subseteq \mathbb{R}$ et de fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui soit localement constante, mais pas constante.
4. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. On rappelle que I est un *intervalle* si

$$\forall x, y, z \in I, (x \leqslant y \leqslant z \text{ et } x \in I \text{ et } z \in I) \Rightarrow y \in I.$$

   Montrer que I est un intervalle si et seulement si toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ localement constante est constante.

   Indication. *On pourra utiliser que si* I *est un intervalle ayant au moins deux éléments, toute fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable et de dérivée nulle est constante.*

Exercice 4

Cet exercice est sensiblement plus difficile que les précédents.

Rappel : *pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, deux nombres entiers* a *et* b *sont* congrus modulo n *si* n *divise la différence* $b - a$*. Dans ce cas, on note* $a \equiv b \pmod{n}$*. Chaque entier est congru modulo* n *à un unique élément de* $[\![0, n-1]\!]$*.*

On note $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{k(k+1)}{2} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres triangulaires.

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit *bon* si

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!], \exists k \in \mathbb{N}^* : T_k \equiv \ell \pmod{n}.$$

Déterminer les bons entiers.