DM 14 : points périodiques d'une application continue [corrigé]

Problème.

Partie I. Quelques lemmes sur les applications continues.

1. **Ensembles fermés.** Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est dite *fermée* si $\overline{A} = A$.

   (a) Montrer que $A \subseteq \mathbb{R}$ est fermée si et seulement si toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in A$.

   C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle de l'adhérence : $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

   (b) Montrer que tout segment est fermé.

   Soit S un segment. On peut donc trouver $a < b$ tels que $S = [a, b]$.
   Soit $x \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x_∞.
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant x_n \leqslant b$ donc, par passage à la limite dans les inégalités larges, on a $a \leqslant x_\infty \leqslant b$, c'est-à-dire $x_\infty \in S$, ce qui conclut.

   (c) Soit Λ un ensemble non vide et $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties fermées de $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'intersection $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ est fermée.

   On va utiliser la question précédente.
   Soit $x \in \left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. On note x_∞ sa limite.
   Soit $\lambda \in \Lambda$.
   Comme x est a fortiori *à valeurs dans A_λ et que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\infty$, le caractère fermé de A_λ montre que $x_\infty \in A_\lambda$.*
   Cela montre $\forall \lambda \in \Lambda, x_\infty \in A_\lambda$, c'est-à-dire $x_\infty \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, ce qui conclut.

   (d) Montrer que toute partie fermée non vide $A \subseteq [a, b]$ possède un maximum et un minimum.

   Soit $A \subseteq [a, b]$ non vide.

   - *La partie A est majorée (par b) et non vide, donc elle possède une borne supérieure $s = \sup A$.*
   - *On sait que $s \in \overline{A}$. Comme A est fermé, on en déduit $s \in A$, si bien que $s = \max A$.*

   (e) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.

   i. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, montrer que

   Soit $x \in \left(f^{-1}\{c\}\right)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Notons x_∞ sa limite. Notons déjà que, par passage à la limite dans les inégalités larges, $x_\infty \in [a, b]$.

   - *D'une part, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à c, donc elle converge naturellement vers c.*
   - *D'autre part, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_\infty)$ par continuité de f.*

Par unicité de la limite, on en déduit $f(x_\infty) = c$*, c'est-à-dire* $x_\infty \in f^{-1}\{c\}$*, ce qui conclut.*

ii. Montrer (par exemple avec la question précédente) que $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) = x\}$ est fermé.

Il suffit d'appliquer la question précédente à la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ *(continue par opérations) et au réel* $c = 0$ *: on a en effet* $\mathrm{Fix}(f) = \varphi^{-1}\{0\}$*.*

> Étant donné deux segments $I, J \subseteq [a, b]$ et une fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$, on note $I \to J$ (ou $I \xrightarrow{f} J$ pour plus de précision) et on dit que I *recouvre* J, si $J \subseteq f[I]$.

2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et $I \subseteq [a, b]$ un segment tel que $I \to I$.
Montrer que f possède un point fixe dans I.

(Exercice traité en TD, sans la notation $\to$*.)*
On a $f[a, b] \supseteq [a, b]$*, donc on peut notamment trouver* $u, v \in [a, b]$ *tel que* $f(u) = a$ *et* $f(v) = b$*.*
La fonction continue $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ *vérifie alors* $\varphi(u) = a - u \leqslant 0$ *et* $\varphi(v) = b - v \geqslant 0$*. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à* φ*, sur l'intervalle joignant* u *à* v*, on obtient donc l'existence d'un point* $c \in [u, v]$ *tel que* $\varphi(x) = 0$*, c'est-à-dire tel que* $f(c) = c$*.*

3. **Lemme d'ajustement.** Soit $I, J = [c, d] \subseteq [a, b]$ deux segments tels que $I \to J$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Le but de cette question est de montrer l'existence d'un segment $K \subseteq I$ tel que $f[K] = J$.

(a) Montrer qu'il existe $\widetilde{u}, v \in I$ tels que $f(\widetilde{u}) = c$, $f(v) = d$ et tels que v est le seul élément $x \in \langle \widetilde{u}, v\rangle$ tel que $f(x) = d$.

Comme $I \to J$*, on peut trouver* $\widetilde{u} \in I$ *tel que* $f(\widetilde{u}) = c$ *et* $\widetilde{v} \in I$ *tel que* $f(\widetilde{v}) = d$*. Puisque* $c \neq d$*, on a nécessairement* $\widetilde{u} \neq \widetilde{v}$*.*

- *Si* $\widetilde{v} > \widetilde{u}$*, l'ensemble* $f^{-1}\{d\} \cap [\widetilde{u}, b]$ *est fermé (le niveau* $f^{-1}\{d\}$ *est fermé d'après la question 1(e)i, le segment* $[\widetilde{u}, b]$ *l'est d'après la question 1b, et la question 1c conclut) et non vide (car il contient* $\widetilde{v}$*), donc il admet un minimum* $v = \min\left(f^{-1}\{d\} \cap [\widetilde{u}, b]\right)$*.*
La minimalité de v *signifie exactement que* v *est le seul élément de* $[\widetilde{u}, v]$ *d'image* d*.*
- *De la même façon, si* $\widetilde{v} = \widetilde{u}$*, le réel* $v = \max\left(f^{-1}\{d\} \cap [a, \widetilde{u}]\right)$ *convient.*

(b) Montrer qu'il existe u compris entre $\widetilde{u}$ et v tels que $f(u) = c$ et que u soit le seul $x \in \langle u, v\rangle$ tel que $f(x) = c$.

Les mêmes arguments qu'à la question précédente montrent que, si $\widetilde{u} \leqslant v$*,* $u = \max\left(f^{-1}\{c\} \cap [\widetilde{u}, v]\right)$ *convient et que, si* $v \leqslant \widetilde{u}$*,* $u = \min\left(f^{-1}\{c\} \cap [v, \widetilde{u}]\right)$ *convient.*

(c) Conclure.

Avec les notations des questions précédentes, on va montrer que $K = \langle u, v\rangle$ *convient.*

- *La fonction* $x \mapsto f(x) - c$ *est continue (par opérations) sur l'intervalle* $K \setminus \{u\}$ *et elle ne s'annule pas sur cet intervalle.*
D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que cette fonction est de signe constant sur cet intervalle. Comme elle vaut $f(v) - c = d - c > 0$ *en* v*, on voit qu'elle est* > 0 *sur* $K \setminus \{c\}$*, et donc* $\geqslant 0$ *sur* $K \setminus \{c\}$*.*
On a donc $\forall x \in K, f(x) \geqslant c$*.*
- *Les mêmes arguments montrent que* $\forall x \in K, f(c) \leqslant d$*.*
- *La fonction* f *induit donc une application* $K \to [c, d]$*, c'est-à-dire que* $f[K] \subseteq [c, d]$*.*
Par ailleurs, comme f *est continue sur l'intervalle* K*, que* $f(u) = c$ *et que* $f(v) = d$*, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que l'on a l'égalité* $f[K] = [c, d]$*.*

4. **Lemme de la boucle.** Soit $[a, b]$ un segment et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue.
Soit $I_0, I_1, \dots, I_{r-1} \subseteq [a, b]$ des segments tels que $I_0 \to I_1, I_1 \to I_2, \dots, I_{r-2} \to I_{r-1}$ et $I_{r-1} \to I_0$.
Montrer qu'il existe $x \in I_0$ tel que $f^r(x) = x$ et $\forall j \in [\![1, r-1]\!], f^j(x) \in I_j$.

D'après le lemme d'ajustement, on peut trouver successivement :

- *un segment* $K_{r-1} \subseteq I_{r-1}$ *tel que* $f[K_{r-1}] = I_0$ *: on a alors* $I_{r-2} \to K_{r-1}$ *;*
- *un segment* $K_{r-2} \subseteq I_{r-2}$ *tel que* $f[K_{r-2}] = K_{r-1}$ *: on a alors* $I_{r-3} \to K_{r-2}$ *;*
- *etc.*
- *un segment* $K_0 \subseteq I_0$ *tel que* $f[K_0] = K_1$.

On a alors $K_0 \xrightarrow{f^r} I_0$ *donc* a fortiori $K_0 \xrightarrow{f^r} K_0$ *: la question 2 entraîne l'existence de* $x \in K_0$ *(et donc* $x \in I_0$*) tel que* $f^r(x) = x$.
Par ailleurs, une récurrence immédiate montre $\forall j \in [\![1, r-1]\!], f^j(x) \in K_r$, *donc on a* a fortiori *les appartenances* $\forall j \in [\![1, r-1]\!], f^j(x) \in I_j$.

Partie II. « *Period three implies chaos* » (Šarkóvs'kiĭ, 1961).

Étant donné une fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $x \in [a, b]$ est un *point* n*-périodique pour* f, et l'on note $x \in \text{Pér}_n(f)$, si $f^n(x) = x$ et que $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(x) \neq x$.

5. **Exemples.**
   (a) Construire une application continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ possédant un ou plusieurs points fixes, un ou plusieurs points 2-périodiques, mais aucun point n-périodique, pour $n \geqslant 3$.

   Soit $f : \begin{cases} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto 1 - x. \end{cases}$
   On vérifie facilement que $1/2$ *est fixe et que tous les autres points sont 2-périodiques, ce qui montre que cet exemple convient.*

   (b) Construire une application continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ différente de l'identité possédant un ou plusieurs points fixes mais aucun point n-périodique, pour $n \geqslant 2$.

   Soit $f : \begin{cases} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto x/2. \end{cases}$.
   On vérifie facilement que 0 *est fixe et que* $\forall x \in \,]0, 1]\,, f(x) < x$, *à partir de quoi une récurrence immédiate montre* $\forall x \in \,]0, 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) < x$, *ce qui entraîne que les points de* $]0, 1]$ *ne sont* n*-périodiques pour aucun* $n \in \mathbb{N}^*$, *ce qui conclut.*

On considère dans la fin de la section une application continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possédant un point 3-périodique, et on veut montrer l'existence de points n-périodiques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Montrer l'existence de $c \in \text{Pér}_3(f)$ tel que c soit strictement compris entre $f(c)$ et $f^2(c)$.

Comme f *possède un point 3-périodique, on peut trouver* $x \in [a, b]$ *tel que* $x \neq f(x)$, $x \neq f^2(x)$ *et* $x = f^3(x)$.

- *Le point* $y = f(x)$ *est encore 3-périodique.*
  - *on a* $f^3(f(x)) = f(f^3(x)) = f(x)$ *;*
  - *si l'on avait* $f(y) = y$, *on en déduirait* $x = f^2(x)$ *en appliquant* f *de part et d'autre, ce qui est exclu ;*
  - *si l'on avait* $f^2(y) = y$, *cela donnerait immédiatement* $x = f(x)$, *ce qui est exclu.*
- *De même,* $z = f^2(x)$ *est encore 3-périodique.*

On peut donc choisir c *comme étant, parmi les trois éléments* x, y *et* z, *« celui du milieu », c'est-à-dire celui qui est strictement compris entre les deux autres.*
(Si on aime les formules qui ne servent à rien, $c = x + y + z - \min(x, y, z) - \max(x, y, z)$*).*

7. Identifier deux segments $J_0, J_1 \subseteq [a, b]$ tel que $J_0 \cap J_1 = \{c\}$ et vérifiant les relations de recouvrement $J_0 \to J_1$, $J_1 \to J_1$ et $J_1 \to J_0$.

   Posons $J_1 = \langle c, f(c) \rangle$ *et* $J_0 = \left\langle c, f^2(c) \right\rangle$. *Vu la position relative des trois points,* $J_0 \cap J_1 = \{c\}$.

   - *L'intervalle* $f[J_0]$ *contient* $f(c)$ *et* c, *donc* $J_0 \to J_1$.
   - *L'intervalle* $f[J_1]$ *contient* $f(c)$ *et* $f^2(c)$, *donc* J_0 *et* J_1, *qui sont inclus dans* $\left\langle f(c), f^2(c) \right\rangle$, *sont* a fortiori *inclus dans* $f[J_1]$. *Cela montre* $J_1 \to J_0$ *et* $J_0 \to J_1$.

8. Soit $n \geqslant 4$. Montrer l'existence d'un point $x \in \text{Pér}_n(f) \cap J_0$ tel que $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(c) \in J_1$.

   Posons $I_0 = J_0$ *et, pour tout* $j \in [\![1, n-1]\!]$, $I_j = J_1$. *On a bien les relations de recouvrement*

   $$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0.$$

   Le lemme de la boucle entraîne alors l'existence de $x \in I_0$ *tel que* $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(x) \in I_j$ *(c'est-à-dire tel que* $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(x) \in J_1$*).*
   Il reste à montrer que x *est bel et bien* n*-périodique, c'est-à-dire que* $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(x) \neq x$.
   Soit donc $j \in [\![1, n-1]\!]$ *et supposons par l'absurde que* $f^j(x) = x$. *Comme* $x \in J_0$ *et* $f^j(x)$, *on en déduirait que* $x \in J_0 \cap J_1$, *c'est-à-dire* $x = c$.
   Or, cela est impossible, car le point c *ne vérifie pas* $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(x) \in J_1$. *En effet,* $f^2(x) \notin J_1$.

9. Conclure.

   - *La question précédente montre déjà que* f *possède des points* n*-périodiques pour tout* $n \geqslant 4$.
   - *Par hypothèse,* f *possède des points 3-périodiques.*
   - *La relation* $J_1 \to J_1$ *et la question 2 montrent que* f *possède au moins un point fixe, c'est-à-dire 1-périodique.*
   - *Il reste à montrer que* f *possède des points 2-périodiques.*
     On procède comme dans la question précédente, à l'aide de la « boucle » $J_0 \to J_1 \to J_0$ *: on obtient* $x \in J_0$ *tel que* $f(x) \in J_1$ *et* $f^2(x) = x$.
     Le même argument que dans la question précédente montre que x *est bel et bien 2-périodique : si l'on avait* $f(x) = x$, *on aurait* $x = c$, *mais c'est absurde car* c *ne vérifie pas* $f^2(c) = c$.

Partie III. Théorème de Coppel (1955) et un corollaire.

> On considère maintenant une application $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et on suppose que $\text{Pér}_2(f) = \varnothing$.
> On va montrer que, pour tout $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente $(f^n(u_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

10. **Lemme de non-oscillation, cas de base.** Soit $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > c$.
    On va montrer dans cette question que $f^2(c) > c$.
    Pour cela, supposons par l'absurde que $f^2(c) \leqslant c$.

    (a) Montrer que $f^2(c) < c$.

    Si l'on avait $f^2(c) = c$, *comme* f *n'a pas de point 2-périodique, le point* c *serait nécessairement fixe, ce qui est exclu par l'hypothèse* $f(c) > c$.

(b) En considérant l'application $g : x \mapsto f^2(x) - x$, montrer que l'on peut trouver un point $p \in [a, c[$ tel que $f(p) = p$, et tel que f n'admette pas d'autre point fixe dans $[p, c]$.

L'application g *est continue sur le segment* $[a, c]$*. On a* $g(a) = f^2(a) - a \geqslant 0$ *et* $g(c) = f^2(c) - c < 0$ *donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction* f^2 *possède un point fixe dans* $[a, c]$*.*
Comme $f^2(c) < c$*, ce point fixe ne peut pas être* c*. Comme* f *n'a pas de point 2-périodique, tout point fixe de* f^2 *est un point fixe de* f*.*
Comme $\mathrm{Fix}(f^2) \cap [a, c]$ *est un ensemble fermé non vide, il admet un maximum* p*, et la maximalité de* p *signifie exactement que* f^2 *ne possède pas d'autre point fixe dans* $[p, c]$*.* A fortiori*, c'est également vrai pour* f*.*

(c) Montrer qu'il existe $q \in]p, c[$ tel que $f(q) = c$.

On a $f(p) = p < c$ *et* $f(c) > c$*. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue* f *sur l'intervalle* $[p, c]$*, on peut trouver* $q \in [p, c]$ *tel que* $f(q) = c$*.*

(d) Montrer que f possède un point fixe dans $]q, c[$, et conclure.

On utilise à nouveau la fonction g *: on a*

- $g(q) = f(c) - q > 0$;
- $g(c) = f^2(c) - c < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue g *sur l'intervalle* $[q, c]$*, on peut trouver* $p' \in [q, c]$ *tel que* $g(p') = 0$*. Vu les inégalités strictes précédentes, on a même* $p' \in]q, c[$*.*
Il s'agit donc d'un point fixe de f^2*, et donc d'un point fixe de* f*.*
Cela contredit le fait que f *n'a pas de point fixe dans* $]p, c]$*, qui contient* $]q, c]$*, ce qui conclut.*

11. **Lemme de non-oscillation, cas général.** Soit encore $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > c$.
On va montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(c) > c$.
Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, et considérons un entier m **minimal** tel que $f^m(c) \leqslant c$. La question précédente montre $m \geqslant 3$.

(a) Montrer $f^m(c) < f^{m-1}(c) < f^{m-2}(c)$.

La définition de m *donne* $f^m(c) \leqslant c$ *et* $f^{m-1}(c), f^{m-2}(c) > c$ *(par minimalité).*
En particulier $f^2\left(f^{m-2}(c)\right) \leqslant f^{m-2}(c)$*.*
D'après la contraposée de la question précédente (appliquée au point $f^{m-2}(c)$*), on en déduit l'inégalité* $f^{m-1}(c) = f\left(f^{m-2}(c)\right) \leqslant f^{m-2}(c)$*.*
On a donc obtenu $f^m(c) < f^{m-1}(c) \leqslant f^{m-2}(c)$*.*
Enfin, la dernière égalité est stricte : si c'était une égalité, on obtiendrait $f^m(c) = f^{m-1}(c)$ *en appliquant* f *de part et d'autre, ce qui est absurde.*

(b) Montrer qu'il existe $u \in \{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{m-3}(c)\}$ et $k \in [\![3, m]\!]$ tels que $u < f(u)$ et

$$f^m(c) = f^k(u) \leqslant c < f^{k-1}(u) < f^{k-2}(u) < \cdots < f(u).$$

Considérons $E = \left\{\ell \in [\![1, m]\!] \,\middle|\, f^{m-\ell+1}(c) > f^{m-\ell}(c)\right\}$*.*
On a $E \subseteq \mathbb{N}$ *et* $E \neq \varnothing$*, car* $m \in E$ *par hypothèse. On peut donc poser* $k = \min E$*.*
Vu la question précédente, on a $1, 2 \notin E$*, donc* $k \geqslant 3$*.*
On pose alors $u = f^{m-k}(c) \in \left\{f^j(c) \,\middle|\, j \in [\![0, m-3]\!]\right\}$*.*

- *Par construction, on a* $f^k(u) = f^m(c)$*.*
- *Comme* $k \in E$*, on a* $f(u) > u$*.*

- *Par minimalité de* k*, on a* $1, \dots, k-1 \notin E$*, c'est-à-dire* $f^m(c) \leqslant f^{m-1}(c) \leqslant \cdots \leqslant f^{m-k+1}(c)$*, ce qui se réécrit* $f^k(u) \leqslant f^{k-1}(u) \leqslant \cdots \leqslant f(u)$.
- *La minimalité de* m *donne* $f^k(u) = f^m(c) \leqslant c < f^{m-1}(c) = f^{k-1}(u)$.
- *Il reste à justifier que les inégalités* $f^{k-1}(u) \leqslant \cdots \leqslant f(u)$ *sont strictes. C'est le même argument qu'à la question précédente : si l'une d'entre elles était une égalité, on obtiendrait l'égalité* $f^k(u) = f^{k-1}(u)$ *en appliquant de part et d'autre la bonne itérée de* f*, ce qui est exclu.*

(c) Montrer que l'on peut trouver $j \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $u \in \left[f^{j+1}(u), f^j(u)\right[$, puis que $j \neq 1$.

Par minimalité de m*, on a* $\forall j \in [\![1, m-1]\!], f^j(c) > c$*, donc* $\forall j \in [\![0, m-1]\!], f^j(c) \geqslant c$*. En particulier,* $u \geqslant c$*, ce qui montre* $u \in [c, f(u)[$.
Or, les inégalités de la question précédente montrent

$$[c, f(u)[\subseteq \left[f^k(u), f(u)\right[= \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[f^{j+1}(u), f^j(u)\right[.$$

On peut donc trouver $j \in [\![1, m-1]\!]$ *tel que* $u \in \left[f^{j+1}(u), f^j(u)\right[$.

Par ailleurs, on ne peut pas avoir $j = 1$ *: cela entraînerait* $f^2(u) \leqslant u < f(u)$*, ce qui contredit directement le cas de base du lemme de non-oscillation.*

(d) On note $I_0 = \left[u, f^j(u)\right]$ et $I_1 = \left[f^j(u), f(u)\right]$. Montrer $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_0$.

Les inégalités de la question précédente (y compris le fait que $j \geqslant 2$*) donnent notamment les inégalités* $f^{j+1}(u) \leqslant u < f^j(u) \leqslant f^2(u) < f(u)$*. Ainsi,*

- *l'intervalle* $f[I_0]$ *contient* $f(u)$ *et* $f^{j+1}(u)$*, d'où* $I_1 = [f^j(u), f(u)] \subseteq [f^{j+1}(u), f(u)] \subseteq f[I_0]$ *: cela montre* $I_0 \to I_1$ *;*
- *l'intervalle* $f[I_1]$ *contient* $f^2(u)$ *et* $f^{j+1}(u)$*, d'où* $I_0 = [u, f^j(u)] \subseteq [f^{j+1}(u), f^2(u)] \subseteq f[I_1]$ *: cela montre* $I_1 \to I_0$.

(e) Conclure.

Le lemme de la boucle entraîne l'existence de $x \in I_0$ *tel que* $f(x) \in I_1$ *et* $f^2(x) = x$.
Comme f *n'a pas de point 2-périodique, on en déduit* $f(x) = x$*, donc* $x \in I_0 \cap I_1$*, c'est-à-dire que* $x = f^j(u)$*. Cela donne* $f^{j+1}(u) = f^j(u)$*, ce qui contredit les inégalités obtenues précédemment.*

La situation étant symétrique, on pourra désormais utiliser le lemme de non-oscillation sous la forme suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $c \in [a, b]$:

- si $f(c) > c$, alors $f^n(c) > c$;
- si $f(c) < c$, alors $f^n(c) < c$.

Dans la suite de la preuve, on fixe $u_0 \in [a, b]$, et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$. On définit alors

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n < u_{n+1}\} \qquad \text{et} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n > u_{n+1}\}.$$

Le but est de montrer que la suite u converge.

12. On suppose $A \cup B \neq \mathbb{N}$. Montrer que u converge.

Soit $n_0 \in \mathbb{N} \setminus (A \cup B)$*. On a donc* $u_{n_0+1} = u_{n_0}$*, ce qui montre* $f(u_{n_0}) = u_{n_0}$.
Une récurrence immédiate montre alors $\forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$ *: la suite* u *est stationnaire, donc elle converge.*

13. On suppose A ou B fini. Montrer que u converge.

Si A est fini, on peut trouver $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in A, a \leqslant \alpha$ (en prenant $\alpha = \max A$ si A est non vide, $\alpha = 0$ sinon). On en déduit $\forall n > \alpha, u_n \geqslant u_{n+1}$: la suite u est décroissante à partir d'un certain rang. Comme elle est bornée (parce qu'à valeurs dans $[a, b]$), le théorème de la limite monotone entraîne que u converge.

14. On suppose maintenant que A et B sont infinis et que $A \cup B = \mathbb{N}$.
On note φ et ψ deux extractrices telles que $A = \varphi[\mathbb{N}]$ et $B = \psi[\mathbb{N}]$.

(a) En utilisant notamment le lemme de non-oscillation, montrer que $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent, vers des limites que l'on notera ℓ_+ et ℓ_-, respectivement.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a donc $f(u_{\varphi(k)}) = u_{1+\varphi(k)} > u_{\varphi(k)}$.
Le lemme de non-oscillation entraîne que $u_{\varphi(k+1)} = f^{\varphi(k+1)-\varphi(k)}(u_{\varphi(k)}) > u_{\varphi(k)}$. La suite extraite est donc (strictement) croissante et bornée (car à valeurs dans $[a, b]$) donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

(b) Montrer que $\{a \in A \mid a + 1 \in B\}$ et $\{b \in B \mid b + 1 \in A\}$ sont infinis.

Supposons par l'absurde $\{a \in A \mid a + 1 \in B\}$ fini. On peut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que cet ensemble ne contienne aucun élément $\geqslant N$. Comme A est infini, il contient des éléments $\geqslant N$. Quitte à augmenter N, on peut donc supposer $N \in A$.
Le fait que $N \notin \{a \in A \mid a + 1 \in B\}$ donne alors $N + 1 \notin B$, c'est-à-dire $N + 1 \in A$. Par une récurrence immédiate, on montre $\forall n \geqslant N, n \in A$. On a donc $B \subseteq [\![0, N-1]\!]$, ce qui contredit le fait que B est infini.
Cela montre $\{a \in A \mid a + 1 \in B\}$ infini et, par symétrie, la même chose vaut pour le deuxième ensemble.

(c) En déduire que $\ell_- = \ell_+$.

Construisons par récurrence deux extractrices χ et ω telles que $\forall k \in \mathbb{N}, \psi(\omega(k)) = \varphi(\chi(k)) + 1$.

Initalisation. *Considérons $n = \min\{a \in A \mid a + 1 \in B\}$.*

- *Comme $n \in A$, on peut trouver $\chi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(\chi(0)) = n$.*
- *Comme $n + 1 \in B$, on peut trouver $\omega(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(\omega(0)) = n + 1$.*

Hérédité. *Supposons $\chi(0), \dots, \chi(k), \omega(0), \dots, \omega(k)$ construits.*
Comme $\{a \in A \mid a + 1 \in B\}$ est infini, on peut en trouver un élément $n > \varphi(\chi(k))$.

- *Comme $n \in A$, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = \varphi(m)$. Puisque $n > \varphi(\chi(k))$ et que φ est croissante, cela entraîne $m > \chi(k)$ et on peut poser $\chi(k + 1) = m$.*
- *Comme $n + 1 \in B$, on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = \psi(p)$. Puisque $n > \varphi(\chi(k))$, on a $n + 1 = \psi(p) > \varphi(\chi(k)) + 1 = \psi(\omega(k))$, donc, par croissance de ψ, $p > \omega(k)$ et on peut poser $\omega(k + 1) = p$.*

On ainsi trouvé $\chi(0) < \cdots < \chi(k) < \chi(k + 1)$ et $\omega(0) < \cdots < \omega(k) < \omega(k + 1)$ tels que $\forall j \in [\![0, k + 1]\!], \psi(\omega(j)) = \varphi(\chi(j)) + 1$, ce qui conclut.

Par extraction, $u_{\varphi(\chi(k))} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell_+$ et $u_{\psi(\omega(k))} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell_-$.
Ainsi, la suite $\left(u_{\psi(\omega(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(u_{1+\varphi(\chi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(f\left(u_{\varphi(\chi(k))}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge à la fois vers ℓ_- et vers $f(\ell_+)$, par continuité de f.
On en déduit que $f(\ell_+) = \ell_-$, par unicité de la limite.
Le même argument, basé sur le caractère infini de $\{b \in B \mid b + 1 \in A\}$, montre que $f(\ell_-) = \ell_+$.
On a donc $f(f(\ell_+)) = \ell_+$. Comme f ne possède pas de point 2-périodique, on en déduit $f(\ell_+) = \ell_+$, ce qui entraîne $\ell_+ = \ell_-$.

(d) Montrer que u converge, ce qui conclut la démonstration du théorème de Coppel.

C'est une variante d'un résultat démontré en cours. Notons $\ell = \ell_- = \ell_+$. *Soit* $\varepsilon > 0$.
On peut donc trouver K_+ *et* $K_- \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\forall k \geqslant K_+, \left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \forall k \geqslant K_-, \left|u_{\psi(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N = \max(\varphi(K_+), \psi(K_-)) \in \mathbb{N}$. *Soit* $n \geqslant N$.

- *Si* $n \in A$, *on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tels que* $n = \varphi(k)$. *Comme* $n = \varphi(k) \geqslant \varphi(K_+)$, *la stricte croissance de* φ *entraîne* $k \geqslant K_+$, *donc* $|u_n - \ell| = \left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
- *Si* $n \in B$, *on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tels que* $n = \psi(k)$. *Comme* $n = \psi(k) \geqslant \psi(K_-)$, *la stricte croissance de* ψ *entraîne* $k \geqslant K_-$, *donc* $|u_n - \ell| = \left|u_{\psi(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Cela conclut.

15. **Application.** Soit $h : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que si h possède un point n-périodique, pour un certain $n \geqslant 2$, alors elle possède un point 2-périodique.

On remarque que si h *possède un point* n*-périodique (pour un certain* $n \geqslant 2$*)* u_0, *alors la suite* u *est* n*-périodique et non constante, donc divergente (une suite* n*-périodique* u *convergeant vers* ℓ *vérifie, pour tous* $p, q \in \mathbb{N}$, *que* $u_p = u_{p+kn} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$ *et* $u_q = u_{q+kn} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$, *donc on doit avoir* $u_p = u_q$ *et la suite est constante).*
D'après la contraposée du théorème de Coppel, on en déduit que h *possède un point 2-périodique.*