DM 15 : théorème de Bohr-Mollerup

Exercice. Une suite récurrente à convergence lente.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \dfrac{2}{1+x^2}. \end{cases}$

On définit la suite récurrente u en posant $u_0 \in [0,2] \setminus \{1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $x - f(x)$ et $x - f\big(f(x)\big)$. Dans les deux cas, on donnera l'expression sous la forme $\dfrac{(x-1)^\alpha P(x)}{Q(x)}$, où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes sans racine réelle.
   En déduire les points fixes de f et de $f \circ f$.
2. Déterminer rapidement les variations de f sur $[0,2]$ et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2] \setminus \{1\}$.
3. Montrer que la suite u converge, et déterminer sa limite.
4. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\dfrac{u_{n+2}-1}{u_n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
5. (a) Montrer $\dfrac{u_{n+2}-u_n}{(u_n-1)^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer $\dfrac{1}{(u_{n+2}-1)^2} - \dfrac{1}{(u_n-1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   (c) En déduire $|u_n - 1| \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

Problème. Théorème de Bohr-Mollerup (1922).

Partie I. Préliminaires.

1. **(Deuxième) inégalité de Taylor-Lagrange.** Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Justifier l'existence du réel $M_a = \max\big\{|f''(t)| \,\big|\, t \in [0,a]\big\}$.
   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction (de classe C^2, par opérations)
   $$g_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \ \mapsto & f(x) - \big(f(0) + f'(0)\,x\big) - \lambda x^2. \end{cases}$$
   Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda(0) = g'_\lambda(0) = g_\lambda(a) = 0$ (et déterminer λ).
   (c) On choisit la valeur de λ trouvée à la question précédente.
   Montrer qu'il existe $c \in [0,a]$ tel que $g''_\lambda(c) = 0$.
   (d) En déduire une expression de $f(a)$, en fonction notamment de $f''(c)$.
   (e) Montrer que $\forall t \in [0,a], \big|f(t) - \big(f(0) + f'(0)\,t\big)\big| \leqslant \dfrac{M_a}{2}\,t^2$.
   (f) **Une application.** Montrer l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall t \in [0,a]\,, t - At^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

2. **Question bonus : théorème de Taylor-Lagrange.** En vous inspirant de ce qui vient d'être fait, montrer que, pour toute fonction $h \in C^{n+1}(\mathbb{R}_+)$, il existe $c \in [0, a]$ tel que

$$h(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} a^k + \frac{h^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} a^{n+1}.$$

Partie II. La fonction Γ.

- Dans cette partie, on pourra utiliser la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, déjà vues (en DS et en TD, respectivement).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Pi_n(x) = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Cette partie va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge – on notera $\Gamma(x)$ sa limite – puis étudier la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ainsi créée.

3. **Croissance de la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Minorer la fonction $-\ln$ par une fonction affine s'annulant en 1.
      ii. En déduire que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}$.
      iii. Montrer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geqslant 1 + \frac{x}{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît.
4. **Majoration de la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\ln\left(x\,\Pi_n(x)\right)$, en fonction notamment de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.
   (b) Grâce à la partie précédente, en déduire que la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Grâce au théorème de la limite monotone, on obtient donc une fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x).$$

Comme la suite $\left(\Pi_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et à valeurs > 0, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) > 0$.

5. **Premières propriétés de Γ.**
   (a) Montrer $\Gamma(1) = 1$.
   (b) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.
6. **Log-convexité de Γ.**
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $\ln \circ \Pi_n$ est convexe.
   (b) En déduire que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Partie III. Theorème de Bohr-Mollerup.

Dans cette section, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(1) = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = x\, f(x)$;
- $\ln \circ f$ est convexe.

On va montrer que $f = \Gamma$.

7. Soit $x \in]0, 1]$ et $n \geqslant 2$.
   (a) En utilisant habilement la croissance de $\tau_{[\ln \circ f; n]}$, montrer
   $$(n-1)^x \leqslant \frac{f(n+x)}{f(n)} \leqslant n^x.$$
   (b) En déduire
   $$\Pi_{n-1}(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{n+x}{n}\, \Pi_n(x).$$
8. Montrer que $f = \Gamma$.
9. **Application. La formule de duplication de Legendre.** À l'aide du théorème de Bohr-Mollerup, montrer
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(x) = 2^{x-1}\, \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

- On peut montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ce qui simplifie la formule de duplication de Legendre.
- La fonction Γ est d'une importance considérable. Sa définition la plus standard est
  $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt,$$
  à laquelle il faudra donner un sens.
  La définition que l'on a utilisée est appelée *formule du produit de Gauss*.