DM 18 : décomposition de Fitting et théorème de Krull-Schmidt [1]

- Dans tout le problème, on fixe un corps des scalaires $\mathbb{K}$.
- On fixe un espace vectoriel de dimension finie E et, dans les deux premières parties, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Étant donné deux ensembles A et B, on note $A \subsetneq B$ si $A \subseteq B$ et $A \neq B$.

Partie I. Noyaux et images itérés.

1. Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (dite *suite des noyaux itérés*) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subseteq \ker u^{k+1}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^k = \ker u^{k+1}$. Montrer que $\ker u^{k+1} = \ker u^{k+2}$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\{0_E\} = \ker u^0 \subsetneq \ker u^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^p = \ker u^{p+1} = \ker u^{p+2} = \cdots$$
4. Montrer que l'entier p de la question précédente vérifie
$$E = \operatorname{im} u^0 \supsetneq \operatorname{im} u^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{im} u^p = \operatorname{im} u^{p+1} = \operatorname{im} u^{p+2} = \cdots$$

La fin de cette partie n'est pas utilisée dans la suite du problème.

5. **Décroissance des codimensions.** Dans cette question, on considère une application linéaire $\varphi : X \to Y$ entre deux espaces vectoriels de dimension finie, et un sous-espace vectoriel W de Y. On va montrer, de deux façons différentes, que $\dim X - \dim \varphi^{-1}[W] \leqslant \dim Y - \dim W$.

   Démonstration par la considération d'une application induite.

   (a) Montrer que φ induit une application linéaire $\varphi_W : \varphi^{-1}[W] \to W$, de noyau $\ker \varphi$ et d'image $W \cap \operatorname{im} \varphi$.

   (b) En déduire $\dim \varphi^{-1}[W] = \dim W + \dim X - \dim(W + \operatorname{im} \varphi)$.

   (c) Conclure la démonstration.

   Démonstration par dualité. On note $r = \dim Y - \dim W$.

   On fixe alors r formes linéaires $\beta_1, \ldots, \beta_r \in Y^*$ telles que $W = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \beta_i$.

   (d) Justifier l'existence de r formes linéaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in X^*$ telles que $\varphi^{-1}[W] = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \alpha_i$.

   Indication. *Étant donné $\beta \in Y^*$, comment peut-on définir une forme linéaire $\alpha \in X^*$?*

   (e) Conclure la démonstration.

   Décroissance des dimensions. Le résultat que l'on vient de montrer possède un résultat « dual » : avec les mêmes notations, si V est un sous-espace vectoriel de X, alors $\dim \varphi[V] \leqslant \dim V$.

   (f) En vous inspirant de l'une (au choix) des deux preuves précédentes, montrer ce résultat (qui est, il faut bien le dire, beaucoup moins inspirant).

6. **Un résultat de concavité**.

   (a) En considérant l'application linéaire induite par u entre deux sous-espaces vectoriels bien choisis, montrer $\forall k \in \mathbb{N}, \dim \ker u^{k+2} - \dim \ker u^{k+1} \leqslant \dim \ker u^{k+1} - \dim \ker u^k$.

   (b) Quel est le résultat correspondant sur la suite $(\operatorname{rg} u^k)_{k\in\mathbb{N}}$?

1. Hans Fitting (1906-1938) ; Wolfgang Krull (1899-1971) ; Otto Schmidt (1891-1956). Le théorème de Krull-Schmidt a une histoire compliquée et est également associé aux noms de Robert Remak (1888-1942) et Gorō Azumaya (1920-2010).

Partie II. Décomposition de Fitting.

- Dans toute la suite, on posera

$$E_{\mathrm{nil}}(u) = \ker u^p \qquad \text{et} \qquad E_{\mathrm{inv}}(u) = \operatorname{im} u^p,$$

où $p \in \mathbb{N}$ est l'entier défini dans les questions 3 et 4.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E,
  - on dira que F est *stable sous* u si $u[F] \subseteq F$;
  - si c'est le cas, l'application $F \to F$ induite par u (qui hérite de la linéarité de u), sera appelée *l'endomorphisme induit par* u *à* F.

7. **Induit nilpotent.**
   (a) Montrer que $E_{\mathrm{nil}}(u)$ est un espace stable sous u et que l'endomorphisme u_{nil} induit par u sur $E_{\mathrm{nil}}(u)$ est nilpotent (c'est-à-dire qu'une puissance de u_{nil} est l'endomorphisme nul).
   (b) Soit N un sous-espace vectoriel de E, stable sous u, tel que l'endomorphisme induit par u sur N soit nilpotent. Montrer que $N \subseteq E_{\mathrm{nil}}(u)$.
8. **Induit inversible.**
   (a) Montrer que $E_{\mathrm{inv}}(u)$ est un espace stable sous u et que l'endomorphisme u_{inv} induit par u sur $E_{\mathrm{inv}}(u)$ est un automorphisme.
   (b) Soit I un sous-espace vectoriel de E, stable sous u, tel que l'endomorphisme induit par u sur I soit un automorphisme. Montrer que $I \subseteq E_{\mathrm{inv}}(u)$.
9. Montrer la *décomposition de Fitting* : $E = E_{\mathrm{nil}}(u) \oplus E_{\mathrm{inv}}(u)$.
10. **Un contre-exemple en dimension infinie.** On suppose K de caractéristique nulle[2] et on considère l'endomorphisme de dérivation $D : \begin{cases} K[X] \to K[X] \\ \;\; P \;\; \mapsto \;\; P'. \end{cases}$
    Montrer qu'il n'existe pas deux sous-espaces vectoriels N et I, stables sous u, tels que l'induit de u sur N (resp. sur I) soit nilpotent (resp. un automorphisme) et que $K[X] = N \oplus I$.

2. Hypothèse oubliée dans la version distribuée... En caractéristique $p > 0$, l'endomorphisme de dérivation est nilpotent car il vérifie $D^p = 0_{\mathcal{L}(K[X])}$, donc on a la décomposition de Fitting donnée par $E_{\mathrm{nil}}(D) = K[X]$ et $E_{\mathrm{inv}}(D) = \{0_{K[X]}\}$. Si l'on veut un exemple qui fonctionne en toute caractéristique, l'endomorphisme de $K^{(\mathbb{N})}$ donné par $u \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ fonctionne.

Partie III. Indécomposabilité.

Dans cette partie, on considère un ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(E)$ d'endomorphismes de E.

- Un sous-espace vectoriel F de E est dit *$\mathcal{A}$-stable* si $\forall a \in \mathcal{A}, a[F] \subseteq F$.
  Pour gagner du temps, on écrira *$\mathcal{A}$-espace* au lieu de *sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$-stable*.
- Un $\mathcal{A}$-espace non trivial [3] M de E est dit *décomposable* s'il existe deux $\mathcal{A}$-espaces non triviaux F_1 et F_2 tels que $M = F_1 \oplus F_2$. Il est dit *indécomposable* dans le cas contraire.
- Si F_1, F_2 sont deux $\mathcal{A}$-espaces, une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ est dite *équivariante* si l'on a $\forall x \in F_1, \forall a \in A, \varphi\big(a(x)\big) = a\big(\varphi(x)\big)$.
  On note $\text{Éq}(F_1, F_2)$ l'ensemble des applications linéaires équivariantes de F_1 vers F_2, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F_1, F_2)$ (on ne demande pas de le vérifier).
  Naturellement, on abrège $\text{Éq}(F_1, F_1)$ en $\text{Éq}(F_1)$.

11. **Un exemple.** Dans cette question uniquement, $E = K^2$ et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des endomorphismes canoniquement associés aux matrices de $T_2^+(K)$.
    (a) Soit F un $\mathcal{A}$-espace.
        i. On suppose que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$. Montrer $F = K^2$.
        ii. On suppose maintenant qu'il existe un élément de F n'appartenant pas à $\text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer $F = K^2$.
    (b) Montrer qu'il existe exactement trois $\mathcal{A}$-espaces, que l'on déterminera.
    (c) En déduire que E est indécomposable.
12. Montrer que la somme (resp. l'intersection) de deux $\mathcal{A}$-espaces est encore un $\mathcal{A}$-espace.
13. Soit F un $\mathcal{A}$-espace. Montrer que $\text{Éq}(F)$ est une sous-algèbre [4] de $\mathcal{L}(F)$.
14. Soit F un $\mathcal{A}$-espace et $\varphi \in \text{Éq}(F)$. Montrer que $\ker \varphi$ et $\operatorname{im} \varphi$ sont des $\mathcal{A}$-espaces.
15. Soit F_1 et F_2 deux $\mathcal{A}$-espaces en somme directe. Montrer que le projecteur p sur F_1 parallèlement à F_2 (qui est donc un endomorphisme de $F_1 \oplus F_2$) appartient à $\text{Éq}(F_1 \oplus F_2)$.
16. Soit M un $\mathcal{A}$-espace non trivial. En utilisant la décomposition de Fitting, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) M est indécomposable ;
    (ii) tout élément de $\text{Éq}(M)$ est un automorphisme ou nilpotent ;
    (iii) pour tout $\varphi \in \text{Éq}(M)$, l'une des deux applications φ et [5] $\mathrm{id}_M - \varphi$ est un automorphisme.

3. Autrement dit, $M \neq \{0_E\}$.
4. Autrement dit, montrer que c'est à la fois un sous-espace vectoriel de $\big(\mathcal{L}(F), +, \cdot\big)$ et un sous-anneau de $\big(\mathcal{L}(F), +, \circ\big)$.
5. Coquille dans la version distribuée.

Partie IV. Théorème de Krull-Schmidt.

On reprend les notations de la partie précédente, et on rajoute une définition.

- Un *isomorphisme équivariant* entre deux $\mathcal{A}$-espaces F_1 et F_2 est une application $\varphi \in \text{Éq}(F_1, F_2)$ qui est un isomorphisme.

17. Montrer qu'il existe des $\mathcal{A}$-espaces indécomposables $M_1, \dots, M_r$ tels que $E = M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_r$.

On s'intéresse dans la suite à l'unicité (à équivalence près) de cette décomposition.
On suppose donc qu'il existe des $\mathcal{A}$-espaces indécomposables $M_1, \dots, M_r, N_1, \dots, N_s$ tels que

$$E = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s,$$

et l'on veut montrer que $r = s$ et que, à renumérotation près des facteurs, il existe pour tout i un isomorphisme équivariant $M_i \to N_i$.
La démonstration se fait par récurrence sur r : pour l'hérédité, il s'agit de montrer qu'il existe un entier $j \in [\![1, s]\!]$ et deux isomorphismes équivariants $M_1 \to N_j$ et $M'_1 = \bigoplus\limits_{\substack{k\in[\![1,r]\!] \\ k\neq 1}} M_k \to \bigoplus\limits_{\substack{\ell\in[\![1,s]\!] \\ \ell\neq j}} N_\ell = N'_j$.
Pour ne pas alourdir davantage les notations, nous n'allons montrer que cette étape-clef.

- Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note $M'_i = \bigoplus\limits_{\substack{k\in[\![1,r]\!] \\ k\neq i}} M_k$, p_i le projecteur sur M_i parallèlement à M'_i et $p'_i = \mathrm{id}_E - p_i$ le projecteur sur M'_i parallèlement à M_i.
- On définit de façon analogue les espaces N'_j et les projecteurs q_j et q'_j, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$.
- D'après la question 15, tous ces projecteurs sont équivariants.

18. Pour tout $j \in [\![1, s]\!]$,
    - le projecteur q_j induit une application linéaire équivariante $\pi_j \in \text{Éq}(M_1, N_j)$;
    - le projecteur p_1 induit une application linéaire équivariante $\theta_j \in \text{Éq}(N_j, M_1)$.

    On va montrer qu'il existe $j \in [\![1, s]\!]$ tel que $\theta_j \circ \pi_j$ soit un automorphisme de M_1.

    (a) Montrer que pour tous $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \text{Éq}(M_1)$, si la somme $\varphi_1 + \cdots + \varphi_s$ est un automorphisme de M_1, alors il existe $j \in [\![1, s]\!]$ tel que φ_j soit un automorphisme de M_1.

    (b) Pour tout $x \in M_1$, calculer $\sum\limits_{j=1}^{s} \theta_j\big(\pi_j(x)\big)$.

    (c) Conclure.

19. En notant $\sigma_j = \big(\theta_j \circ \pi_j\big)^{-1} \circ \theta_j$, on obtient ainsi deux applications linéaires $\sigma_j \in \mathcal{L}(N_j, M_1)$ et $\pi_j \in \text{Éq}(M_1, N_j)$ telles que $\sigma_j \circ \pi_j = \mathrm{id}_{M_1}$.

    (a) Montrer que $\pi_j \circ \sigma_j \in \text{Éq}(N_j)$ est un projecteur, de noyau $\ker \sigma_j$ et d'image $\mathrm{im}\, \pi_j$.

    (b) En déduire que π_j et σ_j sont deux isomorphismes équivariants, réciproques l'un de l'autre.

20. Montrer que l'application $\pi'_j \in \text{Éq}(M'_1, N'_j)$ induite par q'_j est également un isomorphisme équivariant, ce qui conclut la démonstration.