DM 15 : théorème de Bohr-Mollerup [corrigé]

Exercice. Une suite récurrente à convergence lente.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \dfrac{2}{1+x^2}. \end{cases}$

On définit la suite récurrente u en posant $u_0 \in [0,2] \setminus \{1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $x - f(x)$ et $x - f\big(f(x)\big)$. Dans les deux cas, on donnera l'expression sous la forme $\dfrac{(x-1)^\alpha P(x)}{Q(x)}$, où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes sans racine réelle.
   En déduire les points fixes de f et de $f \circ f$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Après calcul, on trouve

   $$x - f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1} \qquad \textit{et} \qquad x - f\big(f(x)\big) = \frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{x^4+2x^2+5}.$$

   Les deux expressions montrent que 1 est l'unique point fixe de f et de $f \circ f$.

2. Déterminer rapidement les variations de f sur $[0,2]$ et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2] \setminus \{1\}$.

   Par opérations, f est strictement décroissante sur $[0,2]$.
   Comme $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(2) \geqslant 0$, on en déduit que l'ensemble $[0,2] \setminus \{1\}$ est stable sous f, ce qui entraîne $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2] \setminus \{1\}$ par une récurrence immédiate.

3. Montrer que la suite u converge, et déterminer sa limite.

   Comme dans le cours, la décroissance de f entraîne que les suites extraites $(u_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ sont monotones (de monotonies opposées). Puisqu'elles sont à valeurs dans $[0,2]$ (et donc bornées), le théorème de la limite monotone entraîne qu'elles convergent.
   Puisqu'il s'agit de suites récurrentes (associées à l'itératrice continue $f \circ f$), l'argument usuel montre que leurs limites sont des points fixes de $f \circ f$.
   On a donc $u_{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ et $u_{2k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$, d'où l'on tire $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

4. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire $\dfrac{u_{n+2}-1}{u_n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

   On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}, x - f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= -(u_n - 1)\frac{u_n^2 + u_n + 2}{u_n^2+1}. \end{aligned}$$

   Ainsi, par opérations,

   $$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1^2+1+2}{1^2+1} = -2,$$

donc

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-1}+\frac{u_n-1}{u_n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1.$$

On en déduit $\dfrac{u_{n+2}-1}{u_{n+1}-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1$ *par extraction, puis*

$$\frac{u_{n+2}-1}{u_n-1}=\frac{u_{n+2}-1}{u_{n+1}-1}\times\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}(-1)\times(-1)=1.$$

5. (a) Montrer $\dfrac{u_{n+2}-u_n}{(u_n-1)^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\dfrac{1}{2}$.

   On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 1$ *et*

$$u_n-u_{n+2}=u_n-f\big(f(u_n)\big)=\frac{(u_n-1)^3(u_n^2+u_n+2)}{u_n^4+2u_n^2+5}$$

   donc, par opérations,

$$\frac{u_{n+2}-u_n}{(u_n-1)^3}=-\frac{u_n^2+u_n+2}{u_n^4+2u_n^2+5}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\frac{1}{2}.$$

   (b) Montrer $\dfrac{1}{(u_{n+2}-1)^2}-\dfrac{1}{(u_n-1)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

   Soit $n\in\mathbb{N}$. *On a* $u_n,u_{n+2}\neq 1$ *et*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(u_{n+2}-1)^2}-\frac{1}{(u_n-1)^2}&=\frac{(u_n-1)^2-(u_{n+2}-1)^2}{(u_{n+2}-1)^2(u_n-1)^2}\\&=\frac{u_n-u_{n+2}}{(u_n-1)^3}\times\frac{2-u_n-u_{n+2}}{1-u_n}\times\frac{(1-u_n)^2}{(1-u_{n+2})^2}.\end{aligned}$$

   Or,

   - $\dfrac{u_n-u_{n+2}}{(u_n-1)^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}$;
   - $\dfrac{2-u_n-u_{n+2}}{1-u_n}=1+\dfrac{1-u_{n+2}}{1-u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$;
   - $\dfrac{u_{n+2}-1}{u_n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ *donc* $\dfrac{(1-u_n)^2}{(1-u_{n+2})^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

   On en déduit $\dfrac{1}{(u_{n+2}-1)^2}-\dfrac{1}{(u_n-1)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

   (c) En déduire $|u_n-1|\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

   La question précédente entraîne que

$$\frac{1}{(u_{2k+3}-1)^2}-\frac{1}{(u_{2k+1}-1)^2}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1\qquad\textit{et}\qquad\frac{1}{(u_{2k+2}-1)^2}-\frac{1}{(u_{2k}-1)^2}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1.$$

   D'après le lemme de l'escalier, on en déduit

$$\frac{1}{k}\,\frac{1}{(u_{2k+1}-1)^2}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1\qquad\textit{et}\qquad\frac{1}{k}\,\frac{1}{(u_{2k}-1)^2}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1,$$

et l'on peut réécrire ces convergences

$$\frac{1}{2k+1}\,\frac{1}{(u_{2k+1}-1)^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2} \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{2k}\,\frac{1}{(u_{2k}-1)^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{n}\,\frac{1}{(u_n-1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

ce que l'on peut réécrire

$$\frac{1}{(u_n-1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

En élevant à la puissance $-1/2$, il vient

$$|u_n-1| \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Problème. Théorème de Bohr-Mollerup (1922).

Partie I. Préliminaires.

1. **(Deuxième) inégalité de Taylor-Lagrange.** Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Justifier l'existence du réel $M_a = \max\left\{\left|f''(t)\right| \,\middle|\, t \in [0,a]\right\}$.

   La fonction f'' est continue, car f est de classe C^2. Par opérations, on en déduit que $\left|f''\right|$ est continue sur le segment $[0,a]$. D'après le théorème des bornes atteintes, on peut trouver $\tau \in [0,a]$ tel que $\forall t \in [0,a], \left|f''(t)\right| \leqslant \left|f''(\tau)\right|$.
   Cela montre que $\left\{\left|f''(t)\right| \,\middle|\, t \in [0,a]\right\}$ possède un maximum, à savoir $\left|f''(\tau)\right|$.

   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction (de classe C^2, par opérations)

   $$g_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - \big(f(0) + f'(0)\,x\big) - \lambda x^2. \end{cases}$$

   Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda(0) = g_\lambda'(0) = g_\lambda(a) = 0$ (et déterminer λ).

   - *On obtient directement que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(0) = g_\lambda'(0) = 0$.*
   - *Comme $a \in \mathbb{R}_+^*$, $g_\lambda(a)$ est un polynôme en λ de degré exactement 1 (et de coefficient dominant a^2) donc il possède une unique racine.*
     Autrement dit, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda(a) = 0$.
     En effectuant les calculs, on obtient même l'unique valeur :

     $$\lambda = \frac{1}{a^2}\left(f(a) - \big(f(0) + f'(0)\,a\big)\right).$$

   (c) On choisit la valeur de λ trouvée à la question précédente.
   Montrer qu'il existe $c \in [0,a]$ tel que $g_\lambda''(c) = 0$.

   - *On applique une première fois le théorème de Rolle à la fonction g_λ (continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$, $g_\lambda(0) = g_\lambda(a) = 0$) et l'on obtient $b \in\,]0,a[$ tel que $g_\lambda'(b) = 0$.*

- *On applique à nouveau le théorème de Rolle à* g'_λ *(continue sur* $[0, b]$*, dérivable sur* $]0, b[$*,* $g'_\lambda(0) = g'_\lambda(b) = 0$*) et l'on obtient* $c \in]0, b[$ *tel que* $g''_\lambda(c) = 0$*.* A fortiori*, on a* $c \in [0, a]$*.*

(d) En déduire une expression de $f(a)$, en fonction notamment de $f''(c)$.

En revenant aux définitions (et à la formule pour λ*), on a trouvé* $c \in [0, a]$ *tel que*

$$f''(c) - 2\lambda c = 0 \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad f''(c) - 2\frac{f(a) - \big(f(0) + f'(0)\, a\big)}{a^2} = 0.$$

Après calcul,

$$f(a) = f(0) + f'(0)\, a + \frac{f''(c)}{2}\, a^2.$$

(e) Montrer que $\forall t \in [0, a], \left|f(t) - \big(f(0) + f'(0)\, t\big)\right| \leqslant \dfrac{M_a}{2}\, t^2$.

Soit $t \in [0, a]$*.*
On applique la question précèdente en remplaçant a *par* t *: on peut ainsi trouver* $c \in [0, t]$ *tel que*

$$f(t) = f(0) + f'(0)\, t + \frac{f''(c)}{2}\, t^2.$$

A fortiori*, on a* $c \in [0, a]$*, donc* $\left|f''(c)\right| \leqslant M_a$*, et il vient*

$$\left|f(t) - \big(f(0) + f'(0)\, t\big)\right| = \frac{|f''(c)|}{2}\, t^2 \leqslant \frac{M_a}{2}\, t^2.$$

(f) **Une application.** Montrer l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [0, a]\,, t - At^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

- *L'inégalité de gauche est une conséquence directe de la question précédente, appliquée à la fonction* $f : t \mapsto \ln(1+t)$ *: comme* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$*, il suffit de poser* $A = \dfrac{M_a}{2}$ *pour conclure.*
- *L'inégalité de droite est une conséquence de la concavité de la fonction* $t \mapsto \ln(1+t)$ *: son graphe est en-dessous de sa tangente en* 0*, qui est la droite d'équation* $y = x$*, d'après les calculs que l'on vient d'effectuer sur* $f(0)$ *et* $f'(0)$*.*

2. **Question bonus : théorème de Taylor-Lagrange.** En vous inspirant de ce qui vient d'être fait, montrer que, pour toute fonction $h \in C^{n+1}(\mathbb{R}_+)$, il existe $c \in [0, a]$ tel que

$$h(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} a^k + \frac{h^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} a^{n+1}.$$

Donnons les grandes lignes :

- *quel que soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*, la fonction* $u_\lambda : x \mapsto h(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}\, x^k - \lambda\, x^{n+1}$ *(de classe* C^{n+1}*, par opérations) vérifie* $u_\lambda(0) = u'_\lambda(0) = \cdots = u_\lambda^{(n)}(0) = 0$ *;*
- *comme* $a^{n+1} \neq 0$*, il existe un unique* λ *tel que l'on ait en outre* $u_\lambda(a) = 0$ *: il s'agit précisément de* $\lambda = \dfrac{1}{a^{n+1}} \left(h(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}\, a^k \right)$ *;*

- *une application répétée du théorème de Rolle montre alors qu'il existe* $c \in [0, a]$ *tel que* $u_\lambda^{(n+1)}(c) = 0$, *ce qui donne immédiatement* $h^{(n+1)}(c) = (n+1)!\,\lambda$, *d'où l'on tire rapidement l'égalité demandée, grâce à l'expression explicite de* λ.

Partie II. La fonction Γ.

- Dans cette partie, on pourra utiliser la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, déjà vues (en DS et en TD, respectivement).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Pi_n(x) = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Cette partie va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge – on notera $\Gamma(x)$ sa limite – puis étudier la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ainsi créée.

3. **Croissance de la suite** $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$**.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Minorer la fonction $-\ln$ par une fonction affine s'annulant en 1.

      Comme $-\ln$ *est convexe, on a* $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, -\ln(t) \geqslant u(t)$, *où* u *est la fonction affine dont le graphe est la tangente au graphe de* $-\ln$ *en* 1.
      Puisque $-\ln(1) = 0$ *et* $(-\ln)'(1) = -1$, *on a* $u : t \mapsto 1 - t$, *ce qui donne la minoration*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, -\ln(t) \geqslant 1 - t.$$

      ii. En déduire que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}$.

      La question précédente donne en particulier.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

      iii. Montrer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geqslant 1 + \frac{x}{n+1}$.

      La fonction $h : t \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^t$ *est dérivable, de dérivée* $t \mapsto \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^t$, *qui est croissante. Cette fonction est donc convexe.*
      Comme $h(0) = 1$ *et* $h'(0) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *la comparaison avec la tangente montre*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^t \geqslant 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) t.$$

      D'après la question précédente, on en déduit en particulier

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \left(1+\frac{1}{n}\right)^t \geqslant 1 + \frac{t}{n+1}$$

      et on conclut en appliquant cette inégalité à $t = x$.

(b) Montrer que la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a* $\Pi_n(x), \Pi_{n+1}(x) > 0$, *et*

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)} &= \frac{(n+1)^x\,(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)} \times \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x\,n!} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n+1}{x+n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \frac{1}{1+\frac{x}{n+1}} \\
&\geqslant 1,
\end{aligned}$$

d'après la question précédente, ce qui conclut.

4. **Majoration de la suite** $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$**.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\ln\left(x\,\Pi_n(x)\right)$, en fonction notamment de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$\begin{aligned}
x\,\Pi_n(x) &= \frac{n^x\,n!}{(x+1)\cdots(x+n)} \\
&= \frac{n^x}{\frac{x+1}{1}\cdots\frac{x+n}{n}} \\
&= \frac{n^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}
\end{aligned}$$

$$\textit{donc} \qquad \begin{aligned}
\ln\left(x\,\Pi_n(x)\right) &= \ln(n^x) - \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right] \\
&= x\,\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right).
\end{aligned}$$

(b) Grâce à la partie précédente, en déduire que la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

D'après la partie précédente, on peut trouver un réel $A \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall t \in [0,x]\,, \ln(1+t) \geqslant t - A\,t^2.$$

On en déduit, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right) \geqslant \dfrac{x}{k} - A\,\dfrac{x^2}{k^2}$, *puis*

$$\begin{aligned}
\ln\left(x\,\Pi_n(x)\right) &\leqslant x\,\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - A\frac{x^2}{k^2}\right) \\
&\leqslant x\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + A\,x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Par opérations (et grâce aux résultats de convergence rappelés dans l'énoncé), la suite

$$\left(x\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + A\,x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est convergente, donc majorée : on peut en trouver un majorant $M \in \mathbb{R}$, *ce qui montre*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(x\,\Pi_n(x)\right) \leqslant M,$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Pi_n(x) \leqslant \frac{1}{x}\, e^M,$$

ce qui conclut.

Grâce au théorème de la limite monotone, on obtient donc une fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x).$$

Comme la suite $\big(\Pi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et à valeurs > 0, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) > 0$.

5. **Premières propriétés de Γ.**
   (a) Montrer $\Gamma(1) = 1$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Pi_n(1) = \frac{n\, n!}{1\cdot 2\cdots n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

   donc $\Gamma(1) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

   (b) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\Pi_n(x+1) &= \frac{n^{x+1}\, n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\\ &= \frac{n\,x}{x+n+1} \times \frac{n^x\, n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\ &= \frac{n\,x}{x+n+1}\,\Pi_n(x).\end{aligned}$$

   Comme $\dfrac{n\,x}{x+n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, *on obtient* $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, *par unicité de la limite.*

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

   Une récurrence immédiate montre $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

6. **Log-convexité de Γ.**
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $\ln\circ\Pi_n$ est convexe.

   La fonction Π_n est lisse, donc a fortiori *deux fois dérivable. Par opérations, il en va de même de*

$$\ln\circ\Pi_n : x \mapsto x\, \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k),$$

   dont la dérivée seconde est

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2},$$

   évidemment positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit que $\ln\circ\Pi_n$ est convexe.

(b) En déduire que $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. *Soit* $\lambda \in [0,1]$.

- *Par convexité, on a*

$$\ln\left(\Pi_n\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\right) \leqslant (1-\lambda)\ \ln\left(\Pi_n(x)\right) + \lambda\ \ln\left(\Pi_n(y)\right).$$

- *Par opérations, on a*
  - $\ln\left(\Pi_n\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\Gamma\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\right)$;
  - $(1-\lambda)\ \ln\left(\Pi_n(x)\right) + \lambda\ \ln\left(\Pi_n(y)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-\lambda)\ \ln\left(\Gamma(x)\right) + \lambda\ \ln\left(\Gamma(y)\right)$.

  Par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient

$$\ln\left(\Gamma\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)\right) \leqslant (1-\lambda)\ \ln\left(\Gamma(x)\right) + \lambda\ \ln\left(\Gamma(y)\right),$$

  ce qui montre la convexité de $\ln\circ\Gamma$.

Partie III. Theorème de Bohr-Mollerup.

> Dans cette section, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
> - $f(1) = 1$;
> - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = x\, f(x)$;
> - $\ln\circ f$ est convexe.
>
> On va montrer que $f = \Gamma$.

7. Soit $x \in]0,1]$ et $n \geqslant 2$.

(a) En utilisant habilement la croissance de $\tau_{[\ln\circ f;n]}$, montrer

$$(n-1)^x \leqslant \frac{f(n+x)}{f(n)} \leqslant n^x.$$

On a

$$\tau_{[\ln\circ f;n]}(n-1) \leqslant \tau_{[\ln\circ f;n]}(n+x) \leqslant \tau_{[\ln\circ f;n]}(n+1)$$

donc $$\ln\left(f(n)\right) - \ln\left(f(n-1)\right) \leqslant \frac{\ln\left(f(n+x)\right) - \ln\left(f(n)\right)}{x} \leqslant \ln\left(f(n+1)\right) - \ln\left(f(n)\right).$$

À cause de la relation $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = x\, f(x)$, *on a* $f(n) = (n-1)\, f(n-1)$ *et* $f(n+1) = n\, f(n)$, *donc les termes de gauche et de droite de cette double inégalité valent simplement* $\ln(n-1)$ *et* $\ln(n)$. *En multipliant par* x *(qui est* > 0*) puis en utilisant la croissance de l'exponentielle, il vient*

$$(n-1)^x \leqslant \frac{f(n+x)}{f(n)} \leqslant n^x.$$

(b) En déduire

$$\Pi_{n-1}(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{n+x}{n}\,\Pi_n(x).$$

En appliquant de façon répétée la relation $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = x\, f(x)$, *il vient*

$$f(n+x) = (n+x-1)f(n+x-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+x-1)(n+x-2)f(n+x-2)\\
&= \cdots\\
&= (n+x-1)(n+x-2)\cdots x \times f(x)
\end{aligned}
$$

et, comme pour la fonction Γ, une récurrence immédiate donne $f(n) = (n-1)!$.
L'inégalité se réécrit donc

$$(n-1)^x \leqslant \frac{(x+n-1)\cdots x \times f(x)}{(n-1)!} \leqslant n^x,$$

ce que l'on réécrit

$$\frac{(n-1)^x\,(n-1)!}{x\cdots(x+n-1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x\,(n-1)!}{x\cdots(x+n-1)} = \frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,\frac{x+n}{n},$$

ce qui est l'encadrement demandé.

8. Montrer que $f = \Gamma$.

- ► *On a*
  - $\Pi_{n-1}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$;
  - $\dfrac{n+x}{n}\,\Pi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.

  Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a $\Gamma(x) \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(x)$.
- ► *On a donc montré $\forall x \in [0,1[\,, f(x) = \Gamma(x)$. Il reste à exporter cette égalité à $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.*
  Comme $\Gamma > 0$, on peut considérer le quotient $\dfrac{f}{\Gamma}$:
  - *d'après ce qui précède, $\dfrac{f}{\Gamma}$ vaut 1 sur l'intervalle $]0,1]$;*
  - *pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \dfrac{x\,f(x)}{x\,\Gamma(x)} = \dfrac{f(x)}{\Gamma(x)}$.*

  À partir de ces deux points, une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le quotient $\dfrac{f}{\Gamma}$ vaut 1 sur l'intervalle $]0,n]$, ce qui montre $f = \Gamma$.

9. **Application. La formule de duplication de Legendre.** À l'aide du théorème de Bohr-Mollerup, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma(x) = 2^{x-1}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Considérons la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to & \mathbb{R} \\ x \;\mapsto & \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2^{x-1}\,\Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right). \end{cases}$$

Il s'agit de montrer $\varphi = \Gamma$, ce que l'on va faire en utilisant le théorème de Bohr-Mollerup.

- ► *Déjà,* $\varphi(1) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,2^0\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\dfrac{1+1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.$
- ► *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a*

$$
\begin{aligned}
\varphi(x+1) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\underbrace{2^x}_{=2\times 2^{x-1}}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\,\underbrace{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{=\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= x\,\varphi(x).
\end{aligned}
$$

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *on a*

$$\ln\big(\varphi(x)\big) = x\,\ln(2) + \ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) - \ln\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

  - *La convexité de* $\ln\circ\Gamma$ *entraîne rapidement celle de* $x \mapsto \ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ *et* $x \mapsto \ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ *(que l'on utilise le critère de convexité des fonctions deux fois dérivables ou que l'on revienne à la définition).*
  - *La fonction* $x \mapsto x\,\ln(2) - \ln\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *est affine, donc convexe.*

  Somme de fonctions convexes, $\ln\circ\varphi$ *est convexe.*

- On peut montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ce qui simplifie la formule de duplication de Legendre.
- La fonction Γ est d'une importance considérable. Sa définition la plus standard est

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt,$$

  à laquelle il faudra donner un sens.
  La définition que l'on a utilisée est appelée *formule du produit de Gauss*.