DM 14 : points périodiques d'une application continue

Problème.

Étant donné une application $f : I \to I$ d'un ensemble (le plus souvent un intervalle) dans lui-même, on pourra noter f^n la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$, avec n occurrences de f (si bien que $f^0 = \mathrm{id}_I$).

Comme le montre une récurrence immédiate, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ se réécrit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Étant donné deux réels u, v, on notera

- $\langle u, v\rangle = [\min(u, v), \max(u, v)]$ le segment joignant u et v ;
- $\rangle u, v\langle =]\min(u, v), \max(u, v)[$ l'intervalle ouvert correspondant.

Partie I. Quelques lemmes sur les applications continues.

1. **Ensembles fermés.** Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est dite *fermée* si $\overline{A} = A$.
   (a) Montrer que $A \subseteq \mathbb{R}$ est fermée si et seulement si toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in A$.
   (b) Montrer que tout segment est fermé.
   (c) Soit Λ un ensemble non vide et $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties fermées de $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'intersection $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ est fermée.
   (d) Montrer que toute partie fermée non vide $A \subseteq [a, b]$ possède un maximum et un minimum.
   (e) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.
      i. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, montrer que[1] le « niveau » $f^{-1}\{c\} = \{x \in [a, b] \mid f(x) = c\}$ est fermé.
      ii. Montrer (par exemple avec la question précédente) que $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in [a, b] \mid f(x) = x\}$ est fermé.

Étant donné deux segments $I, J \subseteq [a, b]$ et une fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$, on note $I \to J$ (ou $I \xrightarrow{f} J$ pour plus de précision) et on dit que I *recouvre* J, si $J \subseteq f[I]$.

2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et $I \subseteq [a, b]$ un segment tel que $I \to I$.
   Montrer que f possède un point fixe dans I.
3. **Lemme d'ajustement.** Soit $I, J = [c, d] \subseteq [a, b]$ deux segments tels que $I \to J$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Le but de cette question est de montrer l'existence d'un segment $K \subseteq I$ tel que $f[K] = J$.
   (a) Montrer qu'il existe $\widetilde{u}, v \in I$ tels que $f(\widetilde{u}) = c$, $f(v) = d$ et tels que v est le seul élément $x \in \langle \widetilde{u}, v\rangle$ tel que $f(x) = d$.
   Indication. *On pourra montrer l'existence de $\widetilde{u}$ d'abord, et construire ensuite un v adapté. Les questions sur les ensembles fermés pourront être utiles !*
   (b) Montrer qu'il existe u compris entre $\widetilde{u}$ et v tels que $f(u) = c$ et que u soit le seul $x \in \langle u, v\rangle$ tel que $f(x) = c$.
   (c) Conclure.

1. On a supprimé un peu abusivement une paire de crochets pour gagner en concision.

4. **Lemme de la boucle.** Soit $[a, b]$ un segment et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue.
   Soit $I_0, I_1, \dots, I_{r-1} \subseteq [a, b]$ des segments tels que $I_0 \to I_1$, $I_1 \to I_2, \dots, I_{r-2} \to I_{r-1}$ et $I_{r-1} \to I_0$.
   Montrer qu'il existe $x \in I_0$ tel que $f^r(x) = x$ et $\forall j \in [\![1, r-1]\!], f^j(x) \in I_j$.
   Indication. *On pourra appliquer de manière répétée le lemme d'ajustement.*

Partie II. « *Period three implies chaos* » (Šarkóvs'kiĭ, 1961).

Étant donné une fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $x \in [a, b]$ est un *point* n*-périodique pour* f, et l'on note $x \in \text{Pér}_n(f)$, si $f^n(x) = x$ et que $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(x) \neq x$.

5. **Exemples.**
   (a) Construire une application continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ possédant un ou plusieurs points fixes, un ou plusieurs points 2-périodiques, mais aucun point n-périodique, pour $n \geqslant 3$.
   (b) Construire une application continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ différente de l'identité possédant un ou plusieurs points fixes mais aucun point n-périodique, pour $n \geqslant 2$.

On considère dans la fin de la section une application continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possédant un point 3-périodique, et on veut montrer l'existence de points n-périodiques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Montrer l'existence de $c \in \text{Pér}_3(f)$ tel que c soit strictement compris entre $f(c)$ et $f^2(c)$.
7. Identifier deux segments $J_0, J_1 \subseteq [a, b]$ tel que $J_0 \cap J_1 = \{c\}$ et vérifiant les relations de recouvrement $J_0 \to J_1$, $J_1 \to J_1$ et $J_1 \to J_0$.
8. Soit $n \geqslant 4$. Montrer l'existence d'un point $x \in \text{Pér}_n(f) \cap J_0$ tel que $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(c) \in J_1$.
9. Conclure.

Partie III. Théorème de Coppel (1955) et un corollaire.

On considère maintenant une application $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et on suppose que $\text{Pér}_2(f) = \varnothing$.
On va montrer que, pour tout $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente $(f^n(u_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

10. **Lemme de non-oscillation, cas de base.** Soit $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > c$.
    On va montrer dans cette question que $f^2(c) > c$.
    Pour cela, supposons par l'absurde que $f^2(c) \leqslant c$.
    (a) Montrer que $f^2(c) < c$.
    (b) En considérant l'application $g : x \mapsto f^2(x) - x$, montrer que l'on peut trouver un point $p \in [a, c[$ tel que $f(p) = p$, et tel que f n'admette pas d'autre point fixe dans $[p, c]$.
    (c) Montrer qu'il existe $q \in]p, c[$ tel que $f(q) = c$.
    (d) Montrer que f possède un point fixe dans $]q, c[$, et conclure.
11. **Lemme de non-oscillation, cas général.** Soit encore $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > c$.
    On va montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(c) > c$.
    Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, et considérons un entier m **minimal** tel que $f^m(c) \leqslant c$. La question précédente montre $m \geqslant 3$.
    (a) Montrer $f^m(c) < f^{m-1}(c) < f^{m-2}(c)$.
    (b) Montrer qu'il existe $u \in \{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{m-3}(c)\}$ et $k \in [\![3, m]\!]$ tels que $u < f(u)$ et
    $$f^m(c) = f^k(u) \leqslant c < f^{k-1}(u) < f^{k-2}(u) < \dots < f(u).$$

(c) Montrer que l'on peut trouver $j \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $u \in \left[f^{j+1}(u), f^j(u)\right[$, puis que $j \neq 1$.

(d) On note $I_0 = \left[u, f^j(u)\right]$ et $I_1 = \left[f^j(u), f(u)\right]$. Montrer $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_0$.

(e) Conclure.

La situation étant symétrique, on pourra désormais utiliser le lemme de non-oscillation sous la forme suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $c \in [a, b]$:

- si $f(c) > c$, alors $f^n(c) > c$;
- si $f(c) < c$, alors $f^n(c) < c$.

Dans la suite de la preuve, on fixe $u_0 \in [a, b]$, et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$. On définit alors

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n < u_{n+1}\} \qquad \text{et} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n > u_{n+1}\}.$$

Le but est de montrer que la suite u converge.

12. On suppose $A \cup B \neq \mathbb{N}$. Montrer que u converge.
13. On suppose A ou B fini. Montrer que u converge.
14. On suppose maintenant que A et B sont infinis et que $A \cup B = \mathbb{N}$.
    On note φ et ψ deux extractrices telles que $A = \varphi[\mathbb{N}]$ et $B = \psi[\mathbb{N}]$.
    (a) En utilisant notamment le lemme de non-oscillation, montrer que $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent, vers des limites que l'on notera ℓ_+ et ℓ_-, respectivement.
    (b) Montrer que $\{a \in A \,|\, a+1 \in B\}$ et $\{b \in B \,|\, b+1 \in A\}$ sont infinis.
    (c) En déduire que $\ell_- = \ell_+$.
    (d) Montrer que u converge, ce qui conclut la démonstration du théorème de Coppel.
15. **Application.** Soit $h : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que si h possède un point n-périodique, pour un certain $n \geqslant 2$, alors elle possède un point 2-périodique.

Remarque. De manière générale, le mathématicien Oleksándr Mikolaïovič Šarkóvs'kiĭ[2] a découvert une relation d'ordre sur les entiers strictement positifs

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots \prec 2\times 3 \prec 2\times 5 \prec 2\times 7 \prec \cdots \prec 2^2\times 3 \prec 2^2\times 5 \prec 2^2\times 7 \prec \cdots \prec \cdots \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1,$$

obtenue en rangeant d'abord les entiers qui ne sont pas des puissances de 2, d'abord par valuation 2-adique croissante puis, en cas d'égalité, départagés selon l'ordre usuel ; puis en insérant toutes les puissances de 2, par ordre décroissant. Cet ordre possède la propriété remarquable suivante : quels que soient $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et $n \prec m$ deux entiers, si f possède un point n-périodique, alors elle possède un point m-périodique.
Nous avons en fait exploré un tout petit bout de cette structure, puisque les parties II et III du problème mettent en lumière les relations $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \prec n$ et $\forall n \geqslant 3, n \prec 2$.

2. ou Sharkovskii, Sharkovsky, Шарко́вський...