DM 03 : images itérées et applications [corrigé]

Problème. Images itérées.

Dans tout le problème, étant donné un ensemble X, une application $f : X \to X$ et une partie $A \subseteq X$, on définit la suite d'ensembles $(f^n[A])_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$f^0[A] = A \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1}[A] = f\big[f^n[A]\big].$$

De manière peut-être plus parlante (et plus effrayante), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n[A] = f\Bigg[f\bigg[f\Big[\cdots f[A]\cdots\Big]\bigg]\Bigg],$$

avec n occurrences de la lettre f (et n paires de crochets).
On définit alors $f^\omega[A] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n[A]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera également $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (avec n occurrences de la lettre f) et $f^0 = \mathrm{id}_X$, de telle sorte que $f^n[A]$ soit l'image directe de A par l'application f^n.

Partie I. Exemples et généralités.

1. **Exemples.** Dans les trois cas suivants, déterminer $f^n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f^\omega[X]$.

   (a) $X = \mathbb{N}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1. \end{cases}$

   Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n[\mathbb{N}] = [\![n, +\infty[\![$.
   On en déduit $f^\omega[\mathbb{N}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\![n, +\infty[\![= \varnothing$.

   (b) X est un ensemble quelconque, et $f : X \to X$ est une application surjective.

   Par surjectivité, on a $f[X] = X$. *Une récurrence immédiate montre alors* $\forall n \in \mathbb{N}, f^n[X] = X$.
   On en déduit $f^\omega[\mathbb{N}] = X$.

   (c) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ E \mapsto \begin{cases} E \setminus \{\min(E)\} & \text{si } E \neq \varnothing \\ \varnothing & \text{si } E = \varnothing. \end{cases} \end{cases}$

   - *Remarquons déjà que* f *est bien définie car, pour tout ensemble non vide* $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, *le cours garantit l'existence du minimum* $\min(E)$.
   - *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *notons* $H(n)$ *l'assertion* $f^n[\mathcal{P}(\mathbb{N})] = \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$.
     Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ *par récurrence.*

     Initialisation. *On a* $[\![0, +\infty[\![= \mathbb{N}$, *d'où* $H(0)$.

     Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $H(n)$. *Montrons* $H(n+1)$.
     On a $f^{n+1}[\mathcal{P}(\mathbb{N})] = f\big[f^n(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\big] = f\big[\mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)\big]$, *en utilisant la définition de* $(f^n[A])_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $H(n)$.
     Il reste donc à montrer que $f\big[\mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)\big] = \mathcal{P}([\![n+1, +\infty[\![)$, *ce que l'on va faire par double inclusion.*

- *Soit* $F \in f\big[\mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)\big]$. *On peut donc trouver* $E \in \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$ *tel que* $F = f(E)$. *On distingue alors deux cas.*
  - ▷ *Si* $E = \varnothing$, *on a* $F = \varnothing$, *donc* $F \in \mathcal{P}([\![n+1, +\infty[\![)$.
  - ▷ *Si* $E \neq \varnothing$, *il possède un minimum* $n_0 = \min(E) \in E$.
    Puisque $E \subseteq [\![n, +\infty[\![$, *on a* $n_0 \geqslant n$. *On distingue à nouveau deux cas.*
    - ◦ *Si* $n_0 = n$, *on a* $F = E \setminus \{n\}$. *Puisque* $E \subseteq [\![n, +\infty[\![$, *tous les éléments de* E *sont* $\geqslant n$, *donc tous les éléments de* F *sont* $> n$, *c'est-à-dire* $\geqslant n+1$, *ce qui montre l'inclusion* $F \subseteq [\![n+1, +\infty[\![$.
    - ◦ *Si* $n_0 > n$, *on a* $n_0 \geqslant n+1$, *donc* $E \subseteq [\![n+1, +\infty[\![$. A fortiori, F, *qui est inclus dans* E, *vérifie également* $F \subseteq [\![n+1, +\infty[\![$.

  Dans tous les cas, on a $F = f(E) \in \mathcal{P}([\![n+1, +\infty[\![)$.
- *Réciproquement, soit* $F \in \mathcal{P}([\![n+1, +\infty[\![)$. *Montrons* $F \in f[\mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)]$, *c'est-à-dire* $\exists E \in \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![) : f(E) = F$.
  Candidat : $E = \{n\} \cup F$. *Remarquons que, comme* $F \subseteq [\![n+1, +\infty[\![$, *cette union est disjointe.*
  - ▷ *On a clairement* $E \subseteq \{n\} \cup [\![n+1, +\infty[\![= [\![n, +\infty[\![$.
  - ▷ *Comme* $n \in E$, *on a* $E \neq \varnothing$ *et on a clairement* $n = \min E$, *donc*
  $$f(E) = E \setminus \{n\} = (\{n\} \cup F) \setminus \{n\} = F,$$
    ce qui conclut.

  Cela démontre $H(n+1)$, *et clôt la récurrence.*

▶ *Il reste à calculer* $f^\omega[\mathcal{P}(\mathbb{N})] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$. *Nous allons montrer, par double inclusion, que cette intersection est le singleton* $\{\varnothing\}$.

- *Soit* $E \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([\![n, +\infty]\!])$. *Montrons que* $E \in \{\varnothing\}$, *c'est-à-dire que* $E = \varnothing$.
  Supposons par l'absurde que E *possède un élément* $k \in E$. *On a alors* $E \not\subseteq [\![k+1, +\infty[\![$, *donc* $E \notin \mathcal{P}([\![k+1, +\infty[\![)$, *donc* $E \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$, *ce qui constitue une contradiction.*
- *Réciproquement,* $\varnothing$ *est inclus dans tout ensemble, donc* $\forall n \in \mathbb{N}, \varnothing \in \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$, *donc on a* $\varnothing \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$, *que l'on peut réécrire* $\{\varnothing\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![)$.

2. **Emboîtement.** Soit $f : X \to X$ et $A \subseteq X$.
   (a) On suppose que A est stable sous f. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1}[A] \subseteq f^n[A]$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* $f^{n+1}[A] \subseteq f^n[A]$.
   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ *par récurrence.*

   Initialisation. *Le fait que* A *soit stable sous* f *signifie* $f[A] \subseteq A$, *c'est-à-dire exactement* $P(0)$.

   Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$.
   L'assertion $P(n)$ *donne* $f^{n+1}[A] \subseteq f^n[A]$.
   D'après les propriétés de l'image directe et $P(n)$, *on a*
   $$f^{n+2}[A] = f\big[f^{n+1}[A]\big] \subseteq f\big[f^n[A]\big] = f^{n+1}[A],$$
   ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

(b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose $f^{n_0+1}[X] = f^{n_0}[X]$. Montrer qu'alors $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]$. Dans ce cas, qui est $f^\omega[X]$?

- *Soit $n \geqslant n_0$. Notons $s = n - n_0 \geqslant 0$, de telle sorte que $n = n_0 + s$. On a alors*

$$\begin{aligned} f^n[X] &= f^{n_0+s}[X] \\ &= f^s\left[f^{n_0}[X]\right] \\ &= f^s\left[f^{n_0+1}[X]\right] && \textit{(par hypothèse)} \\ &= f^{n_0+s+1}[X] = f^{n+1}[X]. \end{aligned}$$

On a ainsi montré $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n+1}[X]$, ce qui montre, après une récurrence immédiate, que $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]$.

- *On a alors*

$$\begin{aligned} f^\omega[X] &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n[X] \\ &= f^0[X] \cap f^1[X] \cap \cdots \cap f^{n_0}[X] && \textit{(car } \forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]\textit{)} \\ &= f^{n_0}[X]. && \textit{(car } f^{n_0}[X] \subseteq \cdots \subseteq f^1[X] \subseteq f^0[X]\textit{)} \end{aligned}$$

Dans la suite, on dira que la suite $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ *stationne* s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]$.

3. **Stabilité et images itérées.** Soit $f : X \to X$.

(a) Montrer que $f^\omega[X]$ est stable sous f.

Soit $y \in f^\omega[X]$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, y \in f^n[X]$. Montrons $f(y) \in f^\omega[X]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- *Si $n = 0$, on a tautologiquement $f(y) \in X = f^0[X]$.*
- *Si $n \geqslant 1$, on a $y \in f^{n-1}[X]$, donc $f(y) \in f\left[f^{n-1}[X]\right] = f^n[X]$.*

On a ainsi montré $\forall n \in \mathbb{N}, f(y) \in f^n[X]$, c'est-à-dire $f(y) \in f^\omega[X]$.

(b) Soit $A \subseteq X$ tel que $f[A] = A$. Montrer que $A \subseteq f^\omega[X]$.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion $A \subseteq f^n[X]$. Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.*

  Initialisation. *On a bien $A \subseteq X = f^0[X]$, d'où $P(0)$.*

  Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$.*

  Soit $a \in A$. Comme $A = f[A]$, on a $a \in f[A]$, donc on peut trouver $\widetilde{a} \in A$ tel que $a = f(\widetilde{a})$.
  D'après $P(n)$, on a $\widetilde{a} \in f^n[A]$, donc $a = f(\widetilde{a}) \in f\left[f^n[A]\right] = f^{n+1}[A]$.
  On a ainsi montré $A \subseteq f^{n+1}[A]$, ce qui montre $P(n+1)$ et clôt la récurrence.

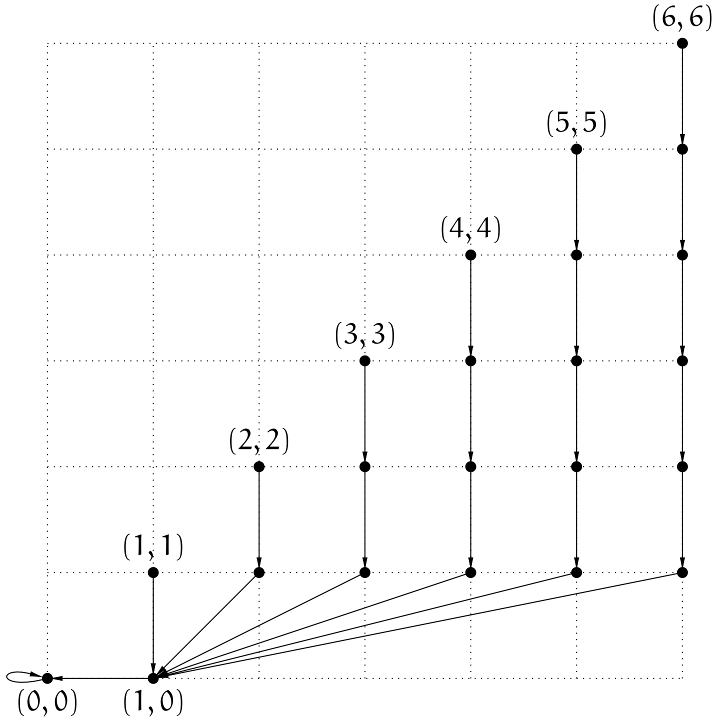
- *On a ainsi montré $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A, a \in f^n[X]$. En échangeant les deux quantificateurs (ce qui est loisible car ils sont du même type), on a bien $\forall a \in A, a \in f^\omega[X]$, c'est-à-dire $A \subseteq f^\omega[X]$).*

4. (a) Soit $f : X \to X$ une application telle que $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ stationne. Montrer que $f\left[f^\omega[X]\right] = f^\omega[X]$.

On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]$. On a vu que dans ce cas, $f^\omega[X] = f^{n_0}[X]$.
On a alors $f\left[f^\omega[X]\right] = f\left[f^{n_0}[X]\right] = f^{n_0+1}[X] = f^{n_0}[X] = f^\omega[X]$.

(b)$^+$ Donner un exemple d'ensemble X et d'application $f : X \to X$ tels que $f\big[f^\omega[X]\big] \neq f^\omega[X]$.

On va exploiter le dessin suivant, avec des « branches » toutes finies, mais de longueur non bornées.

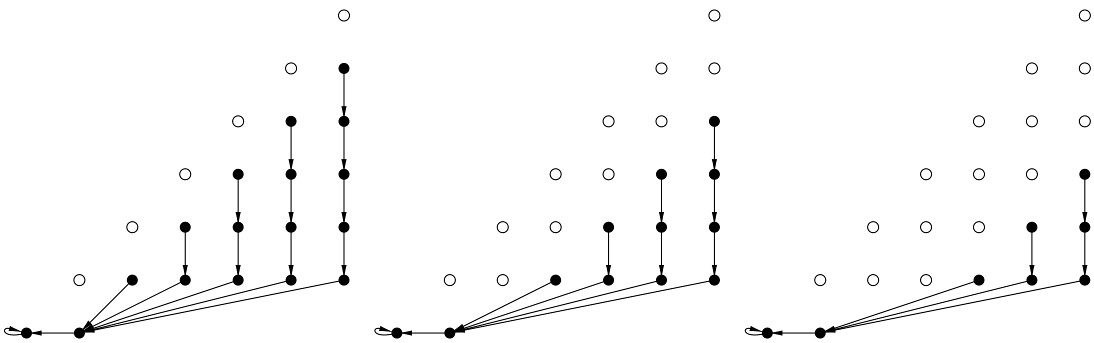


Plus précisément, on fixe $X = \{(0,0),(1,0)\} \cup \Big\{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \,\Big|\, j \leqslant i\Big\}$ *et on définit*

$$f : \begin{cases} X & \to \qquad\qquad X \\ (i,j) & \mapsto \begin{cases} (i,j-1) & \textit{si } j \geqslant 2 \\ (1,0) & \textit{si } j = 1 \\ (0,0) & \textit{si } j = 0. \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie facilement, par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, f^n[X] = \{(0,0),(1,0)\} \cup \Big\{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \,\Big|\, j+n \leqslant i\Big\},$$



$f[X]$ $f^2[X]$ $f^3[X]$

On en déduit alors (par distributivité)

$$f^\omega[X] = \{(0,0),(1,1)\} \cup \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \,|\, j+n \leqslant i\}}_{=\varnothing} = \{(0,0),(1,1)\}.$$

On a alors $f\big[f^\omega[X]\big] = \{(0,0)\} \neq f^\omega[X]$.

Remarque. *On peut également donner un exemple en trafiquant un peu l'exemple de la question 1c. Étant donné une partie non vide* E *de l'ensemble* $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *on décrétera – la définition est raisonnable – que* $\min(E) = \min(E \setminus \{+\infty\})$ *si* $E \neq \{+\infty\}$ *et que* $\min(\{+\infty\}) = +\infty$.
On peut alors considérer l'application

$$g : \begin{cases} \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}) \to & \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}) \\ \quad E \quad \mapsto & \begin{cases} E \setminus \{\min(E)\} & \textit{si } E \neq \varnothing \\ \varnothing & \textit{si } E = \varnothing. \end{cases} \end{cases}$$

et vérifier $\forall n \in \mathbb{N}, g^n[\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}})] = \mathcal{P}([\![n, +\infty[\![\cup \{+\infty\})$ *par un raisonnement très proche de celui que nous avions mené.*
On a alors $\mathcal{P}(\{+\infty\}) = g^\omega[\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}})] \neq g\left[g^\omega[\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}})]\right] = \{\varnothing\}$.

Partie II. Le cas fini.

Dans tout cette partie, X désigne un ensemble fini non vide.

5. Montrer que la suite $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ stationne.
   Dans toute la suite, on note Z_0 l'ensemble $f^\omega[X]$.

   Notons $C = \left\{ |f^n[X]| \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ *l'ensemble des cardinaux des ensembles de la suite* $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$.
   Il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$, *non vide puisque* $|X| = \left|f^0[X]\right| \in C$.
   Elle admet donc un minimum $m = \min(C)$. *On peut donc trouver* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|f^{n_0}[X]| = m$.
   D'après la question 2a, on a $f^{n_0+1}[X] \subseteq f^{n_0}[X]$, *ce qui montre en particulier* $\left|f^{n_0+1}[X]\right| \leqslant \left|f^{n_0}[X]\right| = m$.
   Mais par ailleurs, $\left|f^{n_0+1}[X]\right| \in C$, *donc* $\left|f^{n_0+1}[X]\right| \geqslant m$.
   On en déduit $\left|f^{n_0+1}[X]\right| = m$, *puis* $f^{n_0}[X] = f^{n_0+1}[X]$ *par inclusion et égalité des cardinaux.*
   D'après 2b, la suite $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ *stationne.*

6. Montrer que Z_0 est non vide et que f induit une bijection $\varphi : Z_0 \to Z_0$.

   - *On a montré à la question précédente que la suite* $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ *stationne. En particulier, on peut trouver* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $f^{n_0}[X] = f^\omega[X] = Z_0$.
     Puisque X *est non vide, on peut trouver* $x_0 \in X$. *On a alors* $f^{n_0}(x_0) \in f^{n_0}[X] = Z_0$, *qui est donc non vide.*
   - *D'après la question 4a, on a* $f[Z_0] = Z_0$.
     On en déduit que f *induit une surjection* $\varphi : Z_0 \to Z_0$.
     Comme X *est fini, sa partie* Z_0 *est* a fortiori *finie, et la surjection* φ *est automatiquement bijective.*

7. Soit $x \in X$. Justifier l'existence de $\delta(x) = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; f^k(x) \in Z_0 \right\}$.

   On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $Z_0 = f^{n_0}[X]$.
   En particulier, $f^{n_0}(x) \in Z_0$, *c'est-à-dire que* $n_0 \in \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; f^k(x) \in Z_0 \right\}$.
   L'ensemble $\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; f^k(x) \in Z_0 \right\}$ *est donc une partie non vide de* $\mathbb{N}$. *Elle admet donc un minimum, ce qui justifie l'existence de* $\delta(x)$.

8. Soit $x \in X$. Exprimer $\delta(f(x))$ en fonction de $\delta(x)$.

   On va montrer $\delta\left(f(x)\right) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \delta(x) = 0 \\ \delta(x) - 1 & \textit{si } \delta(x) > 0 \end{cases}$ *par disjonction de cas.*

- *Si* $\delta(x) = 0$, *on a* $x \in Z_0$, *donc* $f(x) \in Z_0$, *donc* $\delta(f(x)) = 0$.
- *Supposons* $\delta(x) > 0$ *et notons-le* p. *Montrons* $\delta(f(x)) = p - 1$.
  - *Comme* $f^p(x) = f^{p-1}(f(x)) \in Z_0$, *on a* $p - 1 \in \{k \in \mathbb{N} \mid f^n(x) \in Z_0\}$, *donc* $\delta(f(x)) \leqslant p - 1$.
  - *Supposons par l'absurde* $\delta(f(x)) < p - 1$.
    On pourrait donc trouver $\ell < p - 1$ *tel que* $f^\ell(f(x)) \in Z_0$.
    On en déduirait que $f^{\ell+1}(x) \in Z_0$, *c'est-à-dire que* $\ell + 1 \in \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, f^k(x) \in Z_0\right\}$.
    Or, $\ell + 1 < p = \delta(x) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, f^k(x) \in Z_0\right\}$.
    Cela fournit une contradiction.

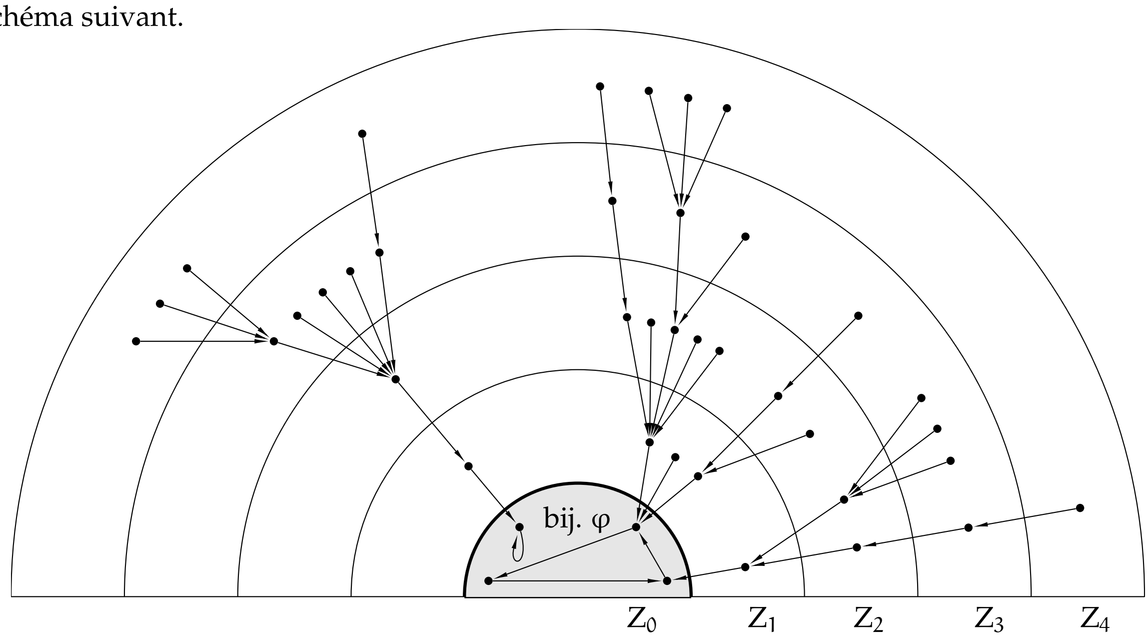
  Cela montre $\delta(f(x)) = p - 1$ *et conclut la démonstration.*

9. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $Z_k = \{x \in X \mid \delta(x) = k\}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   - pour tout $k \in \mathbb{N}$, Z_k est vide si et seulement si $k > N$;
   - on a le recouvrement disjoint $X = Z_0 \sqcup Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_N$;
   - pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, f induit une application $f : Z_k \to Z_{k-1}$.

   Soit $N = \max_{x \in X} \delta(x) \in \mathbb{N}$ *(dont la définition ne pose pas de problème car* X *est fini et non vide).*

   - *Montrons que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, Z_k *est vide si et seulement si* $k > N$.
     - *On montre le sens direct par contraposée. Soit* $k \leqslant N$.
       Comme $N = \max_{x \in X} \delta(x)$, *on peut trouver* $x_0 \in X$ *tel que* $\delta(x_0) = N$.
       Par une application répétée de la question précédente (escamotant une petite récurrence), on en déduit que $\delta\left(f^{N-k}(x_0)\right) = k$, *c'est-à-dire que* $f^{N-k}(x_0) \in Z_k$.
       En particulier, Z_k *n'est pas vide.*
     - *On montre le sens réciproque par contraposée. Si* Z_k *est non vide, on peut trouver* $x \in Z_k$. *On a alors* $k = \delta(x) \leqslant N$.
   - *Montrons que* $(Z_k)_{k=0}^N$ *est un recouvrement disjoint de* X.
     - *Soit* $i, j \in [\![0, N]\!]$.
       Si un élément $x \in X$ *appartient à* $Z_i \cap Z_j$, *on a* $\delta(x) = i$ *et* $\delta(x) = j$, *donc* $i = j$.
       Autrement dit, $Z_i \cap Z_j = \varnothing$ *dès que* $i \neq j$ *: les ensembles* $Z_0, Z_1, \ldots, Z_N$ *sont deux à deux disjoints.*
     - *Tout* $x \in X$ *possède une image* $\delta(x) \in [\![0, N]\!]$, *donc appartient à* $Z_{\delta(x)}$. *Cela montre* $\bigcup_{i=0}^{N} Z_i = X$.
   - *Soit* $k \in [\![1, N]\!]$.
     Soit $x \in Z_k$.
     D'après la question précédente, $\delta(f(x)) = \delta(x) - 1 = k - 1$, *donc* $f(x) \in Z_{k-1}$.
     Cela montre que f *induit une application* $Z_k \to Z_{k-1}$.

Graphiquement, on a ainsi décomposé l'ensemble X en « zones » Z_k, de telle sorte que f envoie Z_k dans Z_{k-1} quand $k > 0$, et induise une bijection φ de Z_0 sur lui même, ce que l'on peut illustrer par le schéma suivant.



Partie III. *Äquivalenzsatz*[1] et conséquences.

10. **Lemme fondamental de Dedekind.** Soit X un ensemble, $j : X \to X$ une injection et $M \subseteq X$ tel que $j[X] \subseteq M$. Le but de cette question est de montrer que X et M sont équipotents.
   (a) Montrer que X et M sont stables sous j.

   ► *Comme* j *a pour codomaine* X, *on a* $j[X] \subseteq X$, *donc* X *est stable sous* j.
   ► *On a* $M \subseteq X$, *donc* $j[M] \subseteq j[X] \subseteq M$, *donc* M *est stable sous* j.

   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \left(j^n[M] \subseteq j^n[X] \text{ et } j^{n+1}[X] \subseteq j^n[M]\right)$.

   On a $j^0[M] = M \subseteq X = j^0[X]$ *et* $j^1[X] \subseteq M = j^0[M]$.
   On montre alors l'assertion générale par une récurrence immédiate, à l'aide des propriétés de l'image directe.

   (c) En déduire que $j^\omega[M] = j^\omega[X]$. On appellera cette partie K.

   On procède par double inclusion.
   ► *Soit* $x \in j^\omega[M]$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $x \in j^n[M]$, *donc* $x \in j^n[X]$. *On en déduit* $x \in j^\omega[X]$.
   ► *Soit* $x \in j^\omega[X]$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $x \in j^{n+1}[X]$, *donc* $x \in j^n[M]$. *On en déduit* $x \in j^\omega[M]$.

   (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$B_k = \begin{cases} j^n[X] & \text{si } k = 2n \\ j^n[M] & \text{si } k = 2n+1. \end{cases}$$

   Que peut-on dire sur la suite d'ensembles $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à l'aide des questions précédentes ?

   Les questions précédentes montrent $\forall k \in \mathbb{N}, B_{k+1} \subseteq B_k$ *et* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} j^n[X] \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} j^n[M] = K$ *(on dira que les ensembles sont* emboîtés*).*
   Remarquons par ailleurs que $B_0 = X$.

1. Ce théorème possède une multitude de noms, souvent piochés parmi ceux des mathématiciens allemands Cantor, Dedekind, Schröder et Bernstein. Son histoire, compliquée, s'écoule notamment de sa formulation par Cantor en 1887 à la thèse de Bernstein en 1898. Le nom *Äquivalenzsatz* (« théorème d'équivalence ») a été proposé par Cantor.

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $A_k = B_k \setminus B_{k+1}$.
Montrer que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement disjoint de $X \setminus K$ et que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $M \setminus K$.

Soit $x \in X$.
Nous allons montrer que soit x *appartient à* K*, soit il appartient à* B_k *pour un unique* $k \in \mathbb{N}$*. Cela montrera que les ensembles de la suite* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sont disjoints (par unicité) et que tout élément de* $X \setminus K$ *appartient à l'un des ensembles de la suite, c'est-à-dire que* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = X \setminus K$.

Considérons $I = \{k \in \mathbb{N} \,|\, x \in B_k\}$*. On distingue deux cas.*

- *Supposons que* $I \neq \mathbb{N}$*. On peut donc trouver* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \notin B_{k_0}$*. Par la propriété d'emboîtement signalée plus haut, on en déduit que* x *n'appartient à aucun ensemble de la forme* B_k*, avec* $k \geqslant B_{k_0}$.
  Autrement dit, l'ensemble I *est majoré. Il est par ailleurs non vide (*$B_0 = X$*, donc* $0 \in I$*), donc il admet un maximum* $\kappa = \max(I)$*. La propriété d'emboîtement montre alors que* $I = [\![0, \kappa]\!]$.
  Ainsi,
  - *pour* $\ell < \kappa$*, on a* $x \notin A_\ell = B_\ell \setminus B_{\ell+1}$*, car* $x \in B_{\ell+1}$ *;*
  - *pour* $\ell = \kappa$*, on a* $x \in B_\kappa$ *et* $x \notin B_{\kappa+1}$*, donc* $x \in A_\kappa = B_\kappa \setminus B_{\kappa+1}$ *;*
  - *pour* $\ell > \kappa$*, on a* $x \notin B_\ell$*.* A fortiori, $x \notin A_\ell$ *et* $x \notin K$.
- *Si* $I = \mathbb{N}$*, on a* $x \in K$.
  Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$*, on a alors* $x \notin A_\ell = B_\ell \setminus B_{\ell+1}$*, car* $x \in B_{\ell+1}$.

Montrons $M \setminus K = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$.

- *Soit* $x \in M \setminus K$*. Comme* $x \in X \setminus K$*, on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in A_k$.
  Comme $A_0 = X \setminus M$*, on a* $k \neq 0$.
  On en déduit que $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$.
- *Réciproquement, soit* $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$.
  On a clairement $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X \setminus K$*, donc* $x \notin K$.
  D'après le caractère disjoint de la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, on a* $x \notin A_0$*, c'est-à-dire* $x \notin X \setminus M$*, c'est-à-dire* $x \in M$.
  On en déduit $x \in M \setminus K$*, ce qui conclut.*

(f) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, j induit une bijection $j_k : A_k \to A_{k+2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
L'injectivité de j *montre que* j *induit une bijection* $j_k : A_k \to j[A_k]$*. Il reste à déterminer* $j[A_k]$.
Montrons déjà que, quels que soient $C, D \subseteq X$*, on a* $j[C \setminus D] = j[C] \setminus j[D]$.

- *Soit* $y \in j[C \setminus D]$*. On peut donc trouver* $x \in C \setminus D$ *tel que* $y = j(x)$.
  Comme $x \in C$*, on a* $y \in j[C]$.
  Supposons par l'absurde que $y \in j[D]$*. On pourrait alors trouver* $x' \in D$ *tel que* $y = j(x')$.
  Par injectivité de j*, on en déduit* $x = x'$*, donc* $x \in D$*, ce qui était exclu.*
  On a donc montré $y \in j[C]$ *et* $y \notin j[D]$*, c'est-à-dire* $y \in j[C] \setminus j[D]$.
- *Réciproquement, soit* $y \in j[C] \setminus j[D]$.
  Comme $y \in j[C]$*, on peut trouver* $x \in C$ *tel que* $y = j(x)$.
  Si l'on avait $x \in D$*, on aurait* $y \in j[D]$*, ce qui est exclu, donc* $x \in C \setminus D$.
  Cela démontre $y \in j[C \setminus D]$.

On peut maintenant conclure.

- *Si* k *est pair, on peut trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $k = 2n$ *et on a alors*

$$j[A_k] = j\big[j^n[X] \setminus j^n[M]\big] = j\big[j^n[X]\big] \setminus j\big[j^n[M]\big] = j^{n+1}[X] \setminus j^{n+1}[M] = A_{k+2}.$$

- *Si* k *est impair, on peut trouver* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $k = 2n+1$ *et on a alors*

$$j[A_k] = j\big[j^n[M] \setminus j^{n+1}[X]\big] = j\big[j^n[M]\big] \setminus j\big[j^{n+1}[M]\big] = j^{n+1}[X] \setminus j^{n+2}[M] = A_{k+2}.$$

(g) **Pour l'inspiration.** Trouver une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \equiv n \pmod 2$.

On vérifie facilement que

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ m \mapsto & \begin{cases} m+2 & \textit{si } m \textit{ pair} \\ m & \textit{si } m \textit{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

convient.

(h) Conclure la démonstration du lemme fondamental de Dedekind.

Notons $X_0 = K \cup \bigcup_{\substack{\ell \in \mathbb{N} \\ \ell \textit{ impair}}} A_\ell \subseteq M.$

On sait alors que $(A_k)_{k \in 2\mathbb{N}}$ *est un recouvrement disjoint de* $X \setminus X_0$ *et* $(A_{k+2})_{k \in 2\mathbb{N}}$, *de* $M \setminus X_0$.
Notons

$$\varphi : \begin{cases} X \to & M \\ x \mapsto & \begin{cases} x & \textit{si } x \in X_0 \\ j_k(x) & \textit{si } x \in A_k \textit{ pour un certain } k \textit{ pair} \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{et} \qquad \psi : \begin{cases} M \to & X \\ x \mapsto & \begin{cases} x & \textit{si } x \in X_0 \\ j_k(x) & \textit{si } x \in A_{k+2} \textit{ pour un certain } k \textit{ pair.} \end{cases} \end{cases}$$

Les applications sont bien définies.

- *On a* $\psi \circ \varphi : X \to X$. *Soit* $x \in X$.
  - *Si* $x \in A_0$, *on a* $\varphi(x) = x \in A_0$, *donc* $\psi(\varphi(x)) = x$.
  - *Si, pour un certain entier pair* k, $x \in A_k$, *on a* $\varphi(x) = j_k(x) \in A_{k+2}$, *donc on a* $\psi(\varphi(x)) = j_k^{-1}(j_k(x)) = x$.

  Dans tous les cas, on a $(\psi \circ \varphi)(x) = x$, *ce qui montre* $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$.
- *On montre exactement de la même façon que* $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$.

Cela montre que $\varphi : X \to M$ *et* $\psi : M \to X$ *sont des bijections réciproques, et donc que* X *et* M *sont équipotents.*

11. ***Äquivalenzsatz.*** Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$. Montrer que E et F sont équipotents.

Par composition, $j = g \circ f : E \to E$ *est une injection.*
Par ailleurs, pour tout $x \in E$, $j(x) = g(f(x)) \in g[F]$, *car* $f(x) \in F$.
On peut donc appliquer le lemme fondamental de Dedekind à l'injection $j : E \to E$ *et la partie* $M = g[F]$.
On en déduit que E *et* $g[F]$ *sont équipotents.*
Comme g *est injective, elle induit une bijection* $F \to g[F]$ *donc* F *et* $g[F]$ *sont équipotents.*
On en déduit que E *et* F *sont équipotents, ce qui conclut.*

12. **Quelques ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$.**

(a) On note $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui sont *presque nulles* (ou *nulles à partir d'un certain rang*), c'est-à-dire telles que $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n = 0$.

En utilisant la décomposition en facteurs premiers, montrer que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers.

Une manière d'énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique est de dire que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} & \to & \mathbb{N}^* \\ (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} p_n^{\nu_n} \end{cases}$$

est une bijection : l'existence de la décomposition en facteurs premiers démontre la surjectivité de Φ, alors que l'unicité démontre son injectivité. Notons que, même s'il a l'air infini, le produit $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} p_n^{\nu_n}$ est fini : étant donné $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, on peut trouver un ensemble fini I tel que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus I, \nu_n = 0$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \setminus I, p_n^{\nu_n} = 1$, et on peut ignorer ces facteurs dans le produit. Autrement dit, le produit dans la définition de Φ est une manière légèrement abusive d'écrire le produit fini $\displaystyle\prod_{n\in I} p_n^{\nu_n}$.

L'application Φ montre donc que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents. Comme $n \mapsto n-1$ définit une bijection $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, on en déduit, par composition, que $\Psi : n \mapsto \Phi(n) - 1$ est une bijection $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$.

(b) En utilisant l'*Äquivalenzsatz*, en déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathbb{N}^r$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

- ► *L'application* $i : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N}^r \\ n \mapsto & (n, 0, 0, \dots, 0) \end{cases}$ *est clairement injective.*
- ► *L'application* $j : \begin{cases} \mathbb{N}^r & \to & \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ (n_1, \dots, n_r) & \mapsto & (n_1, \dots, n_r, 0, 0, \dots) \end{cases}$ *est clairement injective.*

  Par composition, $\Psi \circ j : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ est injective.

*D'après l'*Äquivalenzsatz*, on en déduit que $\mathbb{N}^r$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.*

(c) Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents.

- ► *L'application* $i : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n \end{cases}$ *est clairement injective.*
- ► *On vérifie facilement que l'application* $j : \begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{N}^2 \\ n \mapsto & \begin{cases} (n, 0) & \text{si } n \geqslant 0 \\ (0, |n|) & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{cases}$ *est injective, par exemple parce que, si l'on définit* $s : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \mapsto & a - b, \end{cases}$ *on a $s \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.*

  La question précédente montre par ailleurs qu'il existe des bijections $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, choisissons-en une, notée χ.

  La composition $\chi \circ j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ est alors injective.

  *D'après l'*Äquivalenzsatz*, on en déduit que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents.*

(d) Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

- ► *L'application* $i : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto n \end{cases}$ *est clairement injective.*
- ► *Définissons une injection $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^3$: étant donné $r \in \mathbb{Q}$, on écrit r sous la forme $\varepsilon \dfrac{p}{q}$, où*

- $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ *est le signe de* r *(convenons que, si* $r = 0$*, on choisit* $\varepsilon = 1$*) ;*
- $p \in \mathbb{N}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *sont tels que* $\dfrac{p}{q}$ *soit la forme irréductible du rationnel* $|r|$*. Autrement dit, on demande que* p *et* q *soient premiers entre eux.*

L'application $j : r \mapsto (1 + \varepsilon, p, q)$ *est alors clairement injective.*

Comme dans la question précédente, si $\theta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *est une bijection,* $\theta \circ j : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ *est injective. D'après l'*Äquivalenzsatz*, on en déduit que* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont équipotents.*

13.$^{+}$ **Une autre application.** Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

- *On montre facilement (cela a d'ailleurs plus ou moins été fait en cours) que* $\Upsilon : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{cases}$ *est une application injective.*
- - *On montre facilement que* $\Gamma : \begin{cases} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \\ f \mapsto \operatorname{gr}(f) = \left\{(n, f(n)) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \end{cases}$ *est une application injective.*
  - *On dispose d'une bijection* $\chi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$*. On montre facilement que* $\widetilde{\chi} : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A \mapsto \chi[A] \end{cases}$ *est alors également une bijection.*

  Par composition, $\widetilde{\chi} \circ \Gamma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *est injective.*

*D'après l'*Äquivalenzsatz*, on en déduit que* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sont équipotents.*