DM 11 : polynômes de Čebyšëv [corrigé]

Partie I. Généralités.

0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\,\theta) = T_n(\cos\theta).$$

Unicité. *Soit* T_n *et* $\Theta_n \in \mathbb{R}[X]$ *tels que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\,\theta) = T_n(\cos\theta) = \Theta_n(\cos\theta).$$

Comme l'image de $\cos$ *est* $[-1,1]$*, cela entraîne notamment*

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = \Theta_n(x).$$

Comme le segment $[-1,1]$ *est infini, on obtient* $T_n = \Theta_n$ *par rigidité.*

Existence. *On a, d'après le binôme de Newton :*

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \sin^k\theta\,\cos^{n-k}\theta \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} i^k \binom{n}{k} \sin^k\theta\,\cos^{n-k}\theta}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} i^k \binom{n}{k} \sin^k\theta\,\cos^{n-k}\theta}_{\in i\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Moivre, $\cos(n\theta) = \text{Ré}\left((\cos\theta + i\,\sin\theta)^n\right)$*, donc on obtient*

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} i^k \binom{n}{k} \sin^k\theta\,\cos^{n-k}\theta \\ &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} i^{2\ell} \binom{n}{2\ell} \sin^{2\ell}\,\cos^{n-2\ell}\theta \\ &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} (1-\cos^2\theta)^\ell\,\cos^{n-2\ell}\theta \\ &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} (\cos^2\theta - 1)^\ell\,\cos^{n-2\ell}\theta \\ &= T_n(\cos\theta),\end{aligned}$$

où l'on a posé $T_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} (X^2-1)^\ell\, X^{n-2\ell} \in \mathbb{R}[X]$.

Le polynôme T_n est appelé n-*ième polynôme de Čebyšëv*[1] *(de première espèce).*

Le devoir est consacré à certaines propriétés de cette suite de polynômes.

1. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $T_n(0)$? combien vaut $T_n(1)$?

   - *On a* $T_n(0) = T_n\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \textit{si } n \textit{ pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ impair.} \end{cases}$
   - *On a* $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = 1.$

2. Déterminer les polynômes T_0, T_1, T_2 et T_3.

   - *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$.
     On a $\cos(0\theta) = 1$, *donc* $T_0 = 1$ *convient (et c'est le seul, d'après la question 0).*
   - *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$.
     On a $\cos(1\theta) = \cos\theta$, *donc* $T_1 = X$.
   - *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$.
     On a $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, *donc* $T_2 = 2X^2 - 1$.
   - *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *En reprenant le calcul de la question 0,*

$$\begin{aligned} T_3 &= \binom{3}{2\times 0}(X^2-1)^0 X^{3-2\times 0} + \binom{3}{2\times 1}(X^2-1)^1 X^{3-2\times 0} \\ &= X^3 + 3(X^2-1)X \\ &= 4X^3 - 3X. \end{aligned}$$

3. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $\theta \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} \big(2X\,T_{n+1} - T_n\big)(\cos\theta) &= 2\cos\theta\ \cos(n+1)\theta - \cos n\theta \\ &= \cos\big((n+1)\theta + \theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big) - \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta \\ &= T_{n+2}(\cos\theta). \end{aligned}$$

   Cela montre que les deux polynômes T_{n+2} *et* $2X\,T_{n+1} - T_n$ *coïncident sur* $[-1,1]$, *et ils sont donc égaux par rigidité.*

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Il est clair que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, *le polynôme* $(X^2-1)^\ell$ *est unitaire de degré* 2ℓ.
   Par stabilité par combinaison linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$, *la formule*

$$T_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} (X^2-1)^\ell X^{n-2\ell}$$

   montre que $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ *et que son coefficient de degré* n *est*

$$\operatorname{coeff}_n(T_n) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} \underbrace{\operatorname{coeff}_\ell\big((X^2-1)^\ell\big)}_{=1} \underbrace{\operatorname{coeff}_{n-2\ell}\big(X^{n-2\ell}\big)}_{=1}$$

1. L'étudiant·e pourra préférer les orthographes Chebyshev, Tchebychev, Tchebycheff ou Чебышёв.

$$= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = 2^{n-1},$$

grâce à la conséquence classique des formules du binôme de Newton

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}.$$

En réintégrant le cas de $T_0 = 1$*, on voit que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, le degré de* T_n *est* n*, alors que son coefficient dominant est*

$$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0\,; \\ 2^{n-1} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

5. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale associée à T_n est paire ou impaire en précisant, en fonction de n, le cas dans lequel on se trouve.

   La formule

$$T_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} (X^2-1)^\ell X^{n-2\ell}$$

   et les propriétés de stabilité montrent que la fonction polynomiale $t \mapsto T_n(t)$ *est « de la même parité que* n *», car chacun des termes de la somme est de la même parité que* $n - 2\ell$*, qui est celle de* n*.*

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Déterminer les racines complexes de T_n.

   - *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$*. On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \pmod{\pi/n}. \end{aligned}$$

     Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(n\theta) = 0$ *est*

$$\left\{ \frac{\pi}{2n} + \ell\frac{\pi}{n} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{(2\ell+1)\pi}{2n} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   - *Étant donné* $\ell \in \mathbb{Z}$*, la quantité* $\dfrac{(2\ell+1)\pi}{2n}$ *est positive si et seulement si* $\ell \geqslant 0$*, et elle est* $\leqslant \pi$ *si et seulement si* $\ell \leqslant n-1$*. Autrement dit, les solutions de l'équation précédente appartenant à* $[0, \pi]$ *sont*

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

     Autrement dit, il s'agit des éléments de la famille $\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)_{k=1}^{n}$ *et elles sont donc au nombre de* n*.*

- *Soit* $k \in [\![1, n]\!]$. *On a*

$$\begin{aligned}
T_n\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) &= \cos\left(n\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \\
&= \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin(k\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cela montre que $\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$ *est une racine de* T_n.
Par ailleurs, la fonction $\cos$ *est strictement décroissante sur* $[0, \pi]$, *donc on a*

$$\xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_n.$$

On a donc trouvé n *racines au polynôme* T_n.
D'après le critère radical de nullité, comme $\deg T_n = n$, *il ne saurait en avoir davantage.*
Ainsi, les racines de T_n *(dans* $\mathbb{C}$*) sont exactement les éléments de la famille* $(\xi_k)_{k=1}^n$.

(b) En utilisant ce qui précède, écrire T_n comme le produit (d'un scalaire et) de n polynômes de degré 1.

Le cas $n = 0$ *est plus ou moins tautologique :* $T_0 = 1$, *qui est déjà le produit d'un scalaire et... de* 0 *polynômes de degré* 1. *On suppose donc dans la suite* $n \in \mathbb{N}^*$.
La question 6a et le théorème de factorisation garantissent l'existence d'un polynôme Q *tel que*

$$T_n = (X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)Q.$$

On a alors

$$n = \deg T_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} + \deg Q,$$

donc $\deg Q = 0$ *: il existe un nombre* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $Q = \lambda$. *Ainsi, on a la décomposition*

$$T_n = \lambda(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n).$$

Comme tous les facteurs $(X - x_i)$, *pour* i *décrivant* $[\![1, n]\!]$, *sont unitaires, on en déduit que* λ *est le coefficient dominant de* T_n. *D'après la question 4, on en déduit la décomposition*

$$T_n = 2^{n-1}(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n).$$

(c) On suppose [2] $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de toute la discussion la formule

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer en 0 *la factorisation obtenue à la question précédente, et de comparer avec le résultat de la question 1.*

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note $\eta_j = \cos\left(\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right)$.

2. L'énoncé distribué omettait cette hypothèse. *Mea culpa.*

(a) Montrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, on a $|T_n(t)| \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si t est l'un des points de la famille $(\eta_j)_{j=0}^n$.

Soit $t \in [-1,1]$.

- *On peut trouver* $\theta \in [0,\pi]$ *tel que* $t = \cos\theta$. *On a alors*

$$|T_n(t)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1.$$

- *On a*

$$\begin{aligned} |T_n(t)| = 1 &\Leftrightarrow \cos(n\theta) = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow n\theta \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv 0 \pmod{\pi/n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n]\!] : \theta = k\frac{\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \exists j \in [\![0,n]\!] : \theta = (n-j)\frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

donc les points $t \in [-1,1]$ *tels que* $|T_n(t)| = 1$ *sont les éléments de la famille*

$$\left(\cos\left((n-j)\frac{\pi}{n}\right)\right)_{j=0}^n = (\eta_j)_{j=0}^n.$$

(b) Montrer $\forall\theta \in \mathbb{R}, n\ \sin(n\theta) = \sin(\theta)\, T_n'(\cos\theta)$.

Les deux fonctions $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ *et* $\theta \mapsto T_n(\cos\theta)$ *sont dérivables (par opérations) et égales, donc leurs dérivées sont égales, ce qui conclut (après simplification d'un signe −).*

(c) Calculer $T_n'(\eta_j)$ pour $j \in [\![1,n-1]\!]$ et déterminer les racines complexes du polynôme T_n'.

Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$. *On a ainsi* $\left(1-\frac{j}{n}\right)\pi \in]0,\pi[$, *donc* $\sin\left(1-\frac{j}{n}\right)\pi \neq 0$.
En revanche, $\sin\left(n\left(1-\frac{j}{n}\right)\pi\right) = \sin((n-j)\pi) = 0$.
En appliquant la question précédente à $\theta = \left(1-\frac{j}{n}\right)\pi$, *on obtient*

$$n \times 0 = \underbrace{\sin\theta}_{\neq 0}\, T_n'(\eta_j),$$

ce qui montre $T_n'(\eta_j) = 0$.
Comme $\deg T_n = n \geqslant 1$, *on a* $\deg T_n' = n-1$. *D'après le critère radical de nullité, le polynôme* T_n' *ne peut donc pas avoir d'autres racines que les* $n-1$ *éléments de la famille* $(\eta_j)_{j=1}^{n-1}$.

8. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Expliquer pourquoi il est possible de décomposer l'intervalle $[-1,1]$ en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction polynomiale associée à P est monotone.

- *Si* P *est constant, le résultat est immédiat.*
- *Sinon, le polynôme* P' *n'est pas nul, et il possède donc un nombre fini de racines.* A fortiori, *la fonction polynomiale associée* $t \mapsto P'(t)$ *s'annule un nombre fini de fois sur l'intervalle* $[-1,1]$.
  Cette fonction étant continue (car polynomiale), elle est de signe constant sur chacun des intervalles entre deux racines successives de P'. *En effet, entre deux points en lesquels* $t \mapsto P'(t)$ *prend deux valeurs de signes différents, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que* $t \mapsto P'(t)$ *s'annule, et donc que* P' *possède une racine.*
  On en déduit que sur chacun de ces intervalles, $t \mapsto P'(t)$ *est soit* > 0, *soit* < 0, *et on en déduit que* $t \mapsto P(t)$ *est (strictement) monotone, ce qui conclut.*

La question précédente montre notamment que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ atteint son maximum sur le segment $[-1, 1]$, car $t \mapsto P(t)$ ne possède qu'un nombre fini d'extrema locaux (en lesquels elle change de sens de variations).
Dans toute la suite du problème, on note ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\|P\|_\infty = \max\left\{ \left|P(t)\right| \,\middle|\, t \in [-1, 1] \right\}.$$

Il y a essentiellement deux choses à savoir pour manipuler correctement cette *norme uniforme* :

- quel que soit le point $t \in [-1, 1]$, on a $|P(t)| \leqslant \|P\|_\infty$;
- une inégalité de la forme $\|P\|_\infty \leqslant C$ signifie simplement $\forall t \in [-1, 1], |P(t)| \leqslant C$.

9. (a) Calculer $\|T_n\|_\infty$.

   La question 7a se traduit immédiatement en l'égalité $\|T_n\|_\infty = 1$.

   (b) i. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, |\sin(nu)| \leqslant n\,|\sin u|$.

   Il s'agit d'une récurrence immédiate, à l'aide de l'inégalité triangulaire et de la formule d'addition de sin.

   ii. En déduire que $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

   Soit $t \in [-1, 1]$. *On peut trouver* $\theta \in [0, \pi]$ *tel que* $t = \cos(\theta)$.

   - *Si* $t \in]-1, 1[$, *on a* $\theta \in]0, \pi[$ *(donc* $\sin\theta \neq 0$*) et, d'après la question 7b,*

   $$\begin{aligned} \left|\sin(\theta)\, T_n'(\cos\theta)\right| &= |n\, \sin(n\theta)| \\ &\leqslant n^2\, |\sin(\theta)| \qquad \textit{(question précédente)} \\ \textit{donc} \qquad \left|T_n'(\cos\theta)\right| &\leqslant n^2. \end{aligned}$$

   - *Le point le plus difficile est le calcul de* $T_n'(\pm 1)$. *On peut utiliser des arguments de limite et de continuité, on peut revenir à l'expression algébrique du polynôme, mais un argument plus esthétique est de dériver à nouveau l'égalité de fonctions obtenue à la question 7b. On obtient ainsi*

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, n^2\, \cos(n\theta) = \cos(\theta)\, T_n'(\cos\theta) - \sin^2(\theta)\, T_n''(\cos\theta).$$

   En appliquant cette $\forall$*-assertion à* 0 *et* π, *on obtient directement*

   $$T_n'(1) = n^2 \qquad \textit{et} \qquad T_n'(1) = \pm 1.$$

   Tout cela montre notamment que $\|T_n'\|_\infty = T_n'(1) = n^2$.

Partie II. Majoration universelle d'un polynôme sur $[1, +\infty[$.

10. (a) Montrer que la fonction ch induit une bijection $f : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ et, pour tout $y \in [1, +\infty[$, donner une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de $y + \sqrt{y^2 - 1}$.

   La fonction ch *est strictement croissante sur* $[1, +\infty[$, *elle est continue par opérations, et elle vérifie* $\operatorname{ch}(0) = 1$ *et* $\operatorname{ch}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
   D'après le théorème de la bijection monotone, ch *induit une bijection* $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.
   Soit ensuite $y \in [1, +\infty[$. *On a*

   $$f\left(\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)\right) = \frac{\exp\left(\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)\right) + \left(-\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)\right)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[y+\sqrt{y^2-1}+\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\right] \\
&= \frac{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^2+1}{2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)} \\
&= \frac{2y^2+2y\sqrt{y^2-1}}{2\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)} = y.
\end{aligned}$$

En appliquant f^{-1} *de part et d'autre, on obtient* $f^{-1}(y) = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$.

(b) Montrer $\forall p, q \in \mathbb{R}, 2\operatorname{ch}(p)\ \operatorname{ch}(q) = \operatorname{ch}(p+q)+\operatorname{ch}(p-q)$.

On a

$$\begin{aligned}
2\operatorname{ch}(p)\ \operatorname{ch}(q) &= 2\frac{e^p+e^{-p}}{2}\frac{e^q+e^{-q}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{p+q}+e^{p-q}+e^{q-p}+e^{-p-q}\right) \\
&= \operatorname{ch}(p+q)+\operatorname{ch}(p-q).
\end{aligned}$$

(c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on note* $H(n)$ *l'assertion « * $T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$*. »*
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ *par récurrence double.*

Initialisation. *On a*

- $T_0(\operatorname{ch} x) = 1 = \operatorname{ch}(0x)$ *;*
- $T_1(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(1x)$,

ce qui montre $H(0)$ *et* $H(1)$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $H(n)$ *et* $H(n+1)$*. Montrons* $H(n+2)$.
On a

$$\begin{aligned}
T_{n+2} &= 2X\,T_{n+1} - T_n && \textit{(d'après la relation de récurrence)} \\
\textit{donc}\quad T_{n+2}(\operatorname{ch} x) &= 2\operatorname{ch}(x)\,T_{n+1}(\operatorname{ch} x) - T_n(\operatorname{ch} x) \\
&= 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}((n+1)x) - \operatorname{ch}(nx) && \textit{(d'après } H(n) \textit{ et } H(n+1)\textit{)} \\
&= \operatorname{ch}((n+2)x) + \operatorname{ch}(nx) - \operatorname{ch}(nx) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \operatorname{ch}((n+2)x),
\end{aligned}$$

ce qui montre $H(n+2)$ *et clôt la récurrence.*

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\forall x \in [1, +\infty[, 1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.

Rappelons que $\forall t \in \mathbb{R}_+, 1 \leqslant \operatorname{ch}(t) \leqslant \exp(t)$*, car, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$*, on a* $\exp(t) = \operatorname{ch}(t) + \underbrace{\operatorname{sh}(t)}_{\geqslant 0}$.

Soit $x \in [1, +\infty[$*. On a*

$$T_n(x) = \operatorname{ch}\left(n\,f^{-1}(x)\right), \qquad \textit{(ques. préc.)}$$

ce qui montre déjà $T_n(x) \geqslant 1$ *et, en outre,*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \exp\left(n\, f^{-1}(x)\right) \\ &= \exp\left(n \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) \\ &= \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n. \end{aligned}$$

> Dans toute la suite de la partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On définit alors les polynômes de Lagrange associés aux points de la famille $(\eta_j)_{j=0}^n$: pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note
>
> $$L_j = \frac{\displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} (X - \eta_k)}{\displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} (\eta_j - \eta_k)}.$$

12. Montrer $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L_j$.

    Soit $j \in [\![0, n]\!]$. *On a*

$$\begin{aligned} T_n(\eta_j) &= T_n\left(\cos\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right) \\ &= \cos\left((n-j)\pi\right) \\ &= (-1)^{n-j}, \end{aligned}$$

    ce qui montre que T_n *et* $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L_j$, *tous deux éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$, *coïncident sur les* $n+1$ *éléments de la famille* $(\eta_j)_{j=0}^n$.
    Par rigidité, ils sont égaux, ce qui conclut.

13. Montrer $\forall x \in [1, +\infty[\,, T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} |L_j(x)|$.

    Soit $x \in [1, +\infty[$.
    On a $T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L_j(x)$, *si bien qu'il suffit de vérifier que* $\forall j \in [\![0, n]\!], (-1)^{n-j} L_j(x) \geqslant 0$ *pour obtenir le résultat.*

    On a $L_j(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq j}} (x - \eta_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq j}} (\eta_j - \eta_k)}$.

    - *Comme* $x \geqslant 1$, *on a, pour tout* $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}$, $x - \eta_k \geqslant 0$.
      Ainsi, $\displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq j}} (x - \eta_k) \geqslant 0$.
    - *Soit* $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}$.
      - *Si* $k < j$ *(ce qui représente* j *facteurs), on a* $\eta_j - \eta_k > 0$.
      - *Si* $k > j$ *(ce qui représente* $n - j$ *facteurs), on a* $\eta_j - \eta_k < 0$.

Ainsi $(-1)^{n-j}\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\k\neq j}}(\eta_j-\eta_k)\geqslant 0$.

On en déduit $(-1)^{n-j}L_j(x)\geqslant 0$*, ce qui conclut.*

14. Montrer $\forall P\in\mathbb{R}_n[X], \forall x\in[1,+\infty[\,, |P(x)|\leqslant \|P\|_\infty\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.

    Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$*. Par interpolation de Lagrange, on a*

$$P=\sum_{j=0}^{n}P(\eta_j)L_j.$$

On en déduit, pour tout $x\in[1,+\infty[$*,*

$$\begin{aligned}|P(x)| &= \left|\sum_{j=0}^{n}P(\eta_j)L_j(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n}\underbrace{|P(\eta_j)|}_{\leqslant\|P\|_\infty}|L_j(x)| && \textit{(inég. triangulaire)} \\ &\leqslant \|P\|_\infty\sum_{j=0}^{n}|L_j(x)| \\ &\leqslant \|P\|_\infty\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n. && \textit{(questions 13 et 11)}\end{aligned}$$

15. Montrer que, pour tout $r\in[\![1,n]\!]$, on a $\forall x\in[1,+\infty[\,, T_n^{(r)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left|L_j^{(r)}(x)\right|$ et en déduire [3]

$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X], \forall x\in[1,+\infty[\,, \left|P^{(r)}(x)\right|\leqslant\|P\|_\infty\left|T_n^{(r)}(x)\right|.$$

Soit $r\in[\![1,n]\!]$*. En dérivant* r *fois l'égalité polynomiale de la question 12, on obtient* $T_n^{(r)}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}L_j^{(r)}$*.*

Soit maintenant $x\in[1,+\infty[$*. Pour montrer* $T_n^{(r)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left|L_j^{(r)}(x)\right|$*, il suffit de montrer les inégalités* $\forall j\in[\![0,n]\!], (-1)^{n-j}L_j^{(r)}(x)\geqslant 0$*.*
Soit $j\in[\![0,n]\!]$*. On a*

$$(-1)^{n-j}L_j^{(r)}(x)=\frac{\left(\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\k\neq j}}(X-\eta_k)\right)^{(r)}(x)}{(-1)^{n-j}\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\k\neq j}}(\eta_j-\eta_k)}.$$

- *Comme à la question 13, on a que le dénominateur de cette expression est* $\geqslant 0$*.*
- *Reste à montrer que le numérateur est également* $\geqslant 0$*.*
  Or, on montre facilement par récurrence que si $L_1,\dots,L_m$ *sont des polynômes unitaires de degré* 1 *(si bien que, pour tout* ℓ*,* $L_\ell'=1$ *et* $L_\ell''=0$*), la dérivée* p*-ième du produit* $L_1\cdots L_m$ *est une combinaison*

3. Il manquait des « (x) » dans l'énoncé distribué. *Mea maxima culpa.*

linéaire, à coefficients positifs, de « sous-produits » $L_{\ell_1} \cdots L_{\ell_{m-r}}$*, où* $1 \leqslant j_{\ell_1} < \cdots < j_{\ell_{m-r}} \leqslant m$ *est une sélection de* $m-r$ *indices.*

En particulier, $\left(\displaystyle\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq j}} (X-\eta_k)\right)^{(r)}(x)$ *est une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de sous-produits de termes de la forme* $(x-\eta_\ell)$*.*

Comme tous ces termes sont positifs, on en déduit $\left(\displaystyle\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq j}} (X-\eta_k)\right)^{(r)}(x) \geqslant 0$*, ce qui conclut.*

Partie III. Inégalités des frères Markov (1890, 1892).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

16. En revenant à la définition de T_n, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, (1-X^2)\, T_n'' - X\, T_n' + n^2\, T_n = 0$.

    La question 7b montre que les fonctions (dérivables) $\theta \mapsto n\, \sin(n\theta)$ *et* $\theta \mapsto \sin(\theta)\, T_n'(\cos\theta)$*.*
    En les dérivant, on obtient l'égalité

    $$\forall \theta \in \mathbb{R}, n^2\, \cos(n\theta) = \cos(\theta)\, T_n'(\cos\theta) - \sin^2(\theta) T_n''(\cos\theta).$$

    Soit maintenant $\theta \in \mathbb{R}$*. On a*

    $$\begin{aligned}\big((1-X^2)\, T_n'' - X\, T_n' + n^2\, T_n\big)(\cos\theta) &= (1-\cos^2\theta) T_n''(\cos\theta) - \cos(\theta)\, T_n'(\cos\theta) + n^2\, T_n(\cos\theta)\\ &= \sin^2(\theta)\, T_n''(\cos\theta) - \cos(\theta)\, T_n'(\cos\theta) + n^2\, \cos(n\theta)\\ &= 0,\end{aligned}$$

    ce qui montre que le polynôme $(1-X^2)\, T_n'' - X\, T_n' + n^2\, T_n$ *admet une infinité de racines (tous les éléments du segment* $[-1,1]$*). D'après le critère radical de nullité, il est nul.*

17. En utilisant la question précédente et la formule de Leibniz, montrer que pour tout $r \in [\![0,n]\!]$, on a

    $$T_n^{(r)}(1) = \frac{n}{n+r} \frac{(n+r)!}{(n-r)!} \frac{2^r\, r!}{(2r)!} \qquad \text{et} \qquad T_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n+r}\, T_n^{(r)}(1).$$

    Soit $r \in [\![0, n-1]\!]$*. En dérivant* r *fois l'égalité polynomiale de la question précédente, on obtient*

    $$\begin{aligned}\Big((1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n\Big)^{(r)} = 0 \quad &\textit{donc} \quad (1-X^2)T_n^{(r+2)} - (2r+1)XT_n^{(r+1)} + (n^2-r^2)T_n^{(r)} = 0\\ &\textit{donc} \quad -(2r+1)T_n^{(r+1)}(1) + (n^2-r^2)T_n^{(r)}(1) = 0\\ &\textit{donc} \quad T_n^{(r+1)}(1) = \frac{(n-r)(n+r)}{2r+1} T_n^{(r)}(1).\end{aligned}$$

    Par une récurrence immédiate (initialisée par le fait que $T_n(1) = 1$*), on obtient*

    $$\begin{aligned}T_n^{(r)}(1) &= \frac{(n-(r-1))(n-(r+1))}{2r-1} \frac{(n-(r-2))(n-(r+2))}{2r-3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{3} \frac{n^2}{1} 1\\ &= \frac{n \displaystyle\prod_{k=n-r-1}^{n+r-1} k}{(2r-1)(2r-3)\cdots 3\cdot 1}\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{n+r}\frac{(2r)(2r-2)\cdots 2}{(2r)(2r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\prod_{k=n-r-1}^{n+r} k$$
$$= \frac{n}{n+r}\frac{2^r\, r!}{(2r)!}\frac{(n+r)!}{(n-r)!}.$$

On obtient enfin la valeur de $T_n^{(r)}(-1)$ en remarquant que, comme T_n est de la parité de n, sa dérivée r-ième $T_n^{(r)}$ est de la parité de $n+r$.

18. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Soit $\lambda \in [-1,1]$.

On définit le nombre $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$ et le polynôme $P_\lambda = P\left(\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \dfrac{\lambda-\varepsilon}{2}\right)$. Montrer

$$\forall r \in [\![1,n]\!], \left|P_\lambda^{(r)}(1)\right| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^r \left|P^{(r)}(\lambda)\right|.$$

Une récurrence immédiate montre que, pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, $P_\lambda^{(r)} = \left(\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}\right)^r P^{(r)}\left(\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \dfrac{\lambda-\varepsilon}{2}\right)$.

On vérifie par ailleurs – suivant les cas – l'égalité $\left|\dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}\right| = \dfrac{|\lambda|+1}{2}$.

On en déduit alors, pour tout $r \in [\![1,n]\!]$,

$$\left|P_\lambda^{(r)}(1)\right| = \left|\frac{\lambda+\varepsilon}{2}\right|^r \left|P^{(r)}\left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2} + \frac{\lambda-\varepsilon}{2}\right)\right| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^r \left|P^{(r)}(\lambda)\right|.$$

(b) En déduire $\forall r \in [\![1,n]\!], \|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^r\, T_n^{(r)}(1)\, \|P\|_\infty$.

Soit $r \in [\![1,n]\!]$. Soit $\lambda \in [\![1,n]\!]$.

La question précédente montre que $\left|P^{(r)}(\lambda)\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{|\lambda|+1}\right)^r \left|P_\lambda^{(r)}(1)\right| \leqslant 2^r \left|P_\lambda^{(r)}(1)\right|$, si bien qu'il suffit de majorer $\left|P_\lambda^{(r)}(1)\right|$.

Pour cela, on applique la question 15 au polynôme P_λ, en $x = 1$. On obtient

$$|P_\lambda(1)| \leqslant \|P_\lambda\|_\infty \left|T_n^{(r)}(1)\right| \leqslant \|P_\lambda\|_\infty\, T_n^{(r)}(1).$$

Or, pour tous $\lambda \in [-1,1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\lambda+\varepsilon}{2}t + \dfrac{\lambda-\varepsilon}{2}$ est affine et elle envoie -1 sur $-\varepsilon = \pm 1$ et 1 sur $\lambda \in [-1,1]$. Elle envoie donc tout l'intervalle $[-1,1]$ sur un intervalle inclus dans $[-1,1]$. Cela montre

$$\forall t \in [-1,1], P_\lambda(t) \leqslant \|P\|_\infty,$$

d'où l'on tire l'inégalité $\|P_\lambda\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$.

In fine, *on a montré $\forall \lambda \in [-1,1], \left|P^{(r)}(\lambda)\right| \leqslant 2^r\, \|P\|_\infty\, T_n^{(r)}(1)$, ce qui donne l'inégalité*

$$\|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^r\, \|P\|_\infty\, T_n^{(r)}(1).$$

(c) Montrer enfin les inégalités

$$\|P'\|_\infty \leqslant 2n^2\, \|P\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall r \in [\![2,n]\!], \|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^{2r}\frac{r!}{(2r)!}\frac{(n+r)!}{(n-r)!}\|P\|_\infty.$$

- *La première inégalité est une conséquence évidente de la question précédente et de l'égalité* $T_n'(1) = n^2$*, montrée à la question 9(b)ii.*
- *La deuxième inégalité est une conséquence directe de la question précédente, de la question 17 et de l'inégalité évidente* $\dfrac{n}{n+r} \leqslant 1$.