DM 11 : polynômes de Čebyšëv

Partie I. Généralités.

0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\,\theta) = T_n(\cos\theta).$$

Indication. *Pour l'existence, on pourra se souvenir que l'on a appris à faire ce genre de calculs, dans des cas particuliers, dans le chapitre « nombres complexes ».*

> Le polynôme T_n est appelé n-*ième polynôme de Čebyšëv* [1] *(de première espèce).*
>
> Le devoir est consacré à certaines propriétés de cette suite de polynômes.

1. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $T_n(0)$? combien vaut $T_n(1)$?
2. Déterminer les polynômes T_0, T_1, T_2 et T_3.
3. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
5. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale associée à P_n est paire ou impaire en précisant, en fonction de n, le cas dans lequel on se trouve.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer les racines complexes de T_n.
   Indication. *On pourra commencer par résoudre l'équation* $\cos(n\theta) = 0$*, d'abord dans* $\mathbb{R}$*, puis dans* $[0, \pi]$*, pour trouver un certain nombre de racines de* T_n *appartenant à l'intervalle* $[-1, 1]$*.*
   (b) En utilisant ce qui précède, écrire T_n comme le produit (d'un scalaire et) de n polynômes de degré 1.
   (c) Déduire de toute la discussion la formule

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note $\eta_j = \cos\left(\left(1 - \dfrac{j}{n}\right)\pi\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $|T_n(t)| \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si t est l'un des points de la famille $(\eta_j)_{j=0}^{n}$.
   (b) Montrer $\forall \theta \in \mathbb{R}, n\,\sin(n\theta) = \sin(\theta)\,T_n'(\cos\theta)$.
   (c) Calculer $T_n'(\eta_j)$ pour $j \in [\![1, n-1]\!]$ et déterminer les racines complexes du polynôme T_n'.

---

1. L'étudiant·e pourra préférer les orthographes Chebyshev, Tchebychev, Tchebycheff ou Чебышёв.

8. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Expliquer pourquoi il est possible de décomposer l'intervalle $[-1,1]$ en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction polynomiale associée à P est monotone.

La question précédente montre notamment que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ atteint son maximum sur le segment $[-1,1]$, car $t \mapsto P(t)$ ne possède qu'un nombre fini d'extrema locaux (en lesquels elle change de sens de variations).
Dans toute la suite du problème, on note ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\|P\|_\infty = \max\left\{ \left|P(t)\right| \,\middle|\, t \in [-1,1] \right\}.$$

Il y a essentiellement deux choses à savoir pour manipuler correctement cette *norme uniforme* :

- quel que soit le point $t \in [-1,1]$, on a $|P(t)| \leqslant \|P\|_\infty$;
- une inégalité de la forme $\|P\|_\infty \leqslant C$ signifie simplement $\forall t \in [-1,1]\,, |P(t)| \leqslant C$.

9. (a) Calculer $\|T_n\|_\infty$.
   (b) i. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, |\sin(nu)| \leqslant n\,|\sin u|$.
   ii. En déduire que $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

Partie II. Majoration universelle d'un polynôme sur $[1,+\infty[$.

10. (a) Montrer que la fonction ch induit une bijection $f : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$ et, pour tout $y \in [1,+\infty[$, donner une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de $y+\sqrt{y^2-1}$.
    (b) Montrer $\forall p, q \in \mathbb{R}, 2\,\mathrm{ch}(p)\ \mathrm{ch}(q) = \mathrm{ch}(p+q) + \mathrm{ch}(p-q)$.
    (c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(\mathrm{ch}\,x) = \mathrm{ch}(nx)$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\forall x \in [1,+\infty[\,, 1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.

Dans toute la suite de la partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On définit alors les polynômes de Lagrange associés aux points de la famille $(\eta_j)_{j=0}^n$: pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on note

$$L_j = \frac{\displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!]\setminus\{j\}} (X-\eta_k)}{\displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!]\setminus\{j\}} (\eta_j-\eta_k)}.$$

12. Montrer $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L_j$.
13. Montrer $\forall x \in [1,+\infty[\,, T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} |L_j(x)|$.
14. Montrer $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in [1,+\infty[\,, |P(x)| \leqslant \|P\|_\infty \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$.
15. Montrer que, pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, on a $\forall x \in [1,+\infty[\,, T_n^{(r)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left|L_j^{(r)}\right|$ et en déduire

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in [1,+\infty[\,, \left|P^{(r)}(x)\right| \leqslant \|P\|_\infty \left|T_n^{(r)}(x)\right|.$$

Partie III. Inégalités des frères Markov (1890, 1892).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

16. En revenant à la définition de T_n, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, (1-X^2)\,T_n'' - X\,T_n' + n^2\,T_n = 0$.
17. En utilisant la question précédente et la formule de Leibniz, montrer que pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on a

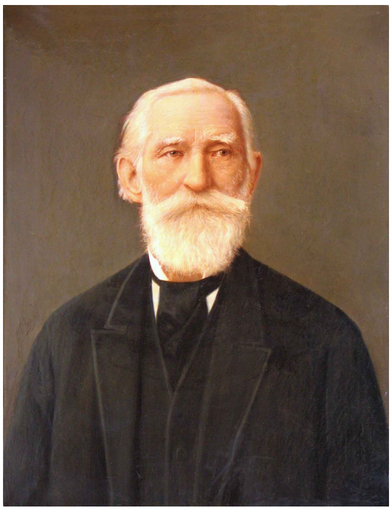
$$T_n^{(r)}(1) = \frac{n}{n+r}\,\frac{(n+r)!}{(n-r)!}\,\frac{2^r\,r!}{(2r)!} \qquad \text{et} \qquad T_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n+r}\,T_n^{(r)}(1).$$

18. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
    (a) Soit $\lambda \in [-1, 1]$.
    On définit le nombre $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$ et le polynôme $P_\lambda = P\left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2}\right)$. Montrer

$$\forall r \in [\![1, n]\!], \left|P_\lambda^{(r)}(1)\right| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^r \left|P^{(r)}(\lambda)\right|.$$

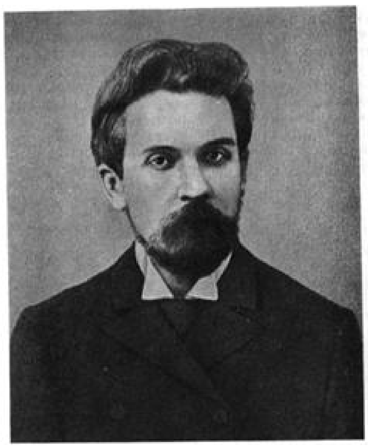
    (b) En déduire $\forall r \in [\![1, n]\!], \|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^r\,T_n^{(r)}(1)\,\|P\|_\infty$.
    (c) Montrer enfin les inégalités

$$\|P'\|_\infty \leqslant 2n^2\,\|P\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall r \in [\![2, n]\!], \|P^{(r)}\|_\infty \leqslant 2^{2r}\frac{r!}{(2r)!}\,\frac{(n+r)!}{(n-r)!}\|P\|_\infty.$$



Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894)

Андрей Андреевич Марков (1856-1922)



Владимир Андреевич Марков (1871-1897)