DM 13 : deux théorèmes généraux sur les suites récurrentes [corrigé]

Exercice. Théorème du point fixe de Banach (1922).

Dans cet exercice, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une *contraction*, c'est-à-dire que l'on peut trouver une constante $k \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{C}, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$.

On considère alors une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Le théorème du point fixe de Banach affirme :

- que f possède un unique point fixe ℓ ;
- que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.

   Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{C}$ *deux points fixes de* f.

   On a alors

   $$|\ell_2 - \ell_1| = |f(\ell_2) - f(\ell_1)| \leqslant k\,|\ell_2 - \ell_1|\,.$$

   Comme $k < 1$, *cela force* $|\ell_2 - \ell_1| = 0$, *et donc* $\ell_1 = \ell_2$.

2. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n\,|u_1 - u_0|$.

   Pour tout $j \in \mathbb{N}$, *on a*

   $$|u_{j+2} - u_{j+1}| = |f(u_{j+1}) - f(u_j)| \leqslant k\,|u_{j+1} - u_j|\,;$$

   et une récurrence immédiate conclut.

   (b) En déduire $\forall p, q \in \mathbb{N}, |u_{p+q} - u_p| \leqslant \dfrac{k^p}{1-k}\,|u_1 - u_0|$.

   Soit $p, q \in \mathbb{N}$. *On a*

   $$\begin{aligned}
   |u_{p+q} - u_p| &= \left|\sum_{j=0}^{q-1} \left(u_{p+j+1} - u_{p+j}\right)\right| \\
   &\leqslant \sum_{j=0}^{q-1} |u_{p+j+1} - u_{p+j}| && \textit{(inégalité triangulaire)} \\
   &\leqslant \sum_{j=0}^{q-1} k^{p+j}\,|u_1 - u_0| && \textit{(question précédente)} \\
   &\leqslant \frac{k^p - k^{p+q}}{1-k}\,|u_1 - u_0| && \textit{(car } k \neq 1\textit{)} \\
   &\leqslant \frac{k^p}{1-k}\,|u_1 - u_0|\,.
   \end{aligned}$$

3. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que la suite $(u_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ converge.

   On notera ℓ sa limite.

En appliquant la question précédente à $p = 0$, *on obtient* $\forall q \in \mathbb{N}, |u_q - u_0| \leqslant \dfrac{1}{1-k}\,|u_1 - u_0|$.

L'inégalité triangulaire donne alors $\forall q \in \mathbb{N}, |u_q| \leqslant |u_0| + \dfrac{1}{1-k}\,|u_1 - u_0|$, *ce qui montre que la suite* u *est bornée.*

Le théorème de Bolzano-Weierstrass conclut alors.

4. En réutilisant la question 2b, montrer que l'on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   Un lemme du cours montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *En appliquant la question précédente à* $p = n$ *et* $q = \varphi(n) - n$, *on obtient*

$$\left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\,|u_1 - u_0|\,.$$

   Comme $\dfrac{k^n}{1-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on en déduit* $u_{\varphi(n)} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par encadrement, puis*

$$u_n = u_{\varphi(n)} - \left(u_{\varphi(n)} - u_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

5. Conclure.

   Il reste à montrer que ℓ *est un point fixe de* f.

   Il y a une petite difficulté : la notion de continuité n'ayant pas été vue pour une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(et n'ayant pas été supposée pour* f*), on ne peut pas vraiment réutiliser tel quel l'argument du cours.*

   On va utiliser l'inégalité triangulaire : la suite constante $(|f(\ell) - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge évidemment vers son unique valeur* $|f(\ell) - \ell|$, *mais, on a également, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\begin{aligned}|f(\ell) - \ell| &\leqslant |f(\ell) - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_n| + |u_n - \ell| \\ &\leqslant \underbrace{k\,|\ell - u_n|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{|u_{n+1} - u_n|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{|u_n - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0},\end{aligned}$$

   donc $|f(\ell) - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Par unicité de la limite, on obtient $|f(\ell) - \ell| = 0$, *d'où* $f(\ell) = \ell$.

Problème. Théorème de Kohlberg-Neyman (1981).

Dans cet exercice, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une *semi-contraction*, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|\,.$$

On veut montrer l'existence de $v \in \mathbb{C}$ tel que, toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v.$$

1. Montrer le résultat dans les cas où f est une translation, et dans ceux où f est une rotation.

- *Si* f *est une translation de vecteur* v*, toute suite* u *vérifiant la relation de récurrence de l'énoncé est de la forme* $u = (u_0 + nv)_{n\in\mathbb{N}}$*, comme le montre une récurrence immédiate. On en déduit*

$$u_n = \frac{u_0 + nv}{n} = \frac{u_0}{n} + v \xrightarrow[n\to+\infty]{} v.$$

- *Si* f *est une rotation de centre* ω*, toute suite* u *vérifiant la relation de récurrence de l'énoncé vérifie l'égalité* $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \omega| = |u_0 - \omega|$*, ce qui montre que la suite* u *est bornée. On en déduit*

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. On suppose avoir trouvé $v \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{f^n(0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$. Conclure la démonstration du théorème.

   Remarquons d'abord que si f *et* g *sont des semi-contractions, pour tous* $x, y \in \mathbb{C}$*, on a*

$$|(g\circ f)(x) - (g\circ f)(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|,$$

   ce qui montre que $g \circ f$ *est une semi-contraction.*

   Par une récurrence immédiate, cela montre que toute itérée d'une semi-contraction est encore une semi-contraction.

   Vu l'expression des suites récurrentes d'itératrice f*, il reste à montrer* $\forall u_0 \in \mathbb{C}, \dfrac{f^n(u_0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$*.*

   Soit donc $u_0 \in \mathbb{C}$*. On a*

$$\left|\frac{f^n(u_0)}{n} - \frac{f^n(0)}{n}\right| = \frac{|f^n(u_0) - f^n(0)|}{n} \leqslant \frac{|u_0|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   On en déduit que la distance

$$\left|\frac{f^n(u_0)}{n} - v\right| \leqslant \left|\frac{f^n(u_0)}{n} - \frac{f^n(0)}{n}\right| + \left|\frac{f^n(0)}{n} - v\right|$$

   tend vers 0*, d'où* $\dfrac{f^n(u_0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$*.*

3. **Lemme de Fekete.** On considère une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ *sous-additive*, c'est-à-dire telle que $\forall p, q \in \mathbb{N}, d_{p+q} \leqslant d_p + d_q$.

   (a) Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{d_n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ possède une borne inférieure $\ell \in \mathbb{R}_+$.

   L'ensemble est non vide (il contient d_1*) et minoré (par* 0*) : la propriété de la borne inférieure montre l'existence de* $\ell = \inf\left\{ \dfrac{d_n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$*.*

   Comme 0 *minore l'ensemble, on a* $\ell \geqslant 0$ *par passage à la borne inférieure.*

   (b) Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max(d_0, \dots, d_{T-1})$. Montrer $\forall n \geqslant T, \dfrac{d_n}{n} \leqslant \dfrac{d_T}{T} + \dfrac{M}{n}$.

   Soit $n \geqslant T$*. On écrit la division euclidienne de* n *par* T *: on peut trouver* $q \in \mathbb{N}$ *et* $r \in [\![0, T-1]\!]$ *tels que* $n = qT + r$*.*

   Par récurrence, on vérifie que si $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$*, on a* $d_{m_1+\cdots+m_r} \leqslant d_{m_1} + \cdots + d_{m_r}$*.*

   Ici, cela donne $d_n = d_{qT+r} \leqslant \underbrace{d_T + \cdots + d_T}_{q \text{ fois}} + d_r \leqslant q\, d_T + d_r$*, d'où*

$$\frac{d_n}{n} \leqslant \frac{q\, d_T}{qT + r} + \frac{d_r}{n} \leqslant \frac{d_T}{T} + \frac{M}{n}.$$

(c) Déduire de ce qui précède que $\dfrac{d_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Par caractérisation epsilonesque de la borne inférieure, on peut trouver $T \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\dfrac{d_T}{T} \leqslant \ell + \varepsilon$. *Comme dans la question précédente, on note* $M = \max(d_0, \dots, d_{T-1})$.

Comme $\dfrac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, on peut trouver* $N \geqslant T$ *tel que* $\forall n \geqslant N, \dfrac{M}{n} \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant N$. *En utilisant la question précédente, on a donc*

$$\frac{d_n}{n} \leqslant \frac{d_T}{T} + \frac{M}{n} \leqslant (\ell + \varepsilon) + \varepsilon \leqslant \ell + 2\varepsilon.$$

Comme $\ell = \inf\left\{ \dfrac{d_n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$*, il est par ailleurs clair que* $\dfrac{d_n}{n} \geqslant \ell$.

On a donc notamment $\left| \dfrac{d_n}{n} - \ell \right| \leqslant 2\varepsilon$*, ce qui conclut.*

4. En utilisant le lemme de Fekete, montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\dfrac{|f^n(0)|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\left|f^{p+q}(0)\right| \leqslant \underbrace{\left|f^{p+q}(0) - f^p(0)\right|}_{=|f^p(f^q(0)) - f^p(0)| \leqslant |f^q(0) - 0|} + |f^p(0)| \leqslant |f^q(0)| + |f^p(0)|,$$

donc la suite $(f^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ *est sous-additive.*

Le lemme de Fekete conclut.

5. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $\left(\dfrac{f^n(0)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

L'hypothèse $\ell = 0$ *donne* $\left|\dfrac{f^n(0)}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, ce qui équivaut à* $\dfrac{f^n(0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Dans la suite des questions, on suppose toujours $\ell > 0$.

6. **Un lemme d'existence de records.** Soit $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N : \forall k \leqslant n, s_k \leqslant s_n.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

Puisque $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$*, l'ensemble* $\{r \in \mathbb{N} \,|\, s_r > \max(s_0, \dots, s_N)\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$ *(il contient même tous les entiers à partir d'un certain rang). On peut donc considérer son minimum*

$$n = \min\{r \in \mathbb{N} \,|\, s_r > \max(s_0, \dots, s_N)\}.$$

Par construction, on a $n > N$.

Soit maintenant $k \leqslant n$ *:*

- *si* $k = n$*, on a naturellement* $s_k \leqslant s_n$ *;*
- *si* $k < n$*, la minimalité de* n *montre que* $k \notin \{r \in \mathbb{N} \,|\, s_r > \max(s_0, \dots, s_N)\}$*, c'est-à-dire que l'on a* $s_k \leqslant \max(s_0, \dots, s_N)$. A fortiori, $s_k \leqslant s_n$ *(l'inégalité est même stricte).*

Cela conclut.

7. (a) Soit $\lambda \in]0, \ell[$. En appliquant la question précédente à la suite $(d_n - \lambda n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $\forall j \in [\![0, n]\!], d_n \geqslant d_{n-j} + \lambda j$.

   ▸ *On a déjà* $d_n - \lambda n = n\left(\dfrac{d_n}{n} - \lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, *car* $\dfrac{d_n}{n} - \lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \lambda > 0$.

   ▸ *Soit* $N \in \mathbb{N}$. *D'après la question précédente, on peut donc trouver* $n \geqslant N$ *tel que*

$$\forall k \leqslant n, d_k - \lambda k \leqslant d_n - \lambda n.$$

   Soit $j \in [\![0, n]\!]$.

   En appliquant la $\forall$*-assertion précédente à* $k = n - j$, *on obtient* $d_{n-j} - \lambda(n-j) \leqslant d_n - \lambda n$, *c'est-à-dire* $d_n \geqslant d_{n-j} + \lambda j$.

   (b) Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, \ell[$ convergeant vers 0. Montrer l'existence d'une extractrice α telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![0, \alpha(k)]\!], d_{\alpha(k)} \geqslant d_{\alpha(k)-j} + (\ell - \varepsilon_k)j.$$

   La question précédente (appliquée à $\lambda = \ell - \varepsilon_k$*) montre que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe une infinité d'entiers* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall j \in [\![0, n]\!], d_n \geqslant d_{n-j} + (\ell - \varepsilon_k)j$.

   On construit alors facilement, par récurrence, une extractrice α *possédant la propriété de l'énoncé.*

8. (a) Soit $\omega \in \mathbb{U}$. Montrer $\forall z \in \mathbb{C}, \text{Ré}\,(\omega\, z) \leqslant |z|$.

   C'est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vue en cours.

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'existence de $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $\text{Ré}\,(\omega\, z) = -|z|$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$. *On peut trouver* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = |z|\, e^{i\theta}$. *Le nombre* $\omega = e^{i(\pi-\theta)}$ *convient alors :* $\text{Ré}\,(\omega\, z) = \text{Ré}\left(|z|\, e^{i(\theta+\pi-\theta)}\right) = -|z|$.

> Dans la suite, on fixe une suite $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élements de $\mathbb{U}$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ré}\left(\omega_k\, f^{\alpha(k)}(0)\right) = -d_{\alpha(k)}$.

9. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \leqslant \alpha(k)$.

   (a) Montrer $\text{Ré}\left(\omega_k\, f^j(0)\right) \leqslant \left|f^j(0) - f^{\alpha(k)}(0)\right| - d_{\alpha(k)}$.

   On a

$$\begin{aligned}\text{Ré}\left(\omega_k\, f^j(0)\right) &= \text{Ré}\left(\omega_k\, \left(f^j(0) - f^{\alpha(k)}(0) + f^{\alpha(k)}(0)\right)\right)\\ &= \text{Ré}\left(\omega_k\, \left(f^j(0) - f^{\alpha(k)}(0)\right)\right) + \text{Ré}\left(\omega_k\, f^{\alpha(k)}(0)\right)\\ &\leqslant \left|f^j(0) - f^{\alpha(k)}(0)\right| - d_{\alpha(k)}.\end{aligned}$$

   (b) En déduire $\text{Ré}\left(\omega_k\, f^j(0)\right) \leqslant -(\ell - \varepsilon_k)j$.

   Comme f^j *est une semi-contraction, on a*

$$\left|f^j(0) - f^{\alpha(k)}(0)\right| = \left|f^j(0) - f^j\left(f^{\alpha(k)-j}(0)\right)\right| \leqslant \left|0 - f^{\alpha(k)-j}(0)\right| = \left|f^{\alpha(k)-j}(0)\right| = d_{\alpha(k)-j}.$$

On en déduit

$$\text{Ré}\left(\omega_k\, f^j(0)\right) \leqslant d_{\alpha(k)-j} - d_{\alpha(k)} \leqslant -(\ell - \varepsilon_k)j.$$

10. Montrer l'existence d'un complexe $\omega_\infty \in \mathbb{U}$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}, \text{Ré}\left(\omega_\infty\, f^j(0)\right) \leqslant -\ell\, j$.

    D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass complexe, on peut trouver une extractrice ψ et un nombre complexe $\omega_\infty \in \mathbb{C}$ tels que $\omega_{\psi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \omega_\infty$.

    Par opérations, $1 = \left|\omega_{\psi(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |\omega_\infty|$, ce qui montre $|\omega_\infty| = 1$, et donc $\omega_\infty \in \mathbb{U}$, par unicité de la limite.

    Soit maintenant $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geqslant j$, on a $\psi(k) \geqslant k \geqslant j$, donc la question précédente montre

    $$\text{Ré}\left(\omega_{\psi(k)}\, f^j(0)\right) \leqslant -(\ell - \varepsilon_{\psi(k)})j.$$

    - *Par opérations, on a $\omega_{\psi(k)}\, f^j(0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \omega_\infty\, f^j(0)$, donc $\text{Ré}\left(\omega_{\psi(k)}\, f^j(0)\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \text{Ré}\left(\omega_\infty\, f^j(0)\right)$.*
    - *On a clairement $-(\ell - \varepsilon_{\psi(k)})j \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\ell j$.*

    Le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges conclut.

11. Montrer que $\left(\dfrac{f^j(0)}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ possède une unique valeur d'adhérence, et en déduire qu'elle converge.

    La suite $\left(\left|\dfrac{f^j(0)}{j}\right|\right)_{j\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{d_j}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ converge, donc elle est bornée.

    On en déduit que la suite complexe $\left(\dfrac{f^j(0)}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

    On va montrer qu'elle possède une unique valeur d'adhérence, ce qui conclura, d'après un corollaire vu en cours du théorème de Bolzano-Weierstrass (à vrai dire, on n'a vu ce théorème que dans le cas d'une suite réelle, mais sa démonstration s'adapte sans aucune difficulté une fois que l'on dispose du théorème de Bolzano-Weierstrass complexe).

    Soit donc $w \in \mathbb{C}$ et une extractrice β telle que $\dfrac{f^{\beta(k)}(0)}{\beta(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} w$.

    Comme $\dfrac{d_{\beta(k)}}{\beta_k} = \left|\dfrac{f^{\beta(k)}(0)}{\beta(k)}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |w|$, on obtient $|w| = \ell$ par unicité de la limite.

    D'après la question précédente, on a par ailleurs

    $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Ré}\left(\omega_\infty\, f^{\beta(k)}(0)\right) \leqslant -\beta(k)\ell \qquad \textit{donc} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Ré}\left(\omega_\infty\, \frac{f^{\beta(k)}(0)}{\beta(k)}\right) \leqslant -\ell.$$

    Par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit $\text{Ré}\,(\omega_\infty\, w) \leqslant -\ell$.

    Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\text{Ré}\,(-\omega_\infty\, w) \leqslant |w| = \ell$, d'où $\text{Ré}\,(\omega_\infty\, w) \geqslant -\ell$.

    On a donc $\text{Ré}\,(\omega_\infty\, w) = -\ell$, et on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui nous permet d'en déduire que w et $-\overline{\omega_\infty}$ sont positivement colinéaires.

    On en déduit $w = -\overline{\omega_\infty}\,\ell$, ce qui montre l'unicité de la valeur d'adhérence, et conclut.

Remarque. La preuve donnée ici est due à Anders Karlsson (2001).