DM 08 : relations (et un tout petit peu de groupes) [corrigé]

Problème A. Deux théorèmes sur les graphes finis.

Partie I. Généralités.

Dans toute cette partie, on fixe un graphe fini $\Gamma = (V, \mathcal{R})$.

1. Soit C une clique et A une anticlique. Montrer que $A \cap C$ est vide ou est un singleton.

   Soit $x, y \in A \cap C$.

   - *Comme* C *est une clique, on a* $x \mathrel{\mathcal{R}} y$.
   - *Comme* A *est une anticlique, on en déduit* $x = y$.

   On a donc montré $\forall x, y \in A \cap C, x = y$, *ce qui montre que* $A \cap C$ *est vide ou un singleton.*

2. **Lemme des poignées de main.** Montrer que le nombre d'arêtes de Γ est $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{v \in V} d(v)$.

   On dénombre de deux façons l'ensemble $\left\{ (x, y) \in V^2 \,\middle|\, x \neq y \text{ et } x \mathrel{\mathcal{R}} y \right\}$ *des couples de points reliés par une arête.*

   - *D'un côté, chaque arête* $\{v_1, v_2\}$ *correspond à deux couples* (v_1, v_2) *et* (v_2, v_1), *qui sont bien distincts. Ainsi, le nombre d'arêtes est*
   $$\frac{1}{2} \left| \left\{ (x, y) \in V^2 \,\middle|\, x \neq y \text{ et } x \mathrel{\mathcal{R}} y \right\} \right|.$$
   - *De l'autre, en regroupant les différents couples en fonction de leur première coordonnée, on a*
   $$\begin{aligned} \left\{ (x, y) \in V^2 \,\middle|\, x \neq y \text{ et } x \mathrel{\mathcal{R}} y \right\} &= \bigsqcup_{x \in V} \left\{ (x, y) \,\middle|\, y \in N(x) \right\}, \\ \text{donc} \qquad \left| \left\{ (x, y) \in V^2 \,\middle|\, x \neq y \text{ et } x \mathrel{\mathcal{R}} y \right\} \right| &= \sum_{x \in V} \left| \left\{ (x, y) \,\middle|\, y \in N(x) \right\} \right| \\ &= \sum_{x \in V} d(x), \end{aligned}$$

   ce qui conclut.

3. Soit A une anticlique. Montrer que le nombre d'arêtes de Γ est $\leqslant \displaystyle\sum_{x \in V \setminus A} d(x)$.

   Pour tout $x \in V \setminus A$, *on définit* $d_A(x) = |N(x) \cap A|$ *et* $d_{V \setminus A}(x) = |N(x) \cap (V \setminus A)|$ *les nombres de voisins de* x *dans* A *et hors de* A, *respectivement. On a donc* $d(x) = d_A(x) + d_{V \setminus A}(x)$.

   - *Le nombre d'arêtes reliant deux éléments de* $V \setminus A$ *est ainsi* $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{x \in V \setminus A} d_{V \setminus A}(x)$, *comme dans la question précédente.*
   - *Le nombre d'arêtes reliant un élément de* $V \setminus A$ *et un de* A *est* $\displaystyle\sum_{x \in V \setminus A} d_A(x)$.
   - *Comme* A *est une anticlique, le nombre d'arêtes reliant deux éléments de* A *est* 0.

Ainsi, le nombre d'arêtes de Γ est

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(x) + \sum_{x\in V\setminus A} d_A(x) \leqslant \sum_{x\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(x) + \sum_{x\in V\setminus A} d_A(x) = \sum_{x\in V\setminus A} d(x).$$

Partie II. Théorème de Mantel.

> Un graphe fini est dit *sans triangle* s'il ne contient pas de clique à trois sommets.

Dans toute cette partie, on fixe un graphe $(V, \mathcal{R})$ fini et sans triangle, et on note $n = |V|$.

4. Montrer que, pour tout $v \in V$, le voisinage $N(v)$ est une anticlique.

   Soit $v \in V$. Soit $w_1, w_2 \in N(v)$ tels que $w_1 \mathcal{R} w_2$.
   L'ensemble $T = \{v, w_1, w_2\}$ est une clique, et $v \neq w_1, w_2$.
   Si w_1 et w_2 étaient différents, T serait donc une clique à trois sommets, ce qui est exclu. On en déduit $w_1 = w_2$, ce qui conclut.

5. En déduire qu'il existe une anticlique A telle que le nombre d'arêtes de Γ soit $\leqslant |A|\big(n - |A|\big)$.

   Parmi toutes les anticliques, on en considère une, notée A, de cardinal maximal.
   En particulier, d'après la question précédente, on doit avoir, pour tout $v \in V$, $|A| \geqslant |N(v)| = d(v)$.
   D'après la question 3, le nombre d'arêtes de Γ est donc inférieur ou égal à

   $$\sum_{x\in V\setminus A} d(x) \leqslant \sum_{x\in V\setminus A} |A| = |V \setminus A|\,|A| = |A|\,(n - |A|).$$

6. **Théorème de Mantel.** En déduire que le nombre d'arêtes de Γ est $\leqslant \dfrac{n^2}{4}$.

   Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc $xy \leqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.
   Le nombre d'arêtes de Γ est ainsi inférieur ou égal à

   $$|A|\,(n - |A|) \leqslant \left(\frac{|A| + (n - |A|)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

7. **Cas d'égalité.** Pour fixer les idées, on suppose n pair, et on trouve $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. On suppose que le graphe $(V, \mathcal{R})$ possède exactement $n^2/4 = m^2$ arêtes.

   (a) Montrer qu'il existe $A \subseteq V$ tel que A et $V \setminus A$ soient deux anticliques de même cardinal.

   On reprend les notations utilisées dans la question précédente et on suppose que le nombre d'arêtes de Γ est exactement $\dfrac{n^2}{4} = m^2$. Toutes les inégalités utilisées dans le raisonnement doivent donc être des égalités (dans une chaîne d'égalités, si le moindre maillon est strict, l'inégalité résultante est également stricte).

   - *Dans la question 3, on a utilisé l'inégalité*

     $$\frac{1}{2}\sum_{x\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(x) + \sum_{x\in V\setminus A} d_A(x) \leqslant \sum_{x\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(x) + \sum_{x\in V\setminus A} d_A(x).$$

     Cette égalité doit donc être une égalité, c'est-à-dire que l'on doit avoir $\displaystyle\sum_{x\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(x) = 0$.
     Autrement dit, pour tout $x \in V \setminus A$, $d_{V\setminus A}(x) = 0$, ce qui dit précisément que $V \setminus A$ est une anticlique.

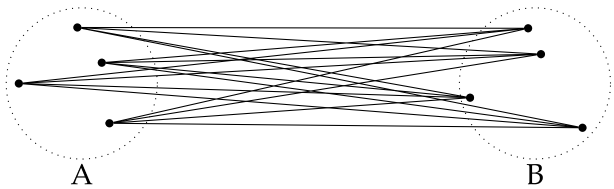
- *Ensuite, l'inégalité* $\sum_{x \in V \setminus A} d(x) \leqslant \sum_{x \in V \setminus A} |A|$ *doit être une égalité, c'est-à-dire que l'on doit avoir* $\forall x \in V \setminus A, d(x) = |A|$.
  Comme $V \setminus A$ *est une anticlique, cela signifie que tous les éléments de* $V \setminus A$ *doivent être reliés à tous les éléments de* A.
- *Enfin, l'inégalité*

$$|A|\,(n - |A|) \leqslant \left(\frac{|A| + (n - |A|)}{2}\right)^2$$

doit être une égalité, c'est-à-dire que $\left(\frac{|A| - (n - |A|)}{2}\right)^2$ *doit être nul, donc* $|A| = n - |A|$. *Dans ce cas, on a donc* $|A| = |V \setminus A| = m$.

(b) Identifier le graphe $(V, \mathcal{R})$ dans ce cas.

Le graphe Γ *est alors constitué de deux anticliques* A *et* $B = V \setminus A$*, de cardinal* m*, telles que tout sommet de* A *soit relié à tout sommet de* B*. Il s'agit du* graphe complet biparti $K_{m,m}$.



Le graphe complet biparti $K_{4,4}$.

Partie III. Théorème de Ramsey bicolore.

Étant donné $r, s \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'un graphe fini $(V, \mathcal{R})$ *vérifie la propriété* $\Pi_{r,s}$ s'il admet une clique à r sommets ou une anticlique à s sommets.

Le but de cette section est de montrer que tout graphe ayant suffisamment de sommets possède cette propriété.

8. **Étape-clef.** Soit $r, s \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on suppose avoir démontré les résultats suivants :
   - Il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que tout graphe ayant au moins a sommets possède la propriété $\Pi_{r,s+1}$.
   - Il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que tout graphe ayant au moins b sommets possède la propriété $\Pi_{r+1,s}$.

   Soit $(V, \mathcal{R})$ un graphe tel que $|V| \geqslant a + b$, et $v \in V$.

   (a) On note $M(v) = V \setminus \big(\{v\} \cup N(v)\big)$ (l'ensemble des *non-voisins* de v).
   Montrer que $N(v)$ possède $\geqslant a$ éléments ou que $M(v)$ possède $\geqslant b$ éléments.

   Supposons au contraire que $|N(v)| < a$ *et* $|M(v)| < b$.
   On peut promouvoir ces deux inégalités strictes entre entiers en de meilleures inégalités larges :

$$|M(v)| \leqslant b - 1 \qquad \textit{et} \qquad |N(v)| \leqslant a - 1.$$

   Comme, par construction, $V = \{v\} \sqcup M(v) \sqcup N(v)$*, on en déduit*

$$|V| \leqslant 1 + (b - 1) + (a - 1) \leqslant a + b - 1 < a + b,$$

   ce qui contredit l'hypothèse.

   (b) En déduire que V possède la propriété $\Pi_{r+1,s+1}$.

   On distingue deux cas.

- ▶ *Si* $N(v)$ *possède* $\geqslant a$ *éléments, alors* $N(v)$ *possède la propriété* $\Pi_{r,s+1}$. *On distingue à nouveau deux cas.*
  - *Si* $N(v)$ *admet une clique à* r *sommets* $\{w_1, \dots, w_r\}$, *le graphe* $(V, \mathcal{R})$ *admet une clique à* $r+1$ *sommets, à savoir* $\{v, w_1, \dots, w_r\}$.
  - *Si* $N(v)$ *admet une anticlique à* $s+1$ *sommets, le graphe* $(V, \mathcal{R})$ *en admet* a fortiori *également une.*
- ▶ *Si* $M(v)$ *possède* $\geqslant b$ *éléments, alors* $M(v)$ *possède la propriété* $\Pi_{r+1,s}$. *On distingue à nouveau deux cas.*
  - *Si* $N(v)$ *admet une clique à* $r+1$ *sommets, le graphe* $(V, \mathcal{R})$ *en admet* a fortiori *également une.*
  - *Si* $N(v)$ *admet une anticlique à* s *sommets* $\{w_1, \dots, w_s\}$, *le graphe* $(V, \mathcal{R})$ *admet une anticlique à* $s+1$ *sommets, à savoir* $\{v, w_1, \dots, w_s\}$.

Dans tous les cas, $(V, \mathcal{R})$ *possède la propriété* $\Pi_{r+1,s+1}$.

9. **Théorème de Ramsey.** Montrer que, pour tous $r, s \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $\mathrm{Ramsey}(r, s)$ tel que tout graphe ayant au moins $\mathrm{Ramsey}(r, s)$ sommets possède la propriété $\Pi_{r,s}$.

Pour tout $n \geqslant 2$, *on note* $P(n)$ *l'assertion « il existe un certain entier* N *tel que tout graphe ayant au moins* N *sommets possède, pour tous* $r, s \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $r+s=n$, *la propriété* $\Pi_{r,s}$. »
Montrons $\forall n \geqslant 2, P(n)$ *par récurrence.*

Initialisation. *Montrons* $P(2)$. *Posons* $N = 1$.
Tout graphe ayant au moins 1 *sommet admet une clique à* 1 *sommet, donc possède la propriété* $\Pi_{1,1}$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$. *On peut donc trouver* N *tel que, pour tous* $r, s \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $r+s=n$, *tout graphe ayant au moins* N *sommets possède la propriété* $\Pi_{r,s}$.
Considérons maintenant un graphe Γ *ayant au moins* $2N$ *sommets.*
Soit $r, s \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $r+s=n+1$.

- ▶ *Si* $r = 1$, *le graphe* Γ *admet trivialement une clique à* 1 *sommet, donc possède la propriété* $\Pi_{1,s}$.
- ▶ *De même, si* $s = 1$, *le graphe* Γ *admet une anticlique à* 1 *sommet, donc possède la propriété* $\Pi_{r,1}$.
- ▶ *On suppose donc* $r, s \geqslant 2$. *Comme* $r + (s-1) = (r-1) + s = n$, *on sait que tout graphe ayant au moins* N *sommets possède à la fois les propriétés* $\Pi_{r,s-1}$ *et* $\Pi_{r-1,s}$.
  D'après la question précédente, on en déduit que Γ, *qui possède au moins* $2N$ *sommets, possède la propriété* $\Pi_{r,s}$.

Cela montre $P(n+1)$, *et clôt la récurrence.*

Pour tous $r, s \geqslant 1$, *la propriété* $P(r+s)$ *montre alors notamment l'existence de* $N = \mathrm{Ramsey}(r, s)$ *tel que tout graphe ayant au moins* N *sommets possède la propriété* $\Pi_{r,s}$.

Problème B. Lemme de Zorn (1935).

Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est dit *inductif* si toute chaîne de E est majorée.
(Remarquons que, l'ensemble vide étant une chaîne, un ensemble ordonné inductif n'est jamais vide : il doit contenir un majorant de $\varnothing$.)

Le but du problème est de montrer le résultat suivant.

Théorème (« lemme de Zorn »). Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.

0. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble **totalement** ordonné inductif.
Montrer que E admet un élément maximal.

Puisque E *est totalement ordonné, il est une chaîne. Puisque* E *est inductif, cette chaîne admet un majorant* $M \in E$.
On a donc $M = \max(E)$, *d'où il vient que* M *est un élément maximal (et même le seul) de* E.

Dans toute la suite, on fixe un ensemble ordonné inductif $(E, \leqslant)$, et l'on cherche à montrer l'existence d'un élément maximal, en construisant une chaîne K adaptée au problème.
Introduisons quelques définitions et notations.

- Un élément $a \in E$ est un *majorant strict* d'une chaîne C si $\forall x \in C, x < a$.
  S'il existe un tel élément, on dit que C est *strictement majorée*.
- On fixe une fois pour toutes un majorant strict μ_C de toute chaîne strictement majorée C.
- Une partie S d'une chaîne C est dite une *section initiale stricte* (en abrégé : SIS) de C si $S \neq C$ et

$$\forall x \in C, \forall y \in S, x \leqslant y \Rightarrow x \in S.$$

1. Soit C une chaîne de E et S une SIS de C. Montrer que S est une chaîne strictement majorée.

   - *Deux éléments de* S *sont* a fortiori *deux éléments de la chaîne* C *: ils doivent donc être comparables. Cela montre déjà que* S *est une chaîne.*
   - *Puisque* $S \neq C$*, on peut trouver* $M \in C \setminus S$*. Montrons que* M *majore* S*, ce qui conclura.*
     Supposons par l'absurde que M *ne majore pas* S *: on peut donc trouver* $s \in S$ *tel que* $s \nleqslant M$*. Comme* C *est une chaîne, on doit donc avoir* $M \leqslant s$*.*
     On a donc $M \leqslant s$, $s \in S$ *et* $M \notin S$*, ce qui contredit le fait que* S *soit une SIS de* C*.*
     Ainsi, S *est bien strictement majorée.*

Une μ-*chaîne* de E est une chaîne $C \subseteq E$ vérifiant la propriété suivante :
pour toute section initiale stricte S de C, le majorant strict μ_S est le minimum de $C \setminus S$.

2. Montrer que toutes les μ-chaînes non vides de E possèdent un élément en commun.

   Soit C *une* μ*-chaîne non vide de* E*.*
   L'ensemble vide est alors une SIS de C*, donc* $\mu_\varnothing = \min(C \setminus \varnothing) \in C$*.*
   Cela montre que toutes les μ*-chaînes non vides de* E *possèdent l'élément* $\mu_\varnothing$*.*
   (C'est d'ailleurs le seul élément qu'elles possèdent en commun : le singleton $\{\mu_\varnothing\}$ *est une* μ*-chaîne de* E*.)*

3. Soit C une μ-chaîne, et $a \in C$. Montrer que l'ensemble $\{x \in C \mid x < a\}$ est une SIS de C, et que

$$a = \mu_{\{x \in C \mid x < a\}}.$$

   - *Déjà,* $a \in C \setminus \{x \in C \mid x < a\}$*, donc* $\{x \in C \mid x < a\} \neq C$*.*
   - *Soit* $x \in C$ *et* $y \in \{x \in C \mid x < a\}$ *tels que* $x \leqslant y$*. On a alors* $x \leqslant y < a$*, d'où il vient* $x < a$*, c'est-à-dire* $y \in \{x \in C \mid x < a\}$*.*

   Ces deux propriétés montrent déjà que $\{x \in C \mid x < a\}$ *est une SIS de* C*.*

   - *Enfin, comme* C *est une chaîne, on a*

$$C \setminus \{x \in C \mid x < a\} = \{x \in C \mid x \nless a\} = \{x \in C \mid a \leqslant x\}.$$

     À partir de cette description, il est clair que $a = \min(C \setminus \{x \in C \mid x < a\})$*, et le fait que* C *soit une* μ*-chaîne entraîne que* $a = \mu_{\{x \in C \mid x < a\}}$*.*

4. Soit C une μ-chaîne et $T \subseteq C$ une partie non vide.
   (a) Montrer que $M = \{x \in C \mid \forall t \in T, x < t\}$ est une SIS de C.

   - *Tout élément de* T *(et il y en a, puisque* $T \neq \varnothing$*) appartient à* $C \setminus M$*, donc* $M \neq C$*.*

- *Soit* $x \in C$ *et* $y \in M$ *tels que* $x \leqslant y$. *Montrons* $x \in M$.
  Soit $t \in T$. *On a* $x \leqslant y < t$, *donc* $x < t$.
  Cela conclut.

(b) En déduire que T admet un minimum.

La propriété de μ*-chaîne entraîne que* $\mu_M = \min(C \setminus M)$. *En particulier, l'ensemble* $C \setminus M$ *possède un minimum* m. *Nous allons montrer que* m *est également le minimum de* T.
Notons que, comme C *est une chaîne, on a*

$$C \setminus M = \{x \in C \,|\, \exists t \in T : x \not< t\} = \{x \in C \,|\, \exists t \in T : t \leqslant x\}.$$

- *La description qui précède montre que* $T \subseteq C \setminus M$ *(tout élément* $t \in T$ *vérifie* $t \leqslant t$*). Ainsi, comme* m *minore* $C \setminus M$, *il minore* a fortiori T.
- *Comme* $m \in C \setminus M$, *on peut trouver* $t \in T$ *tel que* $t \leqslant m$.
  Comme m *minore* T, *on a également* $m \leqslant t$, *d'où* $m = t$, *et enfin* $m \in T$.

Cela montre $m = \min(T)$, *et conclut.*

5. **Comparabilité.**

(a) Soit C et D deux μ-chaînes. On suppose que $C \setminus D$ n'est pas vide et, grâce à la question précédente, on note c son minimum.
Montrer que $D = \{x \in C \,|\, x < c\}$.

Notons $U = \{x \in C \,|\, x < c\}$. *Comme* $c = \min(C \setminus D)$, *tout élément de* U *(qui est donc* $< c$*) appartient aussi à* D, *c'est-à-dire que l'on a déjà* $U \subseteq D$.
Le point-clef de la démonstration est de montrer que U *est une section initiale de* D, *c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\overline{U} = \{y \in D \,|\, \exists x \in U : y \leqslant x\}$$

(qui contient clairement U, *par réflexivité de l'égalité) est en fait égal à* U.
Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. La différence $\overline{U} \setminus U$ *est alors une partie non vide de la* μ*-chaîne* D, *donc elle admet, d'après la question précédente, un minimum* $d = \min(\overline{U} \setminus U)$.
Comme $d \in \overline{U}$, *on peut trouver* $u \in U$ *tel que* $d \leqslant u$.

Fait 1. *La partie* $V = \left\{y \in \overline{U} \,\middle|\, y < d\right\}$ *est une SIS de* C.
En effet,

- *par définition de* d, *on a l'inclusion* $V \subseteq U \subseteq C$ *;*
- *l'inclusion* $V \subseteq U$ *montre notamment* $c \notin V$, *donc* $V \neq C$ *;*
- *soit* $y \in V$ *et* $z \in C$ *tel que* $z \leqslant y$ *: on a la chaîne d'inégalités*

$$z \leqslant y < d \leqslant u,$$

qui montre que $z \in \overline{U}$ *(car* $z < u \in C$*) et que* $z < d$, *donc que* $z \in V$.

Fait 2. *On a* $V = \{y \in D \,|\, y < d\}$.

- *L'inclusion directe est claire.*
- *Réciproquement, soit* $y \in D$ *tel que* $y < d$. *On a notamment* $y < d \leqslant u$, *donc* $y \in \overline{U}$.
  Comme $y < d$, *cela entraîne* $y \in V$.

Le fait 2 et la question 3 entraînent que $\mu_V = d$. *Le fait 1 et le fait que* C *soit une* μ*-chaîne entraînent que* $\mu_V = \min(C \setminus V) \in C$.
On obtient donc $d \in C$. *Vu la chaîne d'inégalités* $d \leqslant u < c$, *on en déduit* $d \in U$, *ce qui constitue une contradiction.*

On a donc montré le point-clef $\overline{U} = U$. *Cela se traduit en l'assertion quantifiée*

$$\forall x \in U, \forall y \in D, y \leqslant x \Rightarrow y \in U.$$

En effet, si $x \in U$ *et* $y \in D$ *vérifient* $y \leqslant x$, *on a* $y \in \overline{U} = U$.

Supposons maintenant (par l'absurde) $U \neq D$.
La partie U *est alors une SIS de la* μ*-chaîne* D, *donc* $\mu_U = \min(D \setminus U)$.
Cependant, d'après la question 3, on a

$$\mu_U = \mu_{\{x \in C \,|\, x < c\}} = c.$$

On en déduit $c = \min(D \setminus U) \in D$, *ce qui contredit la définition de* c.
Cela est donc impossible, c'est-à-dire que $U = D$, *ce qu'il fallait démontrer.*

(b) En déduire qu'étant donné deux μ-chaînes différentes, l'une des deux est une SIS de l'autre.

Soit C *et* D *deux* μ*-chaînes différentes. On a donc* $C \not\subseteq D$ *ou* $D \not\subseteq C$, *c'est-à-dire que l'on a* $C \setminus D \neq \varnothing$ *ou* $D \setminus C \neq \varnothing$.

- *Dans le premier cas, on vient de montrer l'existence de* $c \in C$ *tel que* $D = \{x \in C \,|\, x < c\}$, *ce qui montre d'après la question 3 que* D *est une SIS de* C. *(À vrai dire, notre raisonnement l'a d'ailleurs montré en passant).*
- *De manière complètement symétrique, dans le deuxième cas,* C *est une SIS de* D.

Jusqu'à la fin de la démonstration, on note K l'union de toutes les μ-chaînes de E.

6. Montrer que K est une chaîne.

Soit $x_1, x_2 \in K$. *Par définition, on peut trouver deux* μ*-chaînes* C_1 *et* C_2 *telles que* $x_1 \in C_1$ *et* $x_2 \in C_2$.
D'après la question précédente, on a $C_1 = C_2$, *ou bien l'une des deux* μ*-chaînes est une SIS de l'autre.*
Dans tous les cas, l'une (au moins) des deux μ*-chaînes est incluse dans l'autre. Quitte à changer les notations, on peut supposer* $C_1 \subseteq C_2$.
Les deux éléments x_1 *et* x_2 *sont alors éléments de la même* μ*-chaîne* C_2, *ce qui entraîne qu'ils sont comparables.*

7. Le but de cette question est de montrer que K est même une μ-chaîne. Soit donc S une SIS de K.

(a) Montrer qu'il existe une μ-chaîne C et un élément $c \in C$ qui soit un majorant strict de S.
Dans la suite, on fixe une telle μ-chaîne C et un tel élément $c \in C$.

Comme S *est une SIS de* K, *on peut trouver* $c \in K$ *tel que* $c \notin S$.
Comme S *est une section initiale, cela entraîne automatiquement* $\forall s \in S, s < c$.
Par définition de K, *on peut alors trouver une* μ*-chaîne* C *telle que* $c \in C$, *ce qui conclut.*

(b) Montrer que $S \subseteq C$, et en déduire que S est une SIS de C.

Soit $s \in S$. *Comme* $s \in K$, *on peut trouver une* μ*-chaîne* D *telle que* $s \in D$.
D'après la question 5b, on peut distinguer deux cas.

- *Si* D *est une SIS de* C *ou si* $D = C$, *on a l'inclusion* $D \subseteq C$.
  Dans ce cas, $s \in C$.
- *Si* C *est une SIS de* D, *puisque* $s < c$ *et que* $c \in C$, *on en déduit* $s \in C$.

Dans tous les cas, on a donc $s \in C$, *ce qui clôt la démonstration de* $S \subseteq C$.
Reste à montrer que S *est une SIS de* C.

- *Comme* $c \in C \setminus S$, *on a déjà* $S \neq C$.
- *Soit* $s \in S$ *et* $a \in C$ *tel que* $a \leqslant s$. *On a* a fortiori $a \in K$.
  Comme S *est une SIS de* K, *on en déduit* $a \in S$.

(c) Conclure.

Puisque S *est une SIS de* C, *on a* $\mu_S = \min(C \setminus S)$. *En particulier,* $\mu_S \in K \setminus S$.
Pour montrer $\mu_S = \min(K \setminus S)$, *ce qui conclura, il reste à montrer que* μ_S *minore* $K \setminus S$.
Si ce n'était pas le cas, comme K *est une chaîne, on pourrait trouver* $k \in K \setminus S$ *tel que* $k < \mu_S$. *Cet élément appartiendrait alors à une* μ*-chaîne* $D \nsubseteq C$, *ce qui entraînerait (d'après la question 5b) que* C *est une SIS de* D. *Cela est absurde, car* C *contient* μ_S, *mais pas* k, *qui lui est pourtant inférieur.*

8. (a) Montrer que pour tout majorant m de K, l'union $K \cup \{m\}$ est encore une μ-chaîne, et en déduire $m \in K$.

   (b) Conclure la démonstration du lemme de Zorn.

Le découpage proposé en deux questions étant un peu bancal, on va raisonner plus directement.
Si K *était strictement majorée, on montrerait que* $K^+ = K \cup \{\mu_K\}$ *est une* μ*-chaîne. En effet, étant donné une SIS* S *de* K^+, *on a nécessairement* $\mu_K \notin S$ *(faute de quoi* S *ne serait pas strict), et on distingue alors deux cas :*

- *si* $S = K$, *l'élément* $\mu_S = \mu_K$ *est bien le minimum du singleton* $\{\mu_K\} = K^+ \setminus K$ *;*
- *si* $S \neq K$, *alors* S *est une SIS de* K, *et on a bien* $\mu_S = \min(K \setminus S) = \min(K^+ \setminus S)$.

On aurait ainsi construit une μ*-chaîne* $K^+ \nsubseteq K$, *ce qui contredit la définition de* K.
On en déduit que K *n'est pas strictement majorée. Mais, comme* E *est inductif, elle est majorée !*
On peut donc trouver un majorant m *de* K, *qui doit nécessairement appartenir à* K, *c'est-à-dire que*

$$m = \max(K).$$

L'élément m *est alors automatiquement maximal : si l'on pouvait trouver* $M \in E$ *tel que* $m < M$, *la chaîne* K *serait strictement majorée (par* M*).*
Cela conclut la démonstration du lemme de Zorn.

Exercice. Sous-groupes maximaux.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Un sous-groupe M de G est dit *maximal* si :

- M est strict : $M \neq G$;
- les seuls sous-groupes de G contenant M sont M et G.

1. Déterminer les sous-groupes maximaux de $\mathbb{Z}$.

   Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ *sont les ensembles de la forme* $n\mathbb{Z}$, *où* $n \in \mathbb{N}$. *Dès que* $n \neq 1$, *il s'agit d'un sous-groupe strict.*
   On vérifie directement qu'étant donné $n, m \in \mathbb{N}$, *on a* $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $n \in m\mathbb{Z}$, *c'est-à-dire si et seulement si* m *divise* n.
   Les sous-groupes maximaux sont donc les $p\mathbb{Z}$, *où* $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *est tel que ses seuls diviseurs sont* 1 *et lui-même, c'est-à-dire qu'il s'agit des* $p\mathbb{Z}$, *où* p *est un nombre premier.*

2. Soit G un groupe fini et $M \subseteq G$ un groupe tel que l'indice $[G : M]$ soit un nombre premier. Montrer que M est maximal.

   - *Déjà,* $[G : M] > 1$, *donc* M *est bien un sous-groupe strict de* G.

- *Soit* H *un sous-groupe de* G *contenant* M.
  Notons $n = |M|$ *et* $p = [G : M]$, *de telle sorte que* $|G| = np$.
  D'après le théorème de Lagrange, on a donc $n \mid |H|$ *et* $|H| \mid np$. *On peut donc trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $|H| = kn$, *et la deuxième relation de divisibilité donne* $kn \mid np$, *d'où l'on tire* $k \mid p$ *en divisant par* n *(qui est non nul). Il y a ainsi deux cas :*
  - *si* $k = 1$, *on a* $|H| = n$, *et on obtient* $H = M$ *par inclusion et égalité des cardinaux ;*
  - *si* $k = p$, *on a* $|H| = np$, *et on obtient* $H = G$ *par inclusion et égalité des cardinaux.*

3.$^+$ Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $S = \{\sigma \in \mathfrak{S}(n) \mid \sigma(1) = 1\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}(n)$.

Il est déjà clair qu'il existe des permutations dans $\mathfrak{S}(n)$ *qui ne fixent pas* 1, *donc* S *est bien un sous-groupe strict de* $\mathfrak{S}(n)$.
Soit maintenant H *un sous-groupe de* $\mathfrak{S}(n)$ *contenant strictement* S. *Montrons que* $H = \mathfrak{S}(n)$.

- *Montrons déjà que quel que soit* $i \in [\![2, n]\!]$, *il existe un élément de* H *envoyant* 1 *sur* i.
  Par hypothèse, H *contient une permutation* σ_0 *qui n'est pas dans* S, *et qui envoie donc* 1 *sur un élément* $i_0 \neq 1$. *Cela démontre déjà le résultat pour* $i = i_0$.
  Si maintenant $i \neq i_0$, *il existe une permutation* θ *échangeant* i *et* i_0 *et laissant les autres éléments invariants. Cette permutation* θ *appartient à* $S \subseteq H$, *donc* $\theta \circ \sigma_0 \in H$, *et cela montre la propriété désirée, car* $(\theta \circ \sigma_0)(1) = \theta(i_0) = i$.
- *Soit maintenant* $\tau \in \mathfrak{S}(n)$. *Montrons que* $\tau \in H$.
  - *Si* $\tau(1) = 1$, *on a* $\tau \in S$, *et cela conclut.*
  - *Sinon, notons* $i \in [\![1, n]\!]$ *l'image* $\tau(1)$. *D'après le point précédent, on peut trouver une permutation* $\sigma \in H$ *telle que* $\sigma(1) = \tau(1)$. *On a alors* $\sigma^{-1}\tau(1) = 1$, *donc* $\sigma^{-1}\tau \in S$. *Cela démontre que* $\tau = \sigma\left(\sigma^{-1}\tau\right) \in H$, *et conclut la preuve.*

4. Soit G un groupe **fini** et $H \neq G$ un sous-groupe de G.
   Montrer qu'il existe un sous-groupe maximal M de G tel que $H \subseteq M$.

Il suffit de considérer, parmi tous les sous-groupes stricts de G *contenant* H *(et il en existe, ne serait-ce que* H *lui-même), un sous-groupe* M *dont le cardinal est le plus grand possible.*
On montre alors sans difficulté que M *est un sous-groupe maximal.*

5. Donner un exemple de groupe n'admettant pas de sous-groupe maximal.

Montrons que le groupe additif $\mathbb{Q}$ *possède cette propriété.*
Soit M *un sous-groupe strict de* $\mathbb{Q}$. *Si* $M = \{0\}$, *il est clair qu'il n'est pas maximal, donc on va supposer dans la suite que* $M \neq \{0\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *notons* $f_n : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *l'application* $x \mapsto \frac{1}{n}x$. *On vérifie facilement que si un sous-groupe non nul est stable par toutes ces applications, alors il est égal à* $\mathbb{Q}$.
Par contraposée, on en déduit que M *n'est pas stable par toutes ces applications : on peut donc trouver* $m_0 \in M$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $\frac{1}{n}m_0 \notin M$.
Posons alors

$$M^+ = \left\{ m + k\frac{1}{n}m_0 \;\middle|\; m \in M, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les propriétés suivantes de M^+ *sont plus ou moins claires :*

- M^+ *est un sous-groupe de* $\mathbb{Q}$. *On peut d'ailleurs voir que* $M^+ = \left\langle M \cup \left\{ \frac{1}{n}m_0 \right\} \right\rangle$.
- *On a* $M \subsetneq M^+$ *: l'inclusion est claire, et comme* $\frac{1}{n}m_0 \in M^+ \setminus M$, *elle est stricte.*

- *On a* $\forall x \in \mathrm{M}^+, nx \in \mathrm{M}$.

Montrons que M^+ *est encore un sous-groupe strict de* M*, en constatant que* $\frac{1}{n^2}m_0 \notin \mathrm{M}^+$.
En effet, si l'on avait $\frac{1}{n^2} \in \mathrm{M}^+$*, la dernière propriété listée montrerait que* $\frac{1}{n}m_0 \in \mathrm{M}$*, ce qui a été exclu.*
Le sous-groupe M *est donc strictement inclus dans un sous-groupe strict* M^+*, ce qui montre que* M *n'est pas maximal, et conclut la démonstration.*