DM 17 : liberté ! [corrigé]

Partie I. Un lemme général.

> Dans cette partie, on dégage une condition suffisante de liberté.
> On fixe un corps K, un K-espace vectoriel E et une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs **non nuls** de E.
>
> Le but est de montrer le résultat suivant :
>
> **Lemme.** On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E)$ et une famille de scalaires **distincts** $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, T(x_i) = \lambda_i\, x_i$.
> Alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

1. **Une relation de liaison essentiellement unique.** On suppose ici la famille $(x_i)_{i\in I}$ liée.

   (a) **Une sous-famille à peine liée.** Justifier qu'il existe une partie finie $J \subseteq I$ et une famille de scalaires $(\alpha_j)_{j\in J}$ telles que

   (i) la famille $(\alpha_j)_{j\in J}$ n'est pas nulle, et $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j\, x_j = 0_E$;

   (ii) toute sous-famille $(x_j)_{j\in J'}$, où J' est une partie stricte de J, est libre.

   On considère l'ensemble A des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe des indices distincts $i_1, \dots, i_p$ dans I et des scalaires $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ non tous nuls tels que $\gamma_1\, x_{i_1} + \cdots + \gamma_p\, x_{i_p} = 0_E$.
   Cet ensemble est une partie non vide (parce que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée) de $\mathbb{N}$, donc il possède un minimum $p = \min A$.
   En notant $J = \{i_1, \dots, i_p\}$, on obtient déjà la première condition demandée (à une renumérotation près : pour tout $j = i_k \in J$, on pose $\alpha_j = \gamma_k$).
   Soit maintenant J' une partie stricte de J. Si la sous-famille $(x_j)_{j\in J'}$ était liée, on trouverait une relation de liaison non triviale $\displaystyle\sum_{j\in J'} \delta_j\, x_j = 0_E$, ce qui montrerait $|J'| \in A$ et contredirait la minimalité de p. La sous-famille $(x_j)_{j\in J'}$ est donc libre, ce qui conclut.

   (b) Justifier que $|J| \geqslant 2$.

   - *Toute famille indexée par le vide est libre, donc on doit avoir $|J| \geqslant 1$.*
   - *Si l'on avait $|J| = 1$, on aurait une famille à un vecteur (x_{i_0}) liée, ce qui donnerait $x_{i_0} = 0_E$ et contredirait l'énoncé.*

   (c) Montrer que la relation de liaison obtenue ci-dessus est unique à une constante multiplicative près, c'est-à-dire que si une famille de scalaires $(\beta_j)_{j\in J}$ vérifie $\displaystyle\sum_{j\in J} \beta_j\, x_j = 0_E$, alors il existe $\kappa \in K$ tel que $\forall j \in J, \beta_j = \kappa\, \alpha_j$.

   Soit $(\beta_j)_{j\in J} \in K^J$ telle que $\displaystyle\sum_{j\in J} \beta_j\, x_j = 0_E$.

   - *Remarquons déjà que tous les scalaires α_j, $j \in J$ sont non nuls. En effet, si l'un d'entre eux (disons α_{j_0}) était nul, la sous-famille $(x_j)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$ serait liée, ce qui est exclu.*

- *Soit maintenant* $j_0 \in J$ *(possible, car* J *est non vide). Posons* $\kappa = \dfrac{\beta_{j_0}}{\alpha_{j_0}}$.

  Les deux relations de liaison $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j\, x_j = \sum_{j\in J} \beta_j\, x_j = 0_E$ *se combinent pour donner*

$$\sum_{j\in J} (\beta_j - \kappa\, \alpha_j) x_j = 0_E.$$

  Comme $\beta_{j_0} - \kappa\, \alpha_{j_0} = 0$*, il s'agit d'une relation de liaison portant sur la sous-famille* $(x_j)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$*, qui est libre ! La relation de liaison est donc triviale.*

  On a donc $\forall j \in J, \beta_j = \kappa\, \alpha_j$*, ce qui conclut.*

2. **Démonstration du lemme.** On suppose maintenant qu'il existe un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ et une famille de scalaires **distincts** $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, T(x_i) = \lambda_i\, x_i$.

   (a) Montrer que si $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ vérifie $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i\, x_i = 0_E$, alors la famille $(\alpha_i\, \lambda_i)_{i\in I}$ est encore presque nulle et vérifie $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i\, \lambda_i\, x_i = 0_E$.

   Il est clair que le support de $(\alpha_i\, \lambda_i)_{i\in I}$ *est inclus dans celui de* $(\alpha_i)_{i\in I}$*, donc la famille* $(\alpha_i\, \lambda_i)_{i\in I}$ *est presque nulle.*

   On peut appliquer l'endomorphisme T *à la relation* $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i\, x_i = 0_E$*. On obtient*

$$0_E = T\left(\sum_{i\in I} \alpha_i\, x_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i\, T(x_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i\, \lambda_i\, x_i.$$

   (b) Conclure.

   Supposons par l'absurde la famille $(x_i)_{i\in I}$ *liée : on peut donc trouver* $J \subseteq I$ *finie et* $(\alpha_j)_{j\in J}$ *une famille de scalaires non nuls tels que* $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j\, x_j = 0_E$ *et que toute sous-famille stricte de* $(x_j)_{j\in J}$ *soit libre. On a vu que cette minimalité entraîne notamment* $|J| \geqslant 2$ *et* $\forall j \in J, \alpha_j \neq 0$.

   La question précédente montre également $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j\, \lambda_j\, x_j = 0_E$.

   Par le résultat « d'unicité » obtenu plus haut, on peut trouver $\kappa \in K$ *tel que* $\forall j \in J, \alpha_j\, \lambda_j = \kappa\, \alpha_j$.

   Comme les α_j*,* $j \in J$ *sont non nuls, on en déduit* $\forall j \in J, \lambda_j = \kappa$ *: les* λ_j*,* $j \in J$ *sont tous égaux.*

   Cela contredit le fait que les λ_j*,* $j \in J$ *sont tous distincts et que* $|J| \geqslant 2$.

   On a donc montré, par l'absurde, que la famille $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Partie II. Des applications.

3. (a) Étant donné $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$, on définit une nouvelle fonction $D(f) : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(2x). \end{cases}$

   Montrer que D est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+^*)$

   Par composition, si $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$*, la fonction* $D(f) : x \mapsto f(2x)$ *est encore élément de* $C^0(\mathbb{R}_+^*)$*. On a donc déjà une application bien définie* $D : C^0(\mathbb{R}_+^*) \to C^0(\mathbb{R}_+^*)$.

   Montrons sa linéarité : soit $f, g \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On a, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$*,*

$$\begin{aligned} D(f + \lambda g)(x) &= (f + \lambda g)(2x) \\ &= f(2x) + \lambda\, g(2x) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{D}(f)(x) + \lambda\, \mathrm{D}(g)(x),$$
$$\textit{donc} \qquad \mathrm{D}(f+\lambda g) = \mathrm{D}(f) + \lambda \mathrm{D}(g),$$

ce qui montre $\mathrm{D} \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}_+^*))$.

(b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.
En utilisant la partie précédente, montrer que $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

On voit directement que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{D}(f_\alpha) = 2^\alpha f_\alpha$.
La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto 2^\alpha = \exp(\alpha \ln 2) \end{cases}$ *étant injective (par composition) et les fonctions* f_α, $\alpha \in \mathbb{R}$ *n'étant pas nulles, le lemme de la partie I montre la liberté de la famille* $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit $e_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$, qui est un élément de $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Montrer que la famille $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est libre.

L'opérateur de dérivation $\nabla : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ *est clairement un endomorphisme de* $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *et les fonctions* e_α, $\alpha \in \mathbb{R}$ *ne sont pas nulles.*
On a $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \nabla(e_\alpha) = \alpha\, e_\alpha$ *: le lemme de la partie I montre la liberté de la famille* $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_-$, on définit $h_\alpha : x \mapsto \cos(\alpha x)$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $h_\beta : x \mapsto \sin(\beta x)$.

(a) En utilisant la première partie, montrer que les familles $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-}$ et $(h_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}_+^*}$ sont libres.

L'opérateur de dérivation seconde $\Delta : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f'' \end{cases}$ *est un endomorphisme de* $C^\infty(\mathbb{R})$.
Les fonctions h_α, $\alpha \in \mathbb{R}$ *sont par ailleurs non nulles.*
On a

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_-, \Delta(h_\alpha) = -\alpha^2 h_\alpha$.
La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_- \to \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto -\alpha^2 \end{cases}$ *est injective, donc le lemme entraîne la liberté de* $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \Delta(h_\alpha) = -\alpha^2 h_\alpha$.
La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto -\alpha^2 \end{cases}$ *est injective, donc le lemme entraîne la liberté de* $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$.

(b) Montrer que $\mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-}$ et $\mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ sont en somme directe.

Si on note $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{I}$*, respectivement, l'espace des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paires et impaires,*

- *on sait que* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{I}$ *sont en somme directe ;*
- *par stabilité par combinaison linéaire, on a* $\mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-} \subseteq \mathcal{P}$ *et* $\mathrm{Vect}(h_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}_+^*} \subseteq \mathcal{I}$.

(c) En déduire que $(h_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}}$ est libre.

C'est une variante de l'argument de concaténation des bases vu en cours.
Soit $(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ *telle que* $\sum_{\gamma\in\mathbb{R}} \lambda_\gamma h_\gamma = 0_{C^\infty}$*, où l'on a noté* 0_{C^∞} *la fonction nulle.*
On décompose cette relation de liaison sous la forme

$$\underbrace{\sum_{\gamma\in\mathbb{R}_-} \lambda_\gamma h_\gamma}_{\in \mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-}} + \underbrace{\sum_{\gamma\in\mathbb{R}_+^*} \lambda_\gamma h_\gamma}_{\in \mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}} = 0_{C^\infty}.$$

D'après la question précédente, on en déduit

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{R}_-} \lambda_\gamma h_\gamma = \sum_{\gamma\in\mathbb{R}_+^*} \lambda_\gamma h_\gamma = 0_{C^\infty},$$

puis, par la liberté des deux sous-familles que nous avons obtenue, $\forall \gamma \in \mathbb{R}, \lambda_\gamma = 0$*, ce qui conclut.*

Partie III. Liberté des échelles de comparaison.

6. **Un exemple.** Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $f_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \ \mapsto x^\alpha \, (\ln x)^\beta. \end{cases}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des indices $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, supposés deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $k \in [\![1, r]\!]$ tel que

$$\forall j \in [\![1, r]\!] \setminus \{k\}, f_{\alpha_j,\beta_j}(x) = \underset{x \to +\infty}{o} \left(f_{\alpha_k,\beta_k}(x)\right).$$

   On considère $\alpha_{\max} = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*, puis, parmi les entiers* $\ell \in [\![1, r]\!]$ *tels que* $\alpha_\ell = \alpha_{\max}$*, on choisit* k *tel que* β_k *soit maximal.*
   Comme les couples (α_j, β_j) *sont tous distincts, on a*

$$\forall j \in [\![1, r]\!] \setminus \{k\}, \Big(\alpha_j \leqslant \alpha_k \quad \textit{et} \quad (\alpha_j = \alpha_k \Rightarrow \beta_j < \beta_k)\Big).$$

   (De façon plus concise, (α_k, β_k) *est l'unique maximum des* (α_j, β_j) *pour l'ordre lexicographique sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$*.)*
   Déduisons-en la propriété demandée : soit $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$*.*

   - *Si* $\alpha_j < \alpha_k$*, on a*

$$\frac{f_{\alpha_j,\beta_j}(x)}{f_{\alpha_k,\beta_k}(x)} = \underbrace{\frac{1}{x^{\alpha_k - \alpha_j}}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} (\ln x)^{\beta_j - \beta_k} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$

     par opérations si $\beta_j \leqslant \beta_k$*, et par croissances comparées si* $\beta_j > \beta_k$*.*
   - *Si* $\alpha_j = \alpha_k$*, on a* $\beta_j < \beta_k$*, donc*

$$\frac{f_{\alpha_j,\beta_j}(x)}{f_{\alpha_k,\beta_k}(x)} = \frac{1}{(\ln x)^{\beta_k - \beta_j}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

   Dans tous les cas, on a bien $f_{\alpha_j,\beta_j} = \underset{x \to +\infty}{o}\big(f_{\alpha_k,\beta_k}(x)\big)$*.*

   (b) En déduire que la famille $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*}$ est libre.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)}$ *telle que* $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*} \lambda_{\alpha,\beta} \, f_{\alpha,\beta} = 0$*.*
   Supposons par l'absurde cette relation de liaison non triviale et notons $\big((\alpha_j, \beta_j)\big)_{j=1}^n$ *la famille des* $n \geqslant 1$ *couples pour lesquels le scalaire correspondant est non nul (pour simplifier les notations, on notera alors* $\lambda_j = \lambda_{\alpha_j,\beta_j}$ *ce scalaire).*
   D'après la question précédente, on peut trouver $k \in [\![1, n]\!]$ *tel que toutes les autres fonctions de la famille soient négligeables devant* f_{α_k,β_k}*. Par combinaison linéaire, on a*

$$f_{\alpha_k,\beta_k}(x) = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \lambda_j \, f_{\alpha_j,\beta_j}(x) = \underset{x \to +\infty}{o} \left(f_{\alpha_k,\beta_k}(x)\right).$$

   Comme la fonction f_{α_k,β_k} *ne s'annule pas au voisinage de* $+\infty$*, cela se traduit en une convergence*

$$\frac{f_{\alpha_k,\beta_k}(x)}{f_{\alpha_k,\beta_k}(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$

   manifestement absurde.

7. **Une généralisation.** Soit $(T, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. On considère une famille $(f_\tau)_{\tau \in T}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que toutes les fonctions f_τ, $\tau \in T$, sont non nulles[1] au voisinage de $+\infty$ et $\forall \sigma, \tau \in T, \sigma \prec \tau \Rightarrow f_\sigma(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\big(f_\tau(x)\big)$.

   Montrer que $(f_\tau)_{\tau \in T}$ est libre.

   La même démonstration marche essentiellement : il suffit de remarquer que si $T_0 \subseteq T$ est une partie finie non vide, alors T_0 possède un maximum k pour l'ordre $\preccurlyeq$ (on peut par exemple le démontrer par récurrence sur le cardinal $|T_0|$), ce qui donne

$$\forall j \in T_0 \setminus \{k\}, f_j(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\big(f_k(x)\big),$$

   et on recopie la démonstration de la question précédente.

8.$^+$ Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Utiliser la question précédente pour construire une famille libre de fonctions dans l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+^*)$ qui soit indexée par $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^d$, muni de l'ordre lexicographique.

   On va commencer par construire des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ jouant le rôle de $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$, c'est-à-dire vérifiant une forme de théorème des croissances comparées.
   Considérons par exemple, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$,

$$\varphi_i = \underbrace{\exp \circ \exp \circ \cdots \circ \exp}_{d+1-i \textit{ fois}}$$

   (les cas extrêmes sont $\varphi_1 = \underbrace{\exp \circ \exp \circ \cdots \circ \exp}_{d \textit{ fois}}$ et $\varphi_d = \exp$ et on a $\forall i \in [\![1, d-1]\!]$, $\varphi_i = \exp \circ \varphi_{i+1}$).
   En notant $\leqslant_{\text{lex}}$ l'ordre lexicographique, on va montrer

$$\begin{aligned} &\forall \alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{R}_+^*, \\ &\qquad (\alpha_1, \dots, \alpha_d) <_{\text{lex}} (\beta_1, \dots, \beta_d) \Rightarrow \varphi_1(x)^{\alpha_1} \cdots \varphi_d(x)^{\alpha_d} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\varphi_1(x)^{\beta_1} \cdots \varphi_d(x)^{\beta_d}\right). \end{aligned}$$

   Pour tout $\gamma > 0$ et tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, on a $\varphi_{i+1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $y^\gamma = \underset{y \to +\infty}{o}(\exp(y))$.
   Par composition, on en déduit

$$\varphi_{i+1}(x)^\gamma = \underset{x \to +\infty}{o}\big(\varphi_i(x)\big).$$

   En particulier, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi_{i+1}(x)^{\alpha/\beta} = \underset{x \to +\infty}{o}\big(\varphi_i(x)\big)$, donc $\varphi_{i+1}(x)^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}\big(\varphi_i(x)^\beta\big)$.
   Évidemment, cette relation de négligeabilité est trivialement vraie si $\alpha \leqslant 0$.
   Cela va conclure : soit $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) <_{\text{lex}} (\beta_1, \dots, \beta_d)$. On peut donc trouver $p \in [\![1, d]\!]$ tel que $\alpha_p < \beta_p$ et $\forall i < p, \alpha_i = \beta_i$.
   On a, en notant $\varepsilon = (\beta_p - \alpha_p)/d > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(x)^{\alpha_1} \cdots \varphi_d(x)^{\alpha_d}}{\varphi_1(x)^{\beta_1} \cdots \varphi_d(x)^{\beta_d}} &= \frac{\varphi_1(x)^{\alpha_p} \cdots \varphi_d(x)^{\alpha_d}}{\varphi_1(x)^{\beta_p} \cdots \varphi_d(x)^{\beta_d}} \\ &= \varphi_p(x)^{-d\varepsilon} \underbrace{\varphi_{p+1}(x)}_{=o(\varphi_p(x)^\varepsilon)} \cdots \underbrace{\varphi_d(x)}_{=o(\varphi_p(x)^\varepsilon)} \\ &= o\left(\varphi_p(x)^{-p\varepsilon}\right) = o(1), \end{aligned}$$

   ce qui conclut.
   La question précédente, pour l'ensemble totalement ordonné $(T, \preccurlyeq) = \left((\mathbb{R}_+^*)^d, \leqslant_{\text{lex}}\right)$, montre alors que la famille $\left(\varphi_1^{\alpha_1} \cdots \varphi_d^{\alpha_d}\right)_{\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}_+^*}$ est libre, ce qui conclut.

---

1. Erreur dans l'énoncé initial : il manquait cette condition (ou une autre du même genre, des hypothèses moins faibles conviennent également). Il faut éviter le problème technique que la fonction nulle est négligeable devant elle-même.

Partie IV. Liberté des caractères.

Soit M un monoïde noté multiplicativement et K un corps. On considère une famille $(\chi_i)_{i\in I}$ de *caractères* de M, c'est-à-dire de morphismes de monoïdes de M vers le groupe multiplicatif K^*.
On suppose que les caractères formant la famille $(\chi_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts.
On va montrer que la famille $(\chi_i)_{i\in I}$, que l'on peut considérer dans le K-espace vectoriel K^M de toutes les applications $M \to K$, est libre.

9. Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ telle que $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \chi_i = 0_{K^M}$.
   Montrer que, pour tout $g \in M$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \chi_i(g) \chi_i = 0_{K^M}$.

   Soit $g \in M$. La relation de liaison se réécrit
   $$\forall h' \in G, \sum_{i\in I} \alpha_i \chi_i(h') = 0_{K^M}.$$
   En particulier, en l'appliquant à $h' = gh$, on obtient
   $$\forall h \in G, \sum_{i\in I} \alpha_i \underbrace{\chi_i(gh)}_{=\chi_i(g)\chi_i(h)} = 0_{K^M}, \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad \sum_{i\in I} \alpha_i \chi_i(g) \chi_i = 0_{K^M}.$$

10. En utilisant la première partie, montrer que $(\chi_i)_{i\in I}$ est libre.

    Comme dans la première partie, on suppose par l'absurde la famille liée, et on considère une relation de liaison « minimale » $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j \chi_j = 0_{K^M}$.
    On sait alors que $\forall j \in J, \alpha_j \neq 0$, que $|J| \geqslant 2$ (les caractères ne sont pas nuls, car $\chi_i(1_M) = 1$), et que la relation de liaison ainsi obtenue est unique à multiplication près par un scalaire.
    La question précédente et l'unicité que l'on vient d'évoquer montrent que
    $$\forall g \in G, \exists \kappa \in K : \forall j \in J, \alpha_j \chi_j(g) = \kappa\, \alpha_j.$$
    Comme les α_j, $j \in J$ ne sont pas nuls, on en déduit que les χ_j prennent tous la même valeur en chaque élément $g \in G$, c'est-à-dire qu'ils sont égaux. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle ils étaient deux à deux distincts et le fait que $|J| \geqslant 2$.

11. **Une vieille application.** Utiliser ce résultat pour proposer une nouvelle démonstration d'une question précédente.

    - *On vérifie sans difficulté que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ définit un caractère du monoïde $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le corps $\mathbb{R}$. On retrouve ainsi le résultat de la question 3b.*
    - *On vérifie que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$ définit un caractère du monoïde*[2] *$(\mathbb{R}, +)$ vers le corps $\mathbb{C}$. On retrouve ainsi le résultat de la question 4.*

12. **Une nouvelle application.** Soit $z_1, \dots, z_n \in K$ des scalaires non nuls distincts.
    Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $z_1^e + \cdots + z_n^e \neq 0$.

    La formulation de l'énoncé est un peu ambiguë, on va faire comme si le sujet supposait tacitement $n \geqslant 1$. (On peut remarquer que la question est triviale en caractéristique nulle, car $e = 0$ convient alors : $z_1^0 + \cdots + z_n^0 = n \neq 0$).

2. Attention ! celui-ci est noté additivement !

Les applications $\chi_i : k \mapsto z_i^k$ sont des caractères du monoïde additif $(\mathbb{N}, +)$ vers le corps $\mathbb{K}$. Puisque les scalaires sont différents, les caractères sont différents (il suffit de constater que $\chi_i(1) = z_i$) donc, d'après le résultat de cette partie, ils sont linéairement indépendants.

En particulier, la combinaison linéaire non triviale $\begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{K} \\ k \mapsto z_1^k + \cdots + z_n^k \end{cases}$ n'est pas la fonction nulle, ce qui conclut.

Partie V. Deux derniers résultats.

13. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}$ est un ensemble minoré non vide.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note f_t la fonction $x \mapsto f(x-t)$.
Montrer que $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est libre.

Supposons par l'absurde la famille liée et considérons une relation de liaison non triviale $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{t_i} = 0_{C^0}$, où $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ sont des scalaires tous distincts et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires non nuls.
Notons m la borne inférieure de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}$.
On peut notamment trouver $x \in [m, m+\delta]$ tel que $f(x) \neq 0$, où $\delta = \dfrac{t_2 - t_1}{2} < t_2 - t_1$.
En évaluant la relation de liaison en $t_1 + x$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{t_i}(t_1 + x) = 0 \qquad \textit{donc} \qquad \alpha_1 f_{t_1}(t_1+x) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i f_{t_i}(t_1+x) = 0$$
$$\textit{donc} \qquad \alpha_1 f(x) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i f(\underbrace{x - (t_i - t_1)}_{\leqslant x - (t_1 - t_2) < m}) = 0.$$

Cela donne une contradiction : on a $\alpha_1 f(x) \neq 0$ mais $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i f(\underbrace{x - (t_i - t_1)}_{\leqslant x - (t_2 - t_1) < m}) = 0$.

14.$^{++}$ **Un exercice d'oral (X).** On continue à considérer, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $e_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ définie par $e_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$. On note $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \text{Ré}\, z \geqslant 0\}$.
Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ non nulle telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
Montrer que la famille obtenue en ajoutant f à $(e_\alpha)_{\alpha \in P}$ est libre.

D'après la question 4, la famille $(e_\alpha)_{\alpha \in P}$, est une sous-famille d'une famille libre, donc elle est libre.
D'après le lemme de précipitation, il suffit donc de montrer qu'aucune fonction non nulle $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tendant vers 0 en $+\infty$ n'appartient à $\text{Vect}(e_\alpha)_{\alpha \in P}$ pour conclure.
Supposons par l'absurde le résultat faux et considérons une écriture

$$f = \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha e_\alpha.$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vérifie $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ que l'on suppose ***minimale****, au sens où aucune fonction lisse tendant vers 0 en $+\infty$ n'est combinaison linéaire de moins de $|J|$ éléments de la famille $(e_\alpha)_{\alpha \in P}$.*
Considérons maintenant l'endomorphisme de translation $T : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to & C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \\ f & \mapsto \big(x \mapsto f(x+1)\big) \end{cases}$, qui vérifie la jolie relation $\forall \alpha \in \mathbb{R}, T(e_\alpha) = e^\alpha e_\alpha$.

En appliquant cet endomorphisme, on obtient $T(f) = T\left(\sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha e_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha e^\alpha e_\alpha$.

Fixons maintenant un $\alpha_0 \in \mathrm{J}$ *que l'on va « éliminer ». Les calculs précédents montrent*

$$\mathrm{T}(f) - e^{\alpha_0} f = \sum_{\alpha \in \mathrm{J}} \lambda_\alpha \left(e^\alpha - e^{\alpha_0}\right) e_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathrm{J} \setminus \{\alpha_0\}} \lambda_\alpha \left(e^\alpha - e^{\alpha_0}\right) e_\alpha.$$

Remarquons que $\mathrm{T}(f) - e^{\alpha_0} f : x \mapsto f(x+1) - e^{\alpha_0} f(x)$ *est encore une fonction lisse tendant vers* 0 *en* $+\infty$. *Comme on vient de l'écrire comme une combinaison linéaire de* $|\mathrm{J}| - 1$ *fonctions de la famille* $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{P}}$, *la minimalité de* J *entraîne que* $\mathrm{T}(f) - e^{\alpha_0} f$ *est la fonction nulle.*
Notre fonction f *vérifie donc* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = e^{\alpha_0} f(x)$ *et donc* $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x+1)| = \underbrace{e^{\mathrm{Ré}(\alpha_0)}}_{\geqslant 1} |f(x)|$.

Cela montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, *la suite* $\big(|f(x+n)|\big)_{n \in \mathbb{N}}$, *qui est clairement positive et de limite nulle (par composition), est croissante. On en déduit que ces suites sont toutes nulles, ce qui montre notamment* $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = 0$, *et fournit la contradiction attendue.*