DM 03 : images itérées et applications

Problème. Images itérées.

Dans tout le problème, étant donné un ensemble X, une application $f : X \to X$ et une partie $A \subseteq X$, on définit la suite d'ensembles $(f^n[A])_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$f^0[A] = A \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1}[A] = f\big[f^n[A]\big].$$

De manière peut-être plus parlante (et plus effrayante), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n[A] = f\Big[f\Big[f\big[\cdots f[A]\cdots\big]\Big]\Big],$$

avec n occurrences de la lettre f (et n paires de crochets).
On définit alors $f^\omega[A] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n[A]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera également $f^n = f\circ f\circ\cdots\circ f$ (avec n occurrences de la lettre f) et $f^0 = \mathrm{id}_X$, de telle sorte que $f^n[A]$ soit l'image directe de A par l'application f^n.

La partie III s'intéresse aux ensembles infinis et est indépendante de la partie II.

Partie I. Exemples et généralités.

1. **Exemples.** Dans les trois cas suivants, déterminer $f^n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f^\omega[X]$.
   (a) $X = \mathbb{N}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & n+1. \end{cases}$
   (b) X est un ensemble quelconque, et $f : X \to X$ est une application surjective.
   (c) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ E \mapsto & \begin{cases} E \setminus \{\min(E)\} & \text{si } E \neq \varnothing \\ \varnothing & \text{si } E = \varnothing. \end{cases} \end{cases}$
   Attention ! *la dernière application « mange » des ensembles. On veillera donc à distinguer son évaluation $f(E)$ en un élément $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et son image directe $f[A]$ pour une partie $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$: avec ces notations, E est un ensemble de nombres, alors que A est un ensemble d'ensembles.*
2. **Emboîtement.** Soit $f : X \to X$ et $A \subseteq X$.
   (a) On suppose que A est stable sous f. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1}[A] \subseteq f^n[A]$.
   (b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose $f^{n_0+1}[X] = f^{n_0}[X]$. Montrer qu'alors $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]$.
   Dans ce cas, qui est $f^\omega[X]$?

Dans la suite, on dira dans que la suite $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ *stationne* s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\forall n \geqslant n_0, f^n[X] = f^{n_0}[X]$.

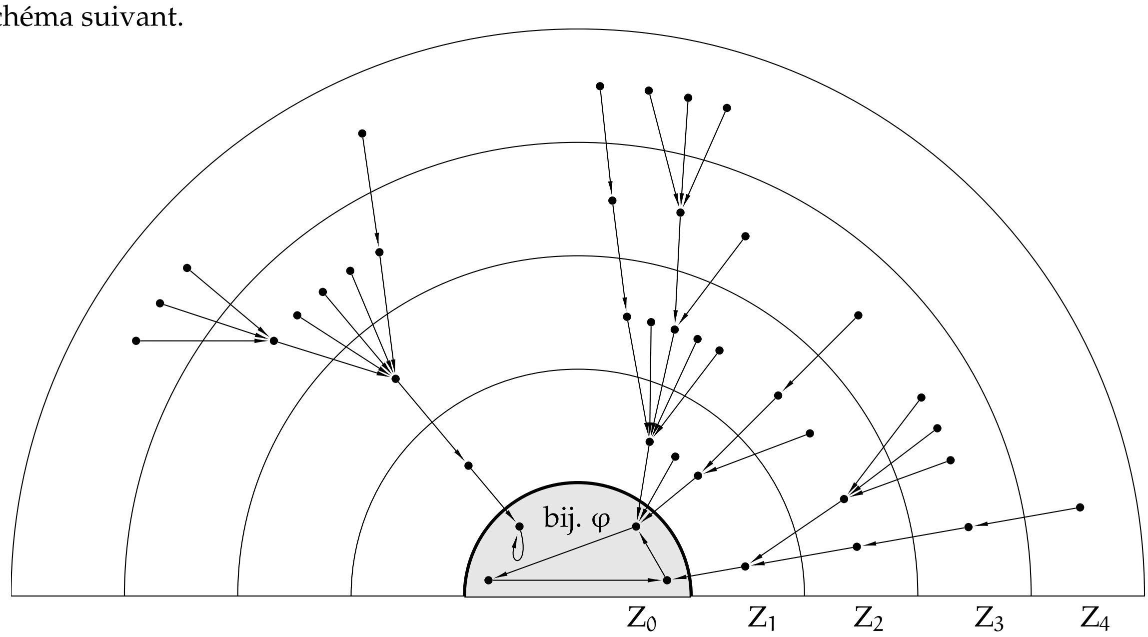
3. **Stabilité et images itérées.** Soit $f : X \to X$.
   (a) Montrer que $f^\omega[X]$ est stable sous f.
   (b) Soit $A \subseteq X$ tel que $f[A] = A$. Montrer que $A \subseteq f^\omega[X]$.
4. (a) Soit $f : X \to X$ une application telle que $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ stationne. Montrer que $f\big[f^\omega[X]\big] = f^\omega[X]$.
   (b)$^+$ Donner un exemple d'ensemble X et d'application $f : X \to X$ tels que $f\big[f^\omega[X]\big] \neq f^\omega[X]$.

Partie II. Le cas fini.

Dans tout cette partie, X désigne un ensemble fini non vide.

5. Montrer que la suite $(f^n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ stationne.
   Dans toute la suite, on note Z_0 l'ensemble $f^\omega[X]$.
6. Montrer que Z_0 est non vide et que f induit une bijection $\varphi : Z_0 \to Z_0$.
7. Soit $x \in X$. Justifier l'existence de $\delta(x) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, f^k(x) \in Z_0 \right\}$.
8. Soit $x \in X$. Exprimer $\delta(f(x))$ en fonction de $\delta(x)$.
9. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $Z_k = \{x \in X \mid \delta(x) = k\}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   - pour tout $k \in \mathbb{N}$, Z_k est vide si et seulement si $k > N$;
   - on a le recouvrement disjoint $X = Z_0 \sqcup Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_N$;
   - pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, f induit une application $f : Z_k \to Z_{k-1}$.

> Graphiquement, on a ainsi décomposé l'ensemble X en « zones » Z_k, de telle sorte que f envoie Z_k dans Z_{k-1} quand $k > 0$, et induise une bijection φ de Z_0 sur lui même, ce que l'on peut illustrer par le schéma suivant.



Partie III. *Äquivalenzsatz* [1] et conséquences.

10. **Lemme fondamental de Dedekind.** Soit X un ensemble, $j : X \to X$ une injection et $M \subseteq X$ tel que $j[X] \subseteq M$. Le but de cette question est de montrer que X et M sont équipotents.
    (a) Montrer que X et M sont stables sous j.
    (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(j^n[M] \subseteq j^n[X] \text{ et } j^{n+1}[X] \subseteq j^n[M] \right)$.
    (c) En déduire que $j^\omega[M] = j^\omega[X]$. On appellera cette partie K.
    (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$B_k = \begin{cases} j^n[X] & \text{si } k = 2n \\ j^n[M] & \text{si } k = 2n+1. \end{cases}$$

    Que peut-on dire sur la suite d'ensembles $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à l'aide des questions précédentes ?

---

1. Ce théorème possède une multitude de noms, souvent piochés parmi ceux des mathématiciens allemands Cantor, Dedekind, Schröder et Bernstein. Son histoire, compliquée, s'écoule notamment de sa formulation par Cantor en 1887 à la thèse de Bernstein en 1898. Le nom *Äquivalenzsatz* (« théorème d'équivalence ») a été proposé par Cantor.

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $A_k = B_k \setminus B_{k+1}$.
Montrer que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement disjoint de $X \setminus K$ et que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $M \setminus K$.

(f) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, j induit une bijection $j_k : A_k \to A_{k+2}$.

(g) **Pour l'inspiration.** Trouver une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \equiv n \pmod 2$.

(h) Conclure la démonstration du lemme fondamental de Dedekind.

11. ***Äquivalenzsatz.*** Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$. Montrer que E et F sont équipotents.

12. **Quelques ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$.**

(a) On note $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui sont *presque nulles* (ou *nulles à partir d'un certain rang*), c'est-à-dire telles que $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n = 0$.
En utilisant la décomposition en facteurs premiers, montrer que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

(b) En utilisant l'*Äquivalenzsatz*, en déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathbb{N}^r$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

(c) Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents.

(d) Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

13.$^+$ **Une autre application.** Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.