DM 06 : matrices

Exercice 1

Soit $\rho = 3 + \sqrt{5}$.

Le but de cet exercice est de déterminer les trois derniers chiffres avant la virgule de ρ^N, pour un nombre N quelconque (mais gigantesque).

Introduisons quelques notations :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière (inférieure)* de x, c'est-à-dire le plus grand entier $\leqslant x$. Par exemple, on a $5 \leqslant \rho < 6$, donc $\lfloor \rho \rfloor = 5$.
- On note $m : \mathbb{Z} \to [\![0, 999]\!]$ l'application telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $m(n)$ soit le reste de n dans la division euclidienne par 1000.

Le but de l'exercice est ainsi de déterminer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'entier $r_N = m\big(\lfloor \rho^N \rfloor\big)$.

1. En utilisant le cours, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières.
3. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor \rho^n \rfloor = u_n - 1$.
4. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe deux entiers $n_0 \in \mathbb{N}$ et $T \in [\![1, 10^6]\!]$ tels que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit T-périodique à partir du rang n_0, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant n_0, r_{n+T} = r_n$.
5. À l'aide d'un ordinateur, trouver effectivement deux entiers n_0 et T qui conviennent.
6. Calculer r_N, pour $N = 10^{10^{10}}$.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\forall P \in GL_n(\mathbb{R}), PM \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer que M est la matrice nulle.

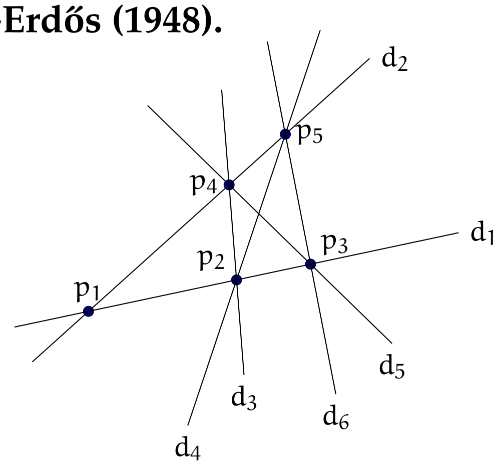
Exercice 3

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $\text{dét}(A^2 - A + I_2) = 0$.

1. Montrer que $A^2 - A + I_2 = 0_2$.
   Indication. *On pourra notamment utiliser le théorème de Cayley-Hamilton vu dans le DM précédent.*
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $\text{dét}(A^2 + \alpha A + \beta I_2)$.

Problème. Théorème de De Bruijn-Erdős (1948).

Partie I. Présentation du problème.



Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geqslant 3$.

On se donne n points distincts $p_1, \dots, p_n$ dans le plan, qui ne sont pas tous alignés.

On trace alors toutes les droites reliant au moins deux de ces points, et on les numérote $d_1, \dots, d_k$, pour un certain entier $k \geqslant 1$.

La figure ci-contre montre un exemple où $n = 5$ et $k = 6$.

> Le but du problème est de montrer que si les n points ne sont pas tous alignés, alors $k \geqslant n$.

1. Donner un exemple où $k = n$. (Rappel : $n \geqslant 3$ est fixé, vous ne pouvez pas le choisir).
2. Donner, en fonction de n, la valeur maximale de k.
3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note r_i le nombre de droites passant par p_i.
   (Dans l'exemple plus haut, par exemple, $r_1 = 2$ et $\forall i \in [\![2, 5]\!], r_i = 3$.)
   Traduire sur les nombres $r_1, \dots, r_n$ l'hypothèse selon laquelle les points ne sont pas tous alignés.

Partie II. Deux lemmes matriciels.

Le but de cette partie est de montrer les deux résultats suivants.

Lemme A. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T M X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme B. Soit $k \geqslant 1$ et $(A, B) \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n}(\mathbb{R})$ tels que $AB \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $k \geqslant n$.

4. Démontrer le lemme A.
5. (a) Soit $k \geqslant 1$ et $M \in M_{k,n}(\mathbb{R})$. On suppose que l'une des colonnes de M est combinaison linéaire des colonnes précédentes, *i.e.* qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{j_0-1} \in \mathbb{R}$ tels que
   $$C_{j_0}(M) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda_j \, C_j(M).$$
   Montrer qu'il existe alors $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0_{\mathbb{R}^k}$.
   (b) Soit $1 \leqslant k < n$ et $M \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ une matrice échelonnée réduite.
   Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0_{\mathbb{R}^k}$.
   (c) Démontrer le lemme B.

Partie III. Conclusion.

6. Soit $a, r_1, r_2, \dots, r_n$ des nombres réels tels que $a \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], r_i > a$.
   Montrer que $M = \begin{pmatrix} r_1 & & (a) \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ (a) & & & r_n \end{pmatrix}$ est inversible. (Tous les coefficients hors diagonale valent a).
7. Soit $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, k]\!]$, le coefficient $[A]_{i,j}$ vaut 1 si le point p_i est sur la droite d_j, et 0 sinon. Calculer $A\,A^T$.
8. Conclure.