DM 12 : polynômes de Bernoulli

Partie I. Quelques outils.

1. **Suites d'Appell.** On appelle *suite d'Appell* toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels tels que

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n' = n\, P_{n-1}.$$

   (a) Donner un exemple simple de suite d'Appell.

   Dans la suite de la partie, on fixe une suite d'Appell $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme dominant du polynôme P_n.

   (c) i. Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$.

   ii. En utilisant la formule de Taylor, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R}, P_n(X+z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(z)\, X^{n-k}.$$

2. **(Im)parité généralisée.** Dans toute cette partie, on fixe $r \in \mathbb{R}_+^*$.
   On dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est :
   - r-*pair* si $P(r-X) = P(X)$;
   - r-*impair* si $P(r-X) = -P(X)$.

   (a) Comment lire sur le graphe de P la r-parité ou la r-imparité de P ?

   (b) Montrer que tout polynôme se décompose de manière unique comme une somme d'un polynôme r-pair et d'un polynôme r-impair.

   (c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :
   - si P est r-pair, alors P' est r-impair ;
   - si P est r-impair, alors P' est r-pair.

   (d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :
   - si P' est r-impair, alors P est r-pair.
   - si P' est r-pair et que $\displaystyle\int_0^r P(t)\,dt = 0$, alors P est r-impair.

3. **Théorème de Rolle pour les polynômes.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a < b$ deux réels tels que $P(a) = P(b)$.
   On veut montrer $\exists c \in]a,b[$ tel que $P'(c) = 0$. Pour ce faire, on procède par l'absurde.
   Supposons donc (par l'aburde) $\forall x \in]a,b[\,, P'(x) \neq 0$.

   (a) Montrer que soit $\forall x \in]a,b[\,, P'(x) > 0$, soit $\forall x \in]a,b[\,, P'(x) > 0$.

   (b) Conclure.

Partie II. Nombres de Bernoulli.

4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

   Montrer qu'il existe un unique polynôme $\widehat{Q} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\widehat{Q}' = Q$ et $\displaystyle\int_0^1 \widehat{Q}(t)\,dt = 0$.
5. Montrer qu'il existe une unique suite d'Appell $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0.$$

Cette suite de polynômes est la suite des *polynômes de Bernoulli*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = B_n(0)$: il s'agit du n*-ième nombre de Bernoulli*.

6. Calculer les polynômes B_1, B_2 et B_3 et les nombres b_0, b_1, b_2 et b_3.
7. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{Q}$.
8. Montrer $\forall n \geqslant 2, B_n(1) = B_n(0)$.
9. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$ et en déduire $\forall n \geqslant 2, b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.
10. Expliquer comment la question précédente permet de calculer la suite des nombres $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, et utiliser cette idée pour calculer b_4.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Bernoulli B_n est 1-pair si n est pair, et 1-impair si n est impair.
12. (a) Soit $p \geqslant 1$. Montrer que 0, $1/2$ et 1 sont des racines de B_{2p+1}.
    (b) En utilisant le théorème de Rolle de la première partie, montrer que pour tout $p \geqslant 1$, les seules racines de B_{2p+1} dans le segment $[0, 1]$ sont 0, $1/2$ et 1.
    (c) Déterminer, pour tout $p \geqslant 1$, le nombre de racines de B_{2p} dans le segment $[0, 1]$.

Partie III. Formule de Faulhaber-Seki-Bernoulli.

13. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(X+1) - B_n(X) = n\,X^{n-1}$.
14. En déduire la formule suivante (Faulhaber 1631, Seki 1712, Bernoulli 1713 [1]).
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\big(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\big).$$
15. Montrer
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^k b_k\, n^{p+1-k}.$$

1. Jacques Bernoulli est mort en 1705 mais son livre *Ars Conjectandi* fut publié après sa mort par son neveu Nicolas.

Partie IV. Théorème de von Staudt-Clausen (1940).

16. Soit $k, r, s \in \mathbb{N}$ tels que[2] $s \leqslant k$. Montrer l'égalité $\binom{k}{r}\binom{r}{s} = \binom{k}{s}\binom{k-s}{r-s}$.
17. Dans cette question, on définit
    - ▸ pour tous $p, r \in \mathbb{N}$, le nombre $A_{p,r} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} s^p$;
    - ▸ pour tout $r \in \mathbb{N}$, le polynôme $\binom{X}{r} = \frac{X(X-1)\cdots(X-r+1)}{r!}$.

    (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. En évaluant les deux polynômes en tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, montrer

    $$\forall p \in \mathbb{N}, X^p = \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \binom{X}{r}.$$

    (b) En déduire que, pour tous entiers $0 \leqslant r \leqslant p$, le nombre $\frac{A_{p,r}}{r!}$ est entier.

    (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer

    $$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P(X+1) - P(X) = X^p \right\} = \left\{ \sum_{r=0}^{p} A_{p,r} \binom{X}{r+1} + \kappa \,\middle|\, \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

    (d) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{B_{p+1} - b_{p+1}}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} A_{p,r} \binom{X}{r+1}$.

    (e) En considérant le bon coefficient dans l'égalité précédente, montrer

    $$\forall p \in \mathbb{N}, b_p = \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p.$$

    (f) Montrer l'existence d'une famille d'entiers relatifs $(a_{p,r})_{0 \leqslant r \leqslant p}$ telle que

    $$\forall r \leqslant p \in \mathbb{N}, \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p = \frac{r!}{r+1} a_{p,r}.$$

16. Soit $r \geqslant 5$ un entier tel que $r+1$ est composé. Montrer que $r + 1 \mid r!$.
17. Soit $r \geqslant 1$ un entier tel que $r+1$ est premier. Montrer que

    $$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p \equiv \sum_{s=0}^{r} s^p \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } r \mid p \text{ et } p > 0 \\ 0 & \text{si } r \nmid p \end{cases} \pmod{r+1}.$$

    On pourra utiliser sans démonstration que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z})^\times$ *est cyclique.*
18. Conclure la démonstration du *théorème de von Staudt-Clausen* :

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n} \equiv -\sum_{\ell - 1 \mid 2n} \frac{1}{\ell} \pmod 1,$$

    où la somme court sur les nombres premiers ℓ tels que $\ell - 1$ divise l'entier $2n$.

---

2. Cette précision manquait dans le sujet distribué.

Il aurait fallu la mettre, ou dire explicitement que le coefficient $\binom{k-s}{r-s}$ était supposé nul dans le cas contraire.