DM 07 : inégalité de Fejér-Jackson

Problème.

Inégalité de Fejér-Jackson (1911). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in]0, \pi[, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} > 0. \tag{FJ_n}$$

Après quelques préliminaires, le problème se lance dans une démonstration par récurrence de ces inégalités, les parties II et III (qui sont indépendantes) fournissant deux arguments différents pour l'étape d'hérédité.

Partie I. Préliminaires.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(2x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et en déduire les inégalités (FJ_1), (FJ_2) et (FJ_3).

La question précédente tient lieu d'initialisation, ce qui fait que l'on aura montré l'inégalité de Fejér–Jackson en toute généralité si l'on montre l'hérédité, soit sous forme simple :

$$\forall n \geqslant 2, (FJ_{n-1}) \Rightarrow (FJ_n) \tag{H}$$

soit sous forme forte :

$$\forall n \geqslant 2, ((FJ_1) \text{ et } (FJ_2) \text{ et} \dots \text{et } (FJ_{n-1})) \Rightarrow (FJ_n). \tag{HF}$$

Ce sont, respectivement, les objectifs des parties II et III, qui fournissent donc deux démonstrations essentiellement indépendantes de l'inégalité de Fejér-Jackson.
Dans toute la suite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : \begin{cases} [0, \pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}. \end{cases}$$

2. **Sommes trigonométriques.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$.
   (a) Montrer que f_n est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.
   (b) Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
   (c) En déduire
   $$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. **Une somme double.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Partie II. Démonstration par étude d'une fonction.

Dans cette partie, on va montrer l'hérédité « simple » (H).

Soit donc $n \geqslant 2$ tel que (FJ_{n-1}). On va montrer $\forall x \in]0, \pi[\,, f_n(x) > 0$ en étudiant la fonction f_n.

4. On définit $m = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ le premier entier impair $\geqslant n$.

   Pour tout $j \in [\![0, m]\!]$, on définit alors $x_j = \begin{cases} \dfrac{j}{n}\pi & \text{si } j \text{ est pair} \\ \dfrac{j}{n+1}\pi & \text{si } j \text{ est impair.} \end{cases}$

   (a) Montrer les inégalités suivantes :

   $$\begin{aligned} &\text{si } n \text{ pair :} & 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = \pi \\ &\text{si } n \text{ impair :} & 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < \pi. \end{aligned}$$

   (b) Montrer que pour tout entier **pair** $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f_n(x_j) > 0$.

5. (a) Montrer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont exactement les points d'annulation de f'_n.

   (b) Montrer que, pour tout entier **pair** $j \in [\![0, n-1]\!]$, f_n croît strictement sur le segment $[x_j, x_{j+1}]$.

   > On montrerait de même (et on pourra utiliser) que, pour tout entier **impair** $j \in [\![0, n-1]\!]$, f_n décroît strictement sur $[x_j, x_{j+1}]$ et que, si n est impair, elle décroît strictement sur $[x_n, \pi]$.

   (c) En esquissant le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n), achever la preuve de $\forall x \in]0, \pi[\,, f_n(x) > 0$.

Partie III. Démonstration par sommation.

> Dans cette partie, on admet le résultat suivant.
>
> **Lemme.** Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.
> On suppose qu'il existe $x_0 \in]0, \pi[$ tel que $f(x_0) \leqslant 0$.
> Alors il existe $\xi \in]0, \pi[$ tel que $f(\xi) \leqslant 0$ et $f'(\xi) \geqslant 0$.
>
> On va alors montrer (HF) : on fixe un entier $n \geqslant 2$ et
> - d'une part, on suppose les assertions $(FJ_1), (FJ_2), \ldots, (FJ_{n-1})$;
> - d'autre part, par l'absurde et en utilisant le lemme admis, on suppose pouvoir trouver un nombre réel $\xi \in]0, \pi[$ tel que $f_n(\xi) \leqslant 0$ et $f'_n(\xi) \geqslant 0$.
>
> Le but est alors d'arriver à une contradiction à partir de ces hypothèses et des différents calculs de sommes de la partie I.

6. Montrer que $\forall \ell \in [\![2, n]\!], \displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} < 0$.

7. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\,\xi) < 0$.

8. En déduire l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\sin\beta \geqslant \sin\alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad \cos\beta > \cos\alpha > 0.$$

9. Obtenir une contradiction (ce qui conclut la démonstration de (HF) et donc de l'inégalité de Fejér-Jackson).