# DM 12 : polynômes de Bernoulli [corrigé]

## Partie I. Quelques outils.

1. **Suites d'Appell.** On appelle *suite d'Appell* toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels tels que

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n' = n\,P_{n-1}.$$

(a) Donner un exemple simple de suite d'Appell.

*On vérifie directement que* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'Appell.*

Dans la suite de la partie, on fixe une suite d'Appell $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme dominant du polynôme $P_n$.

*Une récurrence immédiate montre que* $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$.
*Par ailleurs, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\operatorname{coeff}_n(P_n) = \frac{1}{n}\operatorname{coeff}_{n-1}(P_n') = \frac{1}{n}\,n\,\operatorname{coeff}_{n-1}(P_{n-1}) = \operatorname{coeff}_{n-1}(P_{n-1}),$$

*d'où l'on tire, par une récurrence immédiate, que* $\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{coeff}_n(P_n) = 1$.
*Ainsi, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le terme dominant de* $P_n$ *est* $X^n$.

(c) i. Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$.

*Soit* $k, n \in \mathbb{N}$.

- *En considérant les degrés, on obtient que si* $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.
- *Supposons* $k < n$. *On a alors*

$$\begin{aligned}
P_n^{(k)} &= n\,P_{n-1}^{(k-1)} \\
&= n(n-1)\,P_{n-2}^{(k-2)} \\
&= \cdots \\
&= \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}\,P_{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}.
\end{aligned}$$

ii. En utilisant la formule de Taylor, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R}, P_n(X+z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(z)\,X^{n-k}.$$

*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $z \in \mathbb{R}$. *D'après la formule de Taylor et la question précédente,*

$$P_n(X+z) = \sum_{\ell=0}^{n}\frac{P_n^{(\ell)}(z)}{\ell!}X^\ell$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} \frac{n!}{(n-\ell)!} P_{n-\ell}(z)\, X^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} P_{n-\ell}(z)\, X^{\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{k}(z)\, X^{n-k}, \qquad \begin{bmatrix} \ell = n-k \\ k = n-\ell \end{bmatrix}$$

*par symétrie des coefficients binomiaux.*

2. **(Im)parité généralisée.** Dans toute cette partie, on fixe $r \in \mathbb{R}_+^*$.
   On dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est :
   - $r$-*pair* si $P(r - X) = P(X)$ ;
   - $r$-*impair* si $P(r - X) = -P(X)$.

   (a) Comment lire sur le graphe de P la $r$-parité ou la $r$-imparité de P ?

   *On a vu qu'étant donné une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *le graphe de* $x \mapsto f(r-x)$ *était l'image du graphe de* $f$ *par la réflexion d'axe la droite verticale* $\Delta = \{x = r/2\}$.
   *Ainsi,*
   - P *est* $r$-*pair si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à la droite* $\Delta$ *;*
   - P *est* $r$-*impair si et seulement si son graphe est symétrique par rapport au point* $\begin{pmatrix} r/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, *intersection de l'axe horizontal et de la droite* $\Delta$.

   (b) Montrer que tout polynôme se décompose de manière unique comme une somme d'un polynôme $r$-pair et d'un polynôme $r$-impair.

   *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$.

   **Analyse.** *Soit* $P_0$ *et* $P_1 \in \mathbb{R}[X]$, *respectivement* $r$-*pair et* $r$-*impair, tels que* $P = P_0 + P_1$.
   *En composant par* $r - X$, *on obtient*

   $$P(r - X) = P_0(r - X) + P_1(r - X) = P_0 - P_1.$$

   *En effectuant la demi-somme et la demi-différence, on obtient*

   $$P_0 = \frac{P(X) + P(r-X)}{2} \qquad \textit{et} \qquad P_1 = \frac{P(X) - P(r-X)}{2}.$$

   **Synthèse.** *Réciproquement, posons* $P_0 = \dfrac{P(X) + P(r-X)}{2}$ *et* $P_1 = \dfrac{P(X) - P(r-X)}{2}$.
   - *On a clairement* $P_0 + P_1 = P$.
   - *On a* $P_0(r - X) = \dfrac{P(r-X) + P(r-(r-X))}{2} = \dfrac{P(r-X) + P(X)}{2} = P_0(X)$, *donc* $P_0$ *est* $r$-*pair.*
   - *On a* $P_0(r - X) = \dfrac{P(r-X) - P(r-(r-X))}{2} = \dfrac{P(r-X) - P(X)}{2} = -P_1(X)$, *donc* $P_1$ *est* $r$-*impair.*

   (c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :
   - si P est $r$-pair, alors $P'$ est $r$-impair ;
   - si P est $r$-impair, alors $P'$ est $r$-pair.

- *Supposons* $P$ *$r$-pair. On a donc* $P(r-X) = P(X)$.
  *En dérivant, il vient* $-P'(r-X) = P(X)$*, c'est-à-dire* $P'(r-x) = -P(X)$*, ce qui montre que* $P'$ *est* $r$*-impair.*
- *Le même argument montre que, si* $P$ *est* $r$*-impair, alors* $P'$ *est* $r$*-pair.*

(d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :

- si $P'$ est $r$-impair, alors $P$ est $r$-pair.
- si $P'$ est $r$-pair et que $\displaystyle\int_0^r P(t)\,dt = 0$, alors $P$ est $r$-impair.

*Commençons par écrire* $P = P_0 + P_1$*, où* $P_0$ *est* $r$*-pair et* $P_1$ *est* $r$*-impair.*
*On a donc* $P' = P_0' + P_1'$.
*D'après la question précédente, on sait que* $P_0'$ *est* $r$*-impair et que* $P_1'$ *est* $r$*-pair.*

- *Supposons que* $P'$ *est* $r$*-impair. Par unicité de la décomposition, on en déduit* $P' = P_0'$ *et* $0 = P_1'$.
  *On en déduit que* $P_1$ *est constant.*
  *Comme* $P_1$ *est supposé* $r$*-impair, on a* $P_1(r/2) = 0$*. La constance de* $P_1$ *entraîne alors* $P_1 = 0$*, donc* $P = P_0$ *est* $r$*-pair.*
- *Commençons par un résultat auxiliaire : si* $I$ *est un polynôme* $r$*-impair, alors* $\displaystyle\int_0^r I(t)\,dt = 0$.
  *En effet, on peut trouver* $J \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $J' = I$*. D'après le point précédent,* $J$ *est un polynôme* $r$*-pair, donc*
  $$\int_0^r I(t)\,dt = [J(t)]_{t=0}^r = J(r) - J(0) = 0.$$
- *Supposons maintenant que* $P'$ *est* $r$*-pair et que* $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$.
  *L'unicité de la décomposition donne* $0 = P_0'$ *et* $P' = P_1'$*. On en déduit que* $P_0$ *est constant : on peut trouver* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $P_0 = \lambda$.
  *On a alors, en utilisant le résultat auxiliaire précédent,*
  $$0 = \int_0^r P(t)\,dt = \int_0^r P_0(t)\,dt + \underbrace{\int_0^r P_1(t)\,dt}_{=0} = \lambda\, r,$$
  *ce qui montre* $\lambda = 0$*, puis* $P = P_1$*, donc* $P$ *est* $r$*-impair.*

3. **Théorème de Rolle pour les polynômes.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a < b$ deux réels tels que $P(a) = P(b)$. On veut montrer $\exists c \in ]a, b[$ tel que $P'(c) = 0$. Pour ce faire, on procède par l'absurde.
   Supposons donc (par l'aburde) $\forall x \in ]a, b[\,, P'(x) \neq 0$.

   (a) Montrer que soit $\forall x \in ]a, b[\,, P'(x) > 0$, soit $\forall x \in ]a, b[\,, P'(x) > 0$.

   *Supposons par l'absurde que l'on puisse trouver* $x_+, x_- \in ]a, b[$ *tels que* $P'(x_+) \geqslant 0$ *et* $P'(x_-) \leqslant 0$.
   *Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue (car polynomiale)* $t \mapsto P'(t)$ *sur le segment* $S = [\min(x_-, x_+), \max(x_-, x_+)]$*, montre l'existence de* $\xi \in S$ *tel que* $P'(\xi) = 0$*, ce qui contredit l'hypothèse.*
   *On a donc montré non*$\big(\exists x_- \in ]a, b[ : P'(x_-) \leqslant 0$ *et* $\exists x_+ \in ]a, b[ : P'(x_+) \geqslant 0\big)$*, c'est-à-dire*
   $$\big(\forall x \in ]a, b[\,, P'(x) > 0\big) \text{ ou } \big(\forall x \in ]a, b[\,, P'(x) > 0\big).$$
   *Comme les deux possibilités s'excluent mutuellement, cela conclut.*

(b) Conclure.

*D'après la question précédente, la fonction* $t \mapsto P(t)$, *qui est dérivable, de dérivée égale à* $t \mapsto P'(t)$, *est soit strictement positive, soit strictement négative sur l'intervalle* $]a, b[$.

*Cela entraîne que* $t \mapsto P(t)$ *est strictement monotone sur le segment* $[a, b]$.

*Cela contredit l'hypothèse* $P(a) = P(b)$, *et conclut donc.*

***Remarque.*** *Dans le cours qui viendra, on montrera en fait d'abord le théorème de Rolle avant d'en déduire (entre autres) le résultat liant le sens de variation d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée. La démonstration donnée ici est donc un peu circulaire...*

## Partie II. Nombres de Bernoulli.

4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

   Montrer qu'il existe un unique polynôme $\widehat{Q} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\widehat{Q}' = Q$ et $\int_0^1 \widehat{Q}(t)\,dt = 0$.

   **Unicité.** *Soit* $P_0, P_1 \in \mathbb{R}[X]$ *deux tels polynômes.*

   *On a* $(P_0 - P_1)' = P_0' - P_1' = 0$, *donc* $P_0 - P_1$ *est constant : on peut trouver* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $P_0 = P_1 + \lambda$.

   *En intégrant, on obtient*

   $$0 = \int_0^1 P_0(t)\,dt = \int_0^1 (P_1(t) + \lambda)\,dt = \int_0^1 P_1(t)\,dt + \lambda = \lambda,$$

   *donc* $P_0 = P_1$, *ce qui conclut.*

   **Existence.** *Écrivons* $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$. *On procède en deux étapes :*

   - *On définit d'abord* $R = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{k+1} X^{k+1}$. *Un calcul direct montre que* $R' = Q$.
   - *On pose ensuite* $\alpha = \int_0^1 R(t)\,dt$, *et* $P = R - \alpha$. *Il vient alors*

     $$\int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 (R(t) - \alpha)\,dt = \int_0^1 R(t)\,dt - \alpha = \alpha - \alpha = 0,$$

     *ce qui conclut.*

5. Montrer qu'il existe une unique suite d'Appell $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0.$$

   **Unicité.** *Soit* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'Appell comme dans l'énoncé.*

   *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* $B_n = C_n$. *Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = C_n$ *par récurrence.*

   **Initialisation.** *On a* $B_0 = C_0 = 1$, *par définition des suites d'Appell.*

   **Hérédité.** *On a*

   - $B_{n+1}' = (n+1)\,B_n$ *(par définition des suites d'Appell), donc* $\left(\frac{1}{n+1}B_{n+1}\right)' = B_n$ *;*
   - $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$ *(par hypothèse), donc* $\int_0^1 \frac{1}{n+1}B_{n+1}(t)\,dt = 0$.

*D'après la question précédente,* $\dfrac{1}{n+1}B_{n+1} = \widehat{B}_n$*, c'est-à-dire* $B_{n+1} = (n+1)\,\widehat{B}_n$.
*Exactement pour les mêmes raisons,* $C_{n+1} = (n+1)\,\widehat{C}_n$.
*D'après* $P(n)$*, on a* $B_n = C_n$*. On en déduit* $B_{n+1} = (n+1)\,\widehat{B}_n = (n+1)\,\widehat{C}_n = C_{n+1}$*, ce qui montre* $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

**Existence.** *On définit la suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par récurrence, en posant*

$$B_0 = 1 \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = (n+1)\,\widehat{B}_n.$$

*On vérifie alors sans difficulté que* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'Appell. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = n\int_0^1 \widehat{B}_{n-1}(t)\,dt = 0,$$

*ce qui conclut.*

Cette suite de polynômes est la suite des *polynômes de Bernoulli*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = B_n(0)$ : il s'agit du $n$*-ième nombre de Bernoulli*.

6. Calculer les polynômes $B_1$, $B_2$ et $B_3$ et les nombres $b_0$, $b_1$, $b_2$ et $b_3$.

   *Après calcul, on obtient* $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$, $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$ *et* $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$*. Expliquons un peu plus en détail le dernier de ces résultats.*

   - *On sait que* $B_3 = 3\,\widehat{B}_2$*. Tout polynôme* $P$ *tel que* $P' = B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$ *s'écrit sous la forme* $\dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{1}{6}X - \lambda$*, pour une certaine constante* $\lambda$.
     *Pour que l'intégrale de ce polynôme sur* $[0,1]$ *vaille* $0$*, il faut et il suffit que*

     $$\lambda = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6}\right) dt,$$

     *ce qui donne* $\lambda = 0$ *après calcul.*
     *On trouve donc* $\widehat{B}_2 = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{1}{6}X$ *puis* $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$.
     *Ainsi,* $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$ *et* $b_3 = 0$.

7. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{Q}$.

   *La construction détaillée à la question précédente montre que si* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$*, alors*

   $$\widehat{P} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}X^{k+1} - \lambda, \qquad \textit{où} \qquad \lambda = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}t^{k+1}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)\,(k+2)}.$$

   *En particulier, on a l'implication* $P \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow \widehat{P} \in \mathbb{Q}[X]$.
   *Par une récurrence immédiate, on montre alors* $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathbb{Q}[X]$*, et on en déduit* $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{Q}$.

8. Montrer $\forall n \geqslant 2, B_n(1) = B_n(0)$.

   *Soit* $n \geqslant 2$*. On a*

   $$B_n(1) - B_n(0) = [B_n(t)]_{t=0}^{1} = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0,$$

   *car* $n - 1 \in \mathbb{N}^*$.

9. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$ et en déduire $\forall n \geqslant 2, b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

   ▶ *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
   *D'après la question 1(c)ii, appliquée à la suite d'Appell $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $z = 0$, on a*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(0)\, X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, X^{n-k}.$$

   ▶ *Supposons maintenant $n \geqslant 2$.*
   *En évaluant en $1$, on obtient*

$$b_n = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k,$$

   *ce qui conclut.*

10. Expliquer comment la question précédente permet de calculer la suite des nombres $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, et utiliser cette idée pour calculer $b_4$.

    *Après simplication et en isolant le terme $k = n - 1$, on obtient*

$$\forall n \geqslant 2, -\binom{n}{n-1} b_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k,$$

    *ce qui donne, après changement d'indice,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} b_k.$$

    *On obtient notamment (pour $n = 3$) :*

$$b_4 = -\frac{1}{5}\left(\binom{5}{0} b_0 + \binom{5}{1} b_1 + \binom{5}{2} b_2 + \binom{5}{3} b_3\right) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6} + 0\right) = -\frac{1}{30}.$$

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Bernoulli $B_n$ est 1-pair si $n$ est pair, et 1-impair si $n$ est impair.

    *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « si $n$ est pair, $B_n$ est $1$-pair et, si $n$ est impair, $B_n$ est $1$-impair ».*
    *Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.*

    **Initialisation.** *$B_0 = 1$ est clairement $1$-pair, d'où $P(0)$.*

    **Hérédité.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.*

    ▶ *Supposons $n$ pair. On a alors $B'_{n+1} = (n+1)\, B_n$, qui est $1$-pair d'après $P(n)$.*
    *Par ailleurs,*

$$\int_0^1 B_{n+1}(t)\, dt = \left[\frac{1}{n+2} B_{n+2}(t)\right]_{t=0}^{1} = 0$$

    *car $B_{n+2}(1) = B_{n+2}(0)$.*
    *D'après la question 2d, on en déduit que $B_{n+1}$ est $1$-impair.*

    ▶ *Supposons $n$ impair. On a alors $B'_{n+1} = (n+1)\, B_n$ qui est $1$-impair d'après $P(n)$.*
    *D'après la question 2d, on en déduit que $B_{n+1}$ est $1$-pair.*

    *Dans tous les cas, on a montré $P(n+1)$, ce qui clôt la récurrence.*

12. (a) Soit $p \geqslant 1$. Montrer que $0$, $1/2$ et $1$ sont des racines de $B_{2p+1}$.

*On sait que* $B_{2p+1}$ *est* $1$*-impair.*

- *Cela donne directement* $B_{2p+1}(1/2) = -B_{2p+1}(1/2)$*, donc* $1/2$ *est racine de* $B_{2p+1}$*.*
- *De même, on a* $B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0)$*.*
*Par ailleurs, comme* $2p+1 \geqslant 2$*, on a* $B_{2p+1}(1) = B_{2p+1}(0)$*.*
*La confrontation de ces deux égalités montre que* $0$ *et* $1$ *sont des racines de* $B_{2p+1}$*.*

(b) En utilisant le théorème de Rolle de la première partie, montrer que pour tout $p \geqslant 1$, les seules racines de $B_{2p+1}$ dans le segment $[0, 1]$ sont $0$, $1/2$ et $1$.

*Pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$*, on note* $P(p)$ *l'assertion « les racines de* $B_{2p+1}$ *appartenant à* $[0, 1]$ *sont* $0$*,* $1/2$ *et* $1$*. » Montrons* $\forall p \in \mathbb{N}^*, P(p)$ *par récurrence.*

**Initialisation.** *On sait que* $B_3$ *possède déjà ces racines. Comme il est de degré 3, il ne saurait en avoir d'autres, ce qui montre* $P(1)$*.*

**Hérédité.** *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(p)$*. Notamment,* $B_{2p+1}$ *ne possède pas de racine dans* $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

*Montrons* $P(p+1)$*.*
*On sait déjà que* $B_{2p+3}$ *possède* $0$*,* $1/2$ *et* $1$ *comme racines dans ce segment.*
*Supposons par l'absurde qu'il en possède une autre, appartenant à* $\left]0, \frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

*Par* $1$*-imparité, il possède nécessairement une racine* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

- *D'après le théorème de Rolle appliqué à* $B_{2p+2}$ *dans les deux segments* $[0, \alpha]$ *et* $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$*, on obtient que* $B_{2p+2} = \dfrac{1}{2p+3} B'_{2p+3}$ *possède déjà deux racines* $\gamma, \delta$ *telles que*
$$0 < \beta < \alpha < \gamma < \frac{1}{2}.$$
- *En appliquant à nouveau le théorème de Rolle (à* $B_{2p+2}$*, dans le segment* $[\beta, \gamma]$*), on obtient que* $B_{2p+1} = \dfrac{1}{2p+2} B'_{2p+2}$ *possède une racine* $\zeta$ *telle que*
$$0 < \beta < \zeta < \gamma < \frac{1}{2}.$$

A fortiori, $\zeta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$*, ce qui contredit l'hypothèse.*

*On a donc montré* $P(p+1)$*, ce qui clôt la récurrence.*

(c) Déterminer, pour tout $p \geqslant 1$, le nombre de racines de $B_{2p}$ dans le segment $[0, 1]$.

- *En appliquant le théorème de Rolle, on obtient que* $B_{2p} = \dfrac{1}{2p+1} B'_{2p+1}$ *possède déjà deux racines* $\alpha, \beta$ *telles que* $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$*.*
- *Montrons qu'il s'agit des seules racines de* $B_{2p}$ *appartenant à* $[0, 1]$*.*
*S'il existait une autre racine, on obtiendrait trois racines dans le segment* $[0, 1]$*, ce qui entraînerait, toujours d'après le théorème de Rolle, que* $B_{2p-1} = \dfrac{1}{2p} B'_{2p}$ *possède deux racines au moins dans* $]0, 1[$*.*
*Cela fournit une contradiction :*

- *si* $p = 1$, $B_1$ *est de degré* $1$ *et ne saurait avoir plusieurs racines ;*
- *si* $p \geqslant 2$, *la question précédente montre que la seule racine de* $B_{2p-1}$ *dans l'intervalle ouvert* $]0,1[$ *est* $\frac{1}{2}$, *et on obtient à nouveau une contradiction.*

*Dans tous les cas, le polynôme* $B_{2p}$ *possède exactement deux racines dans* $[0,1]$.

## Partie III. Formule de Faulhaber-Seki-Bernoulli.

13. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(X+1) - B_n(X) = n\,X^{n-1}$.

*Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* $B_n(X+1) - B_n(X) = n\,X^{n-1}$. *Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence.*

**Initialisation.** *On a* $B_1(X+1) - B_1(X) = \left(X + 1 - \frac{1}{2}\right) - \left(X - \frac{1}{2}\right) = 1 = 1\,X^0$, *d'où* $P(0)$.

**Hérédité.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$.

*On a*

$$\begin{aligned}
\big(B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)\big)' &= B'_{n+1}(X+1) - B'_{n+1}(X) \\
&= (n+1)\,\big(B_n(X+1) - B_n(X)\big) \\
&= (n+1)\,n\,X^{n-1} && \textit{(d'après } P(n)\textit{)} \\
&= \big((n+1)X^n\big)'.
\end{aligned}$$

*Ainsi, le polynôme* $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) - (n+1)X^n$ *possède une dérivée nulle. Il est donc constant, ce qui permet de trouver* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n + \lambda.$$

*En évaluant en* $0$ *(et en utilisant le fait que* $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$, *car* $n+1 \geqslant 2$*), on obtient* $\lambda = 0$, *ce qui montre* $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

14. En déduire la formule suivante (Faulhaber 1631, Seki 1712, Bernoulli 1713 [1]).

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\big(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\big).$$

*Soit* $n, p \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^p &= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n}(p+1)\,k^p \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n}\big(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\big) && \textit{(ques. préc. appliquée à } p+1\textit{)} \\
&= \frac{1}{p+1}\big(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\big). && \textit{(télescopage)}
\end{aligned}$$

15. Montrer

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}(-1)^k b_k\, n^{p+1-k}.$$

1. Jacques Bernoulli est mort en 1705 mais son livre *Ars Conjectandi* fut publié après sa mort par son neveu Nicolas.

*D'après la question 12a, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0$ : autrement dit, le seul nombre de Bernoulli non nul de rang impair est $b_1 = -\dfrac{1}{2}$.*
*Ainsi, la suite $\left((-1)^k b_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est exactement la suite des nombres de Bernoulli, à une exception près : le unième nombre de Bernoulli $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ est remplacé par $\dfrac{1}{2} = b_1 + 1$.*
*Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente et l'expression obtenue à la question 9, on obtient*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^p &= \sum_{k=0}^{n-1} k^p + n \\
&= \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\right) + n && \textit{(ques. préc. appliquée à } n-1\textit{)} \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k} b_k\, n^{p+1-k} + n \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k} (-1)^k b_k\, n^{p+1-k}.
\end{aligned}$$

## Partie IV. Théorème de von Staudt-Clausen (1940).

16. Soit $k, r, s \in \mathbb{N}$ tels que[2] $s \leqslant k$. Montrer l'égalité $\dbinom{k}{r}\dbinom{r}{s} = \dbinom{k}{s}\dbinom{k-s}{r-s}$.

    *Si $r > k$, on a $k - s > r - s$. Si $r \leqslant k$ et $r > s$, on a $k > s$. Dans les deux cas, l'égalité de l'énoncé est vraie, et affirme $0 = 0$.*
    *On peut donc supposer $s \leqslant r \leqslant k$. On a alors $s \leqslant r$ et $r-s \leqslant k-s$, donc tous les coefficients binomiaux en présence sont non nuls.*
    *On a alors*

$$\binom{k}{r}\binom{r}{s} = \frac{k!}{r!(k-r)!}\frac{r!}{s!(r-s)!} = \frac{k!}{(k-r)!s!(r-s)!}$$

$$\textit{et}\qquad \binom{k}{s}\binom{k-s}{r-s} = \frac{k!}{s!(k-s)!}\frac{(k-s)!}{(r-s)!(k-r)!} = \frac{k!}{s!(r-s)!(k-r)!},$$

    *ce qui conclut.*

17. Dans cette question, on définit

    - pour tous $p, r \in \mathbb{N}$, le nombre $A_{p,r} = \displaystyle\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s} s^p$ ;
    - pour tout $r \in \mathbb{N}$, le polynôme $\dbinom{X}{r} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-r+1)}{r!}$.

    (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. En évaluant les deux polynômes en tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, montrer

$$\forall p \in \mathbb{N}, X^p = \sum_{r=0}^{p} A_{p,r}\binom{X}{r}.$$

2. Cette précision manquait dans le sujet distribué.
Il aurait fallu la mettre, ou dire explicitement que le coefficient $\dbinom{k-s}{r-s}$ était supposé nul dans le cas contraire.

*Soit* $k \in [\![0, p]\!]$. *On a*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{r=0}^{p} A_{p,r}\binom{X}{r}\right)(k) &= \sum_{r=0}^{p} A_{p,r}\binom{k}{r} \\
&= \sum_{r=0}^{k} A_{p,r}\binom{k}{r} && \textit{(car si } r > k\textit{, on a } \binom{k}{r} = 0\textit{)} \\
&= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\binom{k}{r}s^p \\
&= \sum_{s=0}^{k} s^p\binom{k}{s}\sum_{r=s}^{k}(-1)^{r-s}\binom{k-s}{r-s} && \textit{(ques. préc. et échange des } \Sigma\textit{)} \\
&= \sum_{s=0}^{p} s^p\binom{k}{s}\sum_{\rho=0}^{k-s}(-1)^{\rho}\binom{k-s}{\rho} && \begin{bmatrix}\rho = r-s\\ r = \rho+s\end{bmatrix} \\
&= \sum_{s=0}^{p} s^p\binom{k}{s}\underbrace{(1-1)^{k-s}}_{=\delta_{k,s}} && \textit{(binôme de Newton)} \\
&= k^p.
\end{aligned}$$

*Par ailleurs, il est clair que* $\forall r \in \mathbb{N}, \deg\binom{X}{r} = r$.

*Ainsi, par stabilité par combinaison linéaire, le polynôme* $\sum_{r=0}^{p} A_{p,r}\binom{X}{r}$ *appartient à* $\mathbb{R}_p[X]$.

*Les deux polynômes* $\sum_{r=0}^{p} A_{p,r}\binom{X}{r}$ *et* $X^p$, *éléments de* $\mathbb{R}_p[X]$, *coïncident donc en* $p+1$ *points, ce qui montre qu'ils sont égaux, par rigidité des polynômes.*

(b) En déduire que, pour tous entiers $0 \leqslant r \leqslant p$, le nombre $\frac{A_{p,r}}{r!}$ est entier.

*Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Remarquons que l'égalité de la question précédente se réécrit*

$$X^p = \sum_{r=0}^{p} \frac{A_{p,r}}{r!}X(X-1)\cdots(X-r+1).$$

*Pour tout* $r \in [\![0, p]\!]$, *on note alors* $E(r)$ *l'assertion* $\frac{A_{p,r}}{r!} \in \mathbb{Z}$. *Montrons* $\forall r \in [\![0, p]\!]$ *par récurrence finie forte descendante.*

**Initialisation.** *L'expression précédente montre que* $\frac{A_{p,p}}{p!}$ *est le coefficient dominant de* $X^p$, *c'est-à-dire* 1. *Cela montre notamment* $E(1)$.

**Hérédité.** *Soit* $s \in [\![1, p]\!]$ *tel que* $\forall r \in [\![s, p]\!], E(r)$. *Montrons* $E(s-1)$.

*Le polynôme*

$$X^p - \sum_{r=s}^{p} \frac{A_{p,r}}{r!}X(X-1)\cdots(X-r+1) = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{A_{p,r}}{r!}X(X-1)\cdots(X-r+1)$$

*est à coefficients entiers, d'après l'expression de gauche et les différentes hypothèses que l'on vient de faire.*

*Or, le coefficient dominant de l'expression de droite est* $\frac{A_{p,s-1}}{(s-1)!}$, *qui doit donc être entier.*

*Cela montre* $E(s-1)$, *et clôt la récurrence.*

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P(X+1) - P(X) = X^p \right\} = \left\{ \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \binom{X}{r+1} + \kappa \,\middle|\, \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Notons* $S = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P(X+1) - P(X) = X^p \right\}$.

- *Commençons par un calcul préliminaire : pour tout* $r \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned}\binom{X}{r+1} \circ (X+1) - \binom{X}{r+1} &= \frac{(X+1)X\cdots(X-r+1)}{(r+1)!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-r)}{(r+1)!} \\ &= \frac{X\cdots(X-r+1)}{(r+1)!}\big[(X+1)-(X-r)\big] \\ &= \frac{X\cdots(X-r+1)}{r!} = \binom{X}{r}.\end{aligned}$$

- *Notons maintenant* $Q = \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \binom{X}{r+1}$ *et montrons* $Q \in S$*. On a*

$$\begin{aligned} Q(X+1) - Q(X) &= \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \left[ \binom{X}{r+1} \circ (X+1) - \binom{X}{r+1} \right] \\ &= \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \binom{X}{r} && \textit{(calc. prélim.)} \\ &= X^p. \end{aligned}$$

- *Il est clair que, pour tout* $\kappa \in \mathbb{R}$ *(vu comme un polynôme constant), on a* $\kappa \circ (X+1) - \kappa = 0$*. Ajouté au point précédent, cela montre directement l'inclusion réciproque.*
- *Montrons maintenant l'inclusion directe. Soit* $R \in S$*. On a alors*

$$\begin{aligned}(R-Q)\circ(X+1) - (R-Q) &= \big(R(X+1) - R\big) - \big(Q(X+1) - Q\big) \\ &= 0.\end{aligned}$$

  *On en déduit notamment, par récurrence, que* $\forall n \in \mathbb{N}, (R-Q)(n) = (R-Q)(0)$*, ce qui montre (par rigidité) que* $R - Q$ *est un polynôme constant.*
  *On peut donc trouver* $\kappa \in \mathbb{R}$ *tel que* $R - Q = \kappa$*, c'est-à-dire* $R = Q + \kappa$*, ce qui conclut.*

(d) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, \dfrac{B_{p+1} - b_{p+1}}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} A_{p,r} \binom{X}{r+1}$.

*Soit* $p \in \mathbb{N}$*. Notons* $P = \dfrac{B_{p+1} - b_{p+1}}{p+1}$.

*La formule de Faulhaber-Seki-Bernoulli (appliquée à* $n-1$*) affirme que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} k^p = Q(n)$*.*

*Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on en déduit* $Q(n+1) - Q(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p - \sum_{k=0}^{n-1} k^p = n^p$*.*

*Par rigidité, il s'ensuit* $Q(X+1) - Q = X^p$ *donc, d'après la question précédente, il existe* $\kappa \in \mathbb{R}$ *tel que* $Q(X) = \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \binom{X}{r+1} + \kappa$*.*

*En évaluant en* $0$*, il vient* $\kappa = 0$*, ce qui conclut. x*

(e) En considérant le bon coefficient dans l'égalité précédente, montrer

$$\forall p \in \mathbb{N}, b_p = \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p.$$

*On va calculer le coefficient de degré* $1$ *de part et d'autre.*

▶ *On a, d'après la question 9,*

$$\mathrm{coeff}_1\left(\frac{B_{p+1} - b_{p+1}}{p+1}\right) = \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{p} b_p = b_p.$$

▶ *Par ailleurs, pour tout* $r \in \mathbb{N}$, *en utilisant que le coefficient constant d'un polynôme est sa valeur en* $0$, *on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{coeff}_1\left(\binom{X}{r+1}\right) &= \frac{1}{(r+1)!}\,\mathrm{coeff}_1\big(X(X-1)\cdots(X-r)\big)\\
&= \frac{1}{(r+1)!}\,\mathrm{coeff}_0\big((X-1)\cdots(X-r)\big)\\
&= \frac{(-1)^r}{(r+1)!} r! = \frac{(-1)^r}{r+1},
\end{aligned}$$

*donc*

$$\begin{aligned}
\mathrm{coeff}_1\left(\sum_{r=0}^{n} A_{p,r}\binom{X}{r+1}\right) &= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r+1} A_{p,r}\\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s} s^p\\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{s}\binom{r}{s} s^p.
\end{aligned}$$

(f) Montrer l'existence d'une famille d'entiers relatifs $(a_{p,r})_{0 \leqslant r \leqslant p}$ telle que

$$\forall r \leqslant p \in \mathbb{N}, \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p = \frac{r!}{r+1} a_{p,r}.$$

*Soit* $r \leqslant p \in \mathbb{N}$. *On a*

$$A_{p,r} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s} s^p \qquad \textit{donc} \qquad \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p = \frac{(-1)^r}{r+1} A_{p,r}.$$

*La question 15b conclut alors.*

16. Soit $r \geqslant 5$ un entier tel que $r+1$ est composé. Montrer que $r+1 \mid r!$.

*On peut trouver* $2 \leqslant a \leqslant b$ *tels que* $r+1 = ab$.
*Remarquons que* $a+b \leqslant 2b \leqslant ab$. *On a même* $a+b \leqslant ab-1$ *: en effet, si on avait* $a+b = ab$, *notre chaîne d'inégalités serait une chaîne d'égalités, c'est-à-dire que* $a+b = 2b = ab$, *ce qui donne* $a = b = 2$, *cas exclu par l'énoncé.*
*Ainsi, on a montré* $a+b \leqslant ab-1 = r$, *c'est-à-dire que* $b \leqslant r-a$. *En particulier,* $b \mid (r-a)!$, *et il est clair que* $a \mid a!$.
*Comme* $\dfrac{r!}{a!(r-a)!} = \dbinom{r}{a}$ *est un entier, on en déduit que* $r+1 = ab \mid a!(r-a)! \mid r!$, *ce qui conclut.*

17. Soit $r \geqslant 1$ un entier tel que $r+1$ est premier. Montrer que

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p \equiv \sum_{s=0}^{r} s^p \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } r \mid p \text{ et } p > 0 \\ 0 & \text{si } r \nmid p \end{cases} \pmod{r+1}.$$

► *Soit $s \in [\![0, r]\!]$. On a*

$$(-1)^s \equiv ((r+1)-1)^s \equiv \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (r+1)^t (-1)^{s-t} \equiv (-1)^s \pmod{r+1},$$

*ce qui donne déjà la première congruence.*

► *Distinguons maintenant deux cas.*

- *Supposons $r \mid p$ et $p > 0$.*
  *Le petit théorème de Fermat, appliqué au premier $r+1$, entraîne $\forall s \in [\![1, r]\!], s^r \equiv 1 \pmod{r+1}$. On en déduit $\forall s \in [\![1, r]\!], s^p \equiv 1 \pmod{r+1}$. Comme par ailleurs $p > 0$, on a $0^p = 0$. Ainsi,*

$$\sum_{s=0}^{r} s^p = \sum_{s=1}^{r} s^p \equiv \sum_{s=1}^{r} 1 \equiv r \equiv -1 \pmod{r+1}.$$

- *Supposons maintenant $r \nmid p$. (En particulier, $p > 0$).*
  *D'après le résultat donné en indication, on sait qu'il existe un entier $u \in [\![1, r]\!]$ (qui est donc inversible modulo $r+1$) tel que l'ordre de $[u]_{r+1}$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z})^\times$ soit $r$.*
  *En particulier, comme $r \nmid p$, on a $u^p \not\equiv 1 \pmod{r+1}$.*
  *Comme $u$ est inversible modulo $r+1$, tout élément $s \in [\![1, r]\!]$ vérifie $s \equiv u\,\sigma \pmod{r+1}$, pour un unique $\sigma \in [\![1, r]\!]$. La somme $S = \sum_{s=0}^{r} s^p$ vérifie donc*

$$S = \sum_{s=0}^{r} s^p = \sum_{s=1}^{r} s^p \equiv \sum_{\sigma=1}^{r} (u\,\sigma)^p \equiv u^p \sum_{\sigma=1}^{r} \sigma^p \equiv u^p\, S \pmod{r+1},$$

  *c'est-à-dire que*

$$\underbrace{(u^p - 1)}_{\not\equiv 0 \pmod{r+1}} S \equiv 0 \pmod{r+1}.$$

  *Par intégrité de $\mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z}$, on en déduit $S \equiv 0 \pmod{r+1}$.*

18. Conclure la démonstration du *théorème de von Staudt-Clausen* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n} \equiv -\sum_{\ell - 1 \mid 2n} \frac{1}{\ell} \pmod{1},$$

où la somme court sur les nombres premiers $\ell$ tels que $\ell - 1$ divise l'entier $2n$.

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après les questions précédentes,*

$$b_{2n} = \sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^{2n} = \sum_{r=0}^{2n} \frac{r!}{r+1} a_{p,r},$$

*où les deux sommes sont égales terme à terme.*
*Nous allons examiner les différentes contributions de chaque terme.*

- *Si* $r \geqslant 5$ *est tel que* $r+1$ *est composé, on a* $\dfrac{r!}{r+1}a_{p,r} \equiv 0 \pmod 1$.
  *La même conclusion est évidente si* $r=0$.
- *Si* $r \geqslant 1$ *est tel que* $r+1$ *est premier et que* $r$ *ne divise pas* $2n$, *on a*

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^{2n} \equiv 0 \pmod{r+1} \qquad \textit{donc} \qquad \frac{1}{r+1}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^{2n} \equiv 0 \pmod 1.$$

- *Si* $r \geqslant 1$ *est tel que* $\ell = r+1$ *est premier et que* $r = \ell - 1$ *divise* $2n$, *on a*

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^{2n} \equiv -1 \pmod{\ell} \qquad \textit{donc} \qquad \frac{1}{r+1}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^{2n} \equiv -\frac{1}{r+1} \equiv -\frac{1}{\ell} \pmod 1.$$

- *Il reste à considérer le terme* $r=3$ *(qui n'est pas* $\geqslant 5$, *mais qui est tel que* $r+1$ *soit composé). On a alors*

$$\sum_{s=0}^{3}(-1)^s\binom{3}{s}s^{2n} = -3 + 3\times 2^{2n} - 3^{2n} \equiv 0 \pmod 4 \quad \textit{donc} \quad \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{3}(-1)^s\binom{3}{s}s^{2n} \equiv 0 \pmod 1.$$

In fine, *seuls les termes de l'avant-dernier type contribuent à la somme réduite modulo* 1, *ce qui fournit la formule attendue :*

$$b_{2n} \equiv -\sum_{\ell-1 \mid 2n}\frac{1}{\ell} \pmod 1.$$