DM 04 : sommes [corrigé]

Exercice 1. Minoration d'Oresme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ *par la relation de Chasles.*
   Par minoration brutale, on a donc

   $$H_{2n} - H_n \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$.

   On peut faire une preuve par récurrence. On va utiliser le télescopage, ce qui revient au même.
   On a

   $$\begin{aligned} H_{2^n} - H_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(H_{2^{k+1}} - H_{2^k}\right) && \textit{(télescopage)} \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} && \textit{(ques. préc., car } \forall k \in \mathbb{N}, 2^k \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\ &\geqslant \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $H_{2^n} \geqslant H_1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{n}{2}$.

3. En utilisant les outils du lycée, qu'en déduit-on sur la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

   La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est clairement croissante. La question précédente entraîne qu'elle est non majorée. On en déduit* $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2. Écriture en base $\pm b$.

1. **Écriture en base** b**.** Soit $b \geqslant 2$ un entier. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on considère

   $$\varphi_\ell : \begin{cases} [\![0, b-1]\!]^\ell & \to [\![0, b^\ell - 1]\!] \\ (c_0, \dots, c_{\ell-1}) & \mapsto \sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\, b^k. \end{cases}$$

   (a) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Montrer que φ_ℓ est bien définie et injective. Qu'en déduit-on ?

   ▶ *Pour tout* $(c_0, \dots, c_{\ell-1}) \in [\![0, b-1]\!]^{\ell-1}$, *on a* $\forall k \in [\![0, \ell-1]\!], 0 \leqslant c_k \leqslant b-1$, *donc*

   $$0 \leqslant \sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\, b^k \leqslant (b-1) \sum_{k=0}^{\ell-1} b^k = b^\ell - 1,$$

   ce qui montre que φ_ℓ *est bien définie.*

- *On procède par contraposée. Soit* $c = (c_0, \dots, c_{\ell-1})$ *et* $d = (d_0, \dots, d_{\ell-1})$ *deux éléments différents de* $[\![0, b-1]\!]^\ell$*. On va donner deux démonstrations du fait que leur image par* φ_ℓ *sera différente.*

  Les deux vont avoir la même structure : on va isoler dans la différence $\varphi_\ell(d) - \varphi_\ell(c)$ *un terme « dominant » non nul et on va montrer que les autres termes sont en un sens « négligeables » devant ce terme dominant, ce qui rend la différence non nulle.*

  Démonstration « par le chiffre de poids fort ». *Puisque les deux* ℓ*-uplets sont différents, on peut considérer le dernier indice* p *tel que* $c_p \neq d_p$*. Quitte à échanger* c *et* d*, on suppose même* $d_p > c_p$*.*

  (Formellement, l'ensemble $\{i \in [\![0, \ell-1]\!] \mid c_i \neq d_i\}$ *est non vide, et on considère son maximum* $p = \max\{i \in [\![0, \ell-1]\!] \mid c_i \neq d_i\}$*.)*

  On a alors

$$
\begin{aligned}
\varphi_\ell(d) - \varphi_\ell(c) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} (d_k - c_k)\, b^k \\
&= \sum_{k=0}^{p} (d_k - c_k)\, b^k && \textit{(car } c_k = d_k \textit{ dès que } k > p\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (d_k - c_k)\, b^k + (d_p - c_p)\, b^p.
\end{aligned}
$$

  Or,

  - *d'un côté,* $d_p > c_p$*, donc* $d_p - c_p \geqslant 1$*. On en déduit que* $(d_p - c_p)\, b^p \geqslant b^p$ *;*
  - *de l'autre côté, on a* $\forall k \in [\![0, p-1]\!], -(p-1) \leqslant d_k - c_k \leqslant p-1$*, donc*

$$
\sum_{k=0}^{p-1} (d_k - c_k)\, b^k \geqslant -(b-1) \sum_{k=0}^{p-1} b^k = -\big(b^p - 1\big).
$$

  On en déduit $\varphi_\ell(d) - \varphi_\ell(c) \geqslant 1$*, donc* $\varphi_\ell(d) > \varphi_\ell(c)$*, ce qui conclut.*

  Démonstration « par le chiffre de poids faible ». *Puisque les deux* ℓ*-uplets sont différents, on peut considérer le premier indice* q *tel que* $c_q \neq d_q$*.*

  (Formellement, l'ensemble $\{i \in [\![0, \ell-1]\!] \mid c_i \neq d_i\}$ *est non vide, et on considère son minimum* $q = \min\{i \in [\![0, \ell-1]\!] \mid c_i \neq d_i\}$*.)*

  On a alors

$$
\begin{aligned}
\varphi_\ell(d) - \varphi_\ell(c) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} (d_k - c_k)\, b^k \\
&= \sum_{k=q}^{\ell-1} (d_k - c_k)\, b^k && \textit{(car } c_k = d_k \textit{ dès que } k < q\textit{)} \\
&= (d_q - c_q)\, b^p + \sum_{k=q+1}^{\ell-1} (d_k - c_k)\, b^k.
\end{aligned}
$$

  Or,

  - *d'un côté, pour tout* $k \geqslant q+1$*, la puissance* b^k *est multiple de* b^{q+1}*, donc le deuxième terme* $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{\ell-1} (d_k - c_k)\, b^k$ *est multiple de* b^{q+1} *;*

- *de l'autre côté,* b^{q+1} *ne peut pas diviser le premier terme* $(d_q - c_q)\, b^q$ *: si c'était le cas, on aurait que* b *divise* $d_q - c_q$*. Or, la différence* $d_q - c_q$ *appartient à l'intervalle entier* $[\![-(b-1), b-1]\!]$*, dans lequel le seul multiple de* b *est* 0*. On aurait donc* $d_q = c_q$*, ce qui a été exclu.*

On en déduit $\varphi_\ell(c) \not\equiv \varphi_\ell(d) \pmod{b^{q+1}}$*, donc* $\varphi_\ell(c) \neq \varphi_\ell(d)$*, ce qui conclut.*

- *Les ensembles* $[\![0, b-1]\!]^\ell$ *et* $[\![0, b^\ell - 1]\!]$ *étant finis et de même cardinal (à savoir* b^ℓ*), on en déduit que* φ_ℓ *est une bijection.*

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle (c'est-à-dire nulle à partir d'un certain rang) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k \in [\![0, b-1]\!] \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\, b^k = n.$$

(Remarquons que, même si la somme a superficiellement l'air infini, la presque-nullité de $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fait qu'il s'agit en fait d'une somme finie dès que l'on ignore les 0).

Soit $n \in \mathbb{N}$*. Montrons l'existence et l'unicité d'une suite presque nulle vérifiant les conditions de l'énoncé.*

Existence. *On peut trouver* $\ell \in \mathbb{N}$ *tel que* $b^\ell - 1 \geqslant n$ *(on peut par exemple utiliser* $\ell = n$*, après avoir montré par récurrence* $\forall m \in \mathbb{N}, b^m > m$*).*
Par surjectivité de φ_ℓ*, on peut alors trouver* $c = (c_0, \ldots, c_{\ell-1}) \in [\![0, d-1]\!]^\ell$ *tel que* $n = \varphi_\ell(c)$*.*
On a donc

$$n = \varphi_\ell(c) = \sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\, b^k,$$

ce qui montre que la suite presque nulle $(c_0, \ldots, c_{\ell-1}, 0, 0, 0, \ldots)$ *convient.*

Unicité. *Soit* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *deux suites presque nulles convenant.*
On peut trouver $\ell \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall k \geqslant \ell, c_k = d_k = 0$*. On a alors*

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\, b^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\, b^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k\, b^k = \sum_{k=0}^{\ell-1} d_k\, b^k,$$

c'est-à-dire que les deux éléments $(c_k)_{k=0}^{\ell-1}$ *et* $(d_k)_{k=0}^{\ell-1}$ *de* $[\![0, b-1]\!]^\ell$ *ont la même image par* φ_ℓ*.*
On en déduit $(c_k)_{k=0}^{\ell-1} = (d_k)_{k=0}^{\ell-1}$ *d'où il vient* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} = (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$*.*
Cela montre l'unicité, et conclut.

2. **Écriture en base** $-b$**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une unique suite presque nulle $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k \in [\![0, b-1]\!] \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\, (-b)^k = n.$$

On va suivre (plus rapidement), les étapes de la question précédente. Il est techniquement plus facile de fixer une parité pour la longueur des listes, on va les choisir de longueur paire.

- *Soit* $\ell = 2m \in \mathbb{N}^*$ *un entier pair et* $(c_0, \ldots, c_{\ell-1}) \in [\![0, b-1]\!]^{\ell-1}$*.*
On a

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\, (-b)^k = \sum_{\substack{k\in[\![0,\ell-1]\!] \\ k \text{ pair}}} c_k\, (-b)^k + \sum_{\substack{k\in[\![0,\ell-1]\!] \\ k \text{ impair}}} c_k\, (-b)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{m} c_{2j}\, b^{2j} - \sum_{j=0}^{m} c_{2j+1}\, b^{2j+1}.$$

On va majorer les deux termes de cette différence. On a

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,\ell-1]\!]\\ k\ pair}} c_k\, b^k = \sum_{j=0}^{m-1} c_{2j}\, b^{2j} \leqslant (b-1)\sum_{j=0}^{m-1} b^{2j} = (b-1)\frac{b^{2m}-1}{b^2-1} = \frac{b^\ell - 1}{b+1}$$

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,\ell-1]\!]\\ k\ pair}} c_k\, b^k = \sum_{j=0}^{m-1} c_{2j+1}\, b^{2j+1} \leqslant b(b-1)\sum_{j=0}^{m-1} b^{2j} = b(b-1)\frac{b^{2m}-1}{b^2-1} = \frac{b\big(b^\ell - 1\big)}{b+1}.$$

On obtient ainsi l'encadrement $-\dfrac{b\big(b^\ell-1\big)}{b+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\,(-b)^k \leqslant \dfrac{b^\ell-1}{b+1}$.

In fine, *on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\,(-b)^k \in E_\ell$, *où l'on a noté* E_ℓ *l'intervalle entier* $\left[\!\left[-b\dfrac{b^\ell-1}{b+1}, \dfrac{b^\ell-1}{b+1}\right]\!\right]$, *dont on peut déjà noter qu'il a exactement* b^ℓ *éléments.*

- *Le point précédent montre que l'application*

$$\psi_\ell : \begin{cases} [\![0, b-1]\!]^\ell & \to \quad E_\ell \\ (c_0, \dots, c_{\ell-1}) & \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k\,(-b)^k \end{cases}$$

  est bien définie.
  On vérifie, comme dans la question précédente, que si $c, d \in [\![0, b-1]\!]$ *sont égaux jusqu'au rang* $q-1$, *mais que* $c_q \neq d_q$, *alors* $\psi_\ell(c) \not\equiv \psi_\ell(d) \pmod{b^{q+1}}$, *ce qui montre que* ψ_ℓ *est injective.*
  Le même argument de cardinalité qu'à la question précédente montre que $\psi_\ell : [\![0, b-1]\!]^\ell \to E_\ell$ *est bijective.*

- *En utilisant le fait que* $b > 1$, *on a* $\displaystyle\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} E_\ell = \mathbb{Z}$, *et on peut alors singer la preuve de la question précédente pour obtenir l'existence et l'unicité d'une représentation « en base* $-b$ *» de tout entier* $n \in \mathbb{Z}$.

3. Donner les écritures en base 7 et en base -7 de l'entier 1563.

   On a $1563 = 4\times 7^3 + 3\times 7^2 + 6\times 7^1 + 2\times 7^0 = 1\times(-7)^4 + 3\times(-7)^3 + 4\times(-7)^2 + 1\times(-7)^1 + 2\times(-7)^0$.

Exercice 3. Inversion de Möbius-Pascal.

1. **La formule.**
   (a) Soit $0 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers naturels.
   En faisant attention aux cas particuliers, calculer la somme

$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{k}.$$

   On a

$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \frac{n!}{q!\,(n-q)!}\,\frac{(n-q)!}{k!\,(n-q-k)!} \\
&= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \frac{n!}{q!\,k!\,(n-q-k)!} \\
&= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{q!\,(n-q-k)!} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n-k}{q} \\
&= (1-1)^{n-k} && \textit{(binôme de Newton)} \\
&= \begin{cases} 1 & \textit{si } n = k \\ 0 & \textit{si } n > k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On définit sa *transformée binomiale* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

En utilisant la question précédente, montrer la *formule d'inversion*

$$
\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p.
$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} a_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=k}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} \right) a_k.
\end{aligned}
$$

Or, pour tous $0 \leqslant k \leqslant n$, *on a*

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=k}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} &= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{n-q} \binom{n-q}{k} && \begin{bmatrix} q = n-p \\ p = n-q \end{bmatrix} \\
&= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{k} && \begin{bmatrix} q = n-p \\ p = n-q \end{bmatrix} \\
&= \mu(k, n).
\end{aligned}
$$

On peut reprendre le calcul :

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p &= \sum_{k=0}^{n} \mu(k, n) a_k \\
&= \mu(n, n) a_n && \textit{(car } \mu(k, n) = 0 \textit{ dès que } k < n\textit{)} \\
&= a_n.
\end{aligned}
$$

2. **Une application.** On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = n\, e_{n-1} + (-1)^n.$$

On considère aussi sa transformée binomiale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Après avoir calculé $(e_n)_{n=0}^{5}$ et en avoir déduit $(f_n)_{n=0}^{5}$, donner (en la démontrant !) une expression pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On trouve facilement les premières valeurs de la suite e *:*

$$e_0 = 1, \qquad e_1 = 0, \qquad e_2 = 1, \qquad e_3 = 2, \qquad e_4 = 9, \qquad e_5 = 44\dots$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 \times 1 = 1 \\
f_1 &= 1 \times 1 + 1 \times 0 &&= 1 \\
f_2 &= 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 &&= 2 \\
f_3 &= 1 \times 1 + 3 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times 2 &&= 6 \\
f_4 &= 1 \times 1 + 4 \times 0 + 6 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 9 &&= 24 \\
f_5 &= 1 \times 1 + 5 \times 0 + 10 \times 1 + 10 \times 2 + 5 \times 9 + 1 \times 44 &&= 120.
\end{aligned}$$

À partir de là, la conjecture est raisonnable.
Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k \\
&= \binom{n+1}{0} e_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k && \textit{(Chasles)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(k\, e_{k-1} + (-1)^k\right) && \textit{(définition de } e\textit{)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} k\, e_{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} && \textit{(linéarité et formule d'absorption)} \\
&= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} e_{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} && \textit{(Chasles)} \\
&= (n+1) \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} e_\ell + (1-1)^{n+1} && \begin{bmatrix} \ell = k-1 \\ k = \ell+1 \end{bmatrix} \\
&= (n+1) f_n. && \textit{(car } n+1 > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre alors $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = n!$.

(b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *En appliquant la formule d'absorption.*

$$e_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p! \\
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \frac{n!}{(n-p)!} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. && \begin{bmatrix} k = n-p \\ p = n-k \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exercice 4. Majoration des écarts d'une suite de moyennes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leqslant 1$. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}u_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k && (\textit{Chasles}) \\
&= \frac{1}{n+1} \underbrace{u_{n+1}}_{=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{n+1}} - \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{=\frac{1}{n(n+1)}} \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k).
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc $|v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} |u_{n+1} - u_k|$ *: le cœur du raisonnement est donc maintenant de majorer la valeur absolue apparaissant dans la somme.*

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, *on a* $u_{n+1} - u_k = \sum_{\ell=k}^{n} (u_{\ell+1} - u_\ell)$ *par télescopage donc, d'après l'inégalité triangulaire* [1],

$$
|u_{n+1} - u_k| \leqslant \sum_{\ell=k}^{n} \underbrace{|u_{\ell+1} - u_\ell|}_{\leqslant 1} \leqslant n + 1 - k.
$$

On en déduit, en revenant au calcul précédent,

$$
\begin{aligned}
|v_{n+1} - v_n| &\leqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} |u_{n+1} - u_k| \\
&\leqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k)
\end{aligned}
$$

1. Il était aussi possible de montrer $\forall k \in [\![1, n]\!], |u_{n+1} - u_k| \leqslant n + 1 - k$ par récurrence finie descendante, l'inégalité triangulaire à deux arguments fournissant l'hérédité.

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\ell=1}^{n} \ell && \begin{bmatrix} \ell = n+1-k \\ k = n+1-\ell \end{bmatrix} \\
&\leqslant \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

ce qui conclut.