DM 05 : *simple as* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Ce devoir explore plusieurs thèmes autour des matrices carrées réelles d'ordre 2.

Exercice 1. Crochets de Lie.

Étant donné $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, on définit leur *crochet de Lie* $[A, B] = AB - BA$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{ [A, B] \,\middle|\, A, B \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$ des crochets de Lie.

1. Montrer que $\forall M \in \mathcal{S}, \operatorname{tr}(M) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est *stable par multiplication par un scalaire*, c'est-à-dire $\forall M \in \mathcal{S}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda M \in \mathcal{S}$.
3. Montrer que $\mathcal{S}$ est *stable par similitude*, c'est-à-dire $\forall M \in \mathcal{S}, \forall N \in M_2(\mathbb{R}), M \sim N \Rightarrow N \in \mathcal{S}$.
4. Montrer que $\operatorname{diag}(1, -1)$, $E_{1,2}$ et $E_{2,1} - E_{1,2}$ appartiennent à $\mathcal{S}$.
5. Déduire de tout ce qui précède que $\mathcal{S} = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{tr}(M) = 0 \right\}$.

Exercice 2. Autour du théorème de Cayley-Hamilton.

0. Démontrer le cas particulier ($n = 2$) du *théorème de Cayley-Hamilton* :

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), A^2 - \operatorname{tr}(A)\, A + \operatorname{dét}(A)\, I_2 = 0_2.$$

Dans la suite de l'exercice, on essayera de limiter la brutalité des calculs et d'utiliser le plus possible l'identité précédente.

1. **Polynômes en** A. Étant donné $M \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle *polynôme en* M toute matrice de la forme $\sum_{k=0}^{d} \lambda_k M^k$, où $d \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}[M] \subseteq M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes en M.
   Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité
   $$\mathbb{R}[A] = \left\{ \lambda_0 I_2 + \lambda_1 A \,\middle|\, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$
2. **Carré d'un crochet de Lie.** On réutilise la notation $[\cdot, \cdot]$, vue à l'exercice précédent.
   (a) Montrer l'*identité de Hall* : $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}), \left[[A, B]^2, C \right] = 0_2$.
   (b) Soit $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $[A, B]^n = I_2$. Montrer que n est pair et que $[A, B]^4 = I_2$.
3. **Critère de nilpotence.** Rappelons qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si $\exists p \in \mathbb{N} : M^p = 0_n$.
   (a) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. A nilpotente ;
      ii. $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$;
      iii. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{dét}(A) = 0$;
      iv. $A^2 = 0_2$.
   (b) Existe-t-il deux matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0_2$ mais $BABA \neq 0_2$?
   (c)$^+$ Existe-t-il deux matrices $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0_3$ mais $BABA \neq 0_3$?
4. $^+$ (a) Montrer $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), \operatorname{dét}(A + B) + \operatorname{dét}(A - B) = 2 \operatorname{dét} A + 2 \operatorname{dét} B$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tous $A_1, \dots, A_n \in M_2(\mathbb{R})$, on a
   $$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \operatorname{dét}\left(\varepsilon_1 A_1 + \cdots + \varepsilon_n A_n\right) = 2^n \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dét}(A_k).$$

Exercice 3. Densité des matrices inversibles.

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 < |t| < \delta \Rightarrow A - tI_2 \in GL_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 4. Le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$.

Dans cet exercice, on note $M_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers relatifs. On note également

$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \text{dét}\, A \in \{-1, 1\} \right\}.$$

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $A \in GL_2(\mathbb{Z})$.
2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   (a) On suppose $\forall X \in \mathbb{Z}^2, AX \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $A \in M_2(\mathbb{Z})$.
   (b) On suppose $\forall X \in \mathbb{R}^2, X \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow AX \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $A \in GL_2(\mathbb{Z})$.
3. **Éléments d'ordre fini.**
   (a) Donner un exemple de matrice $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p \neq I_2$.
   (b) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{U}$ tels que $2\,\text{Ré}(\lambda) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Soit $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* : A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.
4. **Couples de matrices engendrant un groupe libre.** Soit $A, B \in GL_2(\mathbb{Z})$.
   - On appelle *mot réduit en* A *et* B tout produit de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{cases} A^{i_1}B^{i_2}A^{i_3}\cdots A^{i_r} & \text{si } r \text{ impair} \\ A^{i_1}B^{i_2}A^{i_3}\cdots B^{i_r} & \text{si } r \text{ pair} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} B^{i_1}A^{i_2}B^{i_3}\cdots B^{i_r} & \text{si } r \text{ impair} \\ B^{i_1}A^{i_2}B^{i_3}\cdots A^{i_r} & \text{si } r \text{ pair,} \end{cases}$$

   où $r > 0$ et où les exposants $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r$ sont des entiers relatifs **non nuls**. Pour des raisons évidentes, les mots du premier (resp. deuxième) type seront dits *commençant par* A (resp. B).
   Par exemple, $A^2B^{-1}ABAB^{-12}$ est un mot réduit (commençant par A).
   - On dit que (A, B) *engendre un groupe libre* si tout mot réduit en A et B est différent de I_2.

   (a) Montrer que dans les cas suivants, (A, B) n'engendre pas un groupe libre :
   ♠ A et B sont deux éléments de $GL_2(\mathbb{Z})$ qui commutent.
   ♡ $A = C^7$ et $B = C^{17}$, pour une certaine matrice $C \in GL_2(\mathbb{Z})$.
   ♢ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et B est un élément quelconque de $GL_2(\mathbb{Z})$.
   ♣$^+$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Dans les deux questions suivantes, on fixe $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers relatifs non nuls. On définit une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $M_0 = I_2$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \big(M_{2k+1} = M_{2k}\, A^{n_k}$ et $M_{2k+2} = M_{2k+1}\, B^{m_k}\big)$.
   Enfin, on définit la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \begin{cases} [M_k]_{1,1} & \text{si } k \text{ pair} \\ [M_k]_{1,2} & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

   Montrer que la suite $(|c_{n+1}| - |c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c)$^+$ En déduire que (A, B) engendre un groupe libre.

5.$^+$ En s'inspirant du cours, montrer que les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *engendrent* $GL_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que toute matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ peut s'écrire sous la forme d'un produit $A_1^{i_1}A_2^{i_2}\cdots A_r^{i_r}$, où $r \in \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on a $A_k \in \{P, D, T\}$ et $i_k \in \mathbb{Z}$.