DM 19 : théorème de Skolem-Noether pour $M_n(\mathbb{C})$

- Dans tout le problème, on fixe E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 1$ (et toutes les notions d'algèbre linéaire sont à entendre sur le corps des scalaires $\mathbb{C}$).
- On note $\zeta = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
- On « rappelle » deux faits concernant une $\mathbb{C}$-algèbre A (dans le sujet, ce sera $\mathcal{L}(E)$ ou $M_n(\mathbb{C})$).
  1. Un *endomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres* de A est un endomorphisme (linéaire) $u \in \mathcal{L}(A)$ qui est également un morphisme d'anneaux.
  2. Étant donné un élément $a \in A$, il existe une application d'évaluation

$$\text{év}_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & A \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k & \longmapsto & P(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k \end{array} \right.$$

qui est un morphisme d'algèbres (si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a donc les trois relations $\text{év}_u(1) = \text{id}_E$, $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \text{év}_u(P+Q) = P(u) + Q(u)$ et $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \text{év}_u(PQ) = P(u) \circ Q(u)$).

Le but du problème est de déterminer tous les endomorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $M_n(\mathbb{C})$, ce qui est un cas (très) particulier d'un théorème dû (indépendamment) à Thoralf Skolem et Emmy Noether.

Partie I. Co-réduction de deux endomorphismes.

1. **Un calcul préliminaire.**
   (a) Déterminer les racines du polynôme $X^n - 1$, et en déduire une factorisation de ce polynôme en polynômes de degré 1.
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \text{id}_E$.
   En utilisant la relation précédente, montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel que $u - \omega\,\text{id}_E \notin GL(E)$.
   (c) Montrer que $\text{Sp}(u)$ est une partie non vide de $\mathbb{U}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère deux endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant les relations $u^n = v^n = \text{id}_E$ et $u \circ v = \zeta\,(v \circ u)$. On définit les matrices

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \zeta^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \zeta^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Montrer $\zeta\lambda \in \text{Sp}(u)$.
3. En déduire $1 \in \text{Sp}(u)$.

On peut trouver $x_0 \in E$ non nul tel que $u(x_0) = x_0$.

4. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le vecteur $v^k(x_0)$ est un vecteur propre pour u, associé à la valeur propre ζ^k.

5. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, \nu(x_0), \ldots, \nu^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   Indication. On pourra utiliser un résultat du DM 17 !
6. Montrer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \Delta$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\nu) = \Sigma$.

Partie II. Une base de $M_n(\mathbb{C})$.

7. **Une base de** $D_n(\mathbb{C})$.
   (a) Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$. Montrer l'équivalence
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Delta^k = 0_{M_n(\mathbb{C})} \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$
   (b) En déduire que $(I_n, \Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^{n-1})$ est une base de $D_n(\mathbb{C})$.
8. (a) Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, on considère $V_p = \mathrm{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \equiv j + p \pmod n\right\}$.
   Que vaut V_0 ?
   (b) Montrer $M_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p=0}^{n-1} V_p$.
   (c) En déduire que la famille $\mathcal{F} = \left(\Sigma^p \Delta^k\right)_{0 \leqslant p,k \leqslant n-1}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$.
   (d) On considère la *all-ones matrix* $H = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Décomposer H dans la base $\mathcal{F}$.

Partie III. Théorème de Skolem-Noether pour $M_n(\mathbb{C})$.

9. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\Psi_P : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \\ \quad M \quad \mapsto PMP^{-1} \end{cases}$ est un endomorphisme de la $\mathbb{C}$-algèbre $M_n(\mathbb{C})$.

> On va maintenant montrer la réciproque de ce résultat.
> On fixe donc un endomorphisme φ de la $\mathbb{C}$-algèbre $M_n(\mathbb{C})$.

10. (a) On considère u (resp. ν) l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à $\varphi(\Delta)$ (resp. $\varphi(\Sigma)$).
    Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi(\Delta) = P\Delta P^{-1}$ et $\varphi(\Sigma) = P\Sigma P^{-1}$.
    (b) En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi = \Psi_P$.
11. En déduire que tout endomorphisme de la $\mathbb{C}$-algèbre $M_n(\mathbb{C})$ est un automorphisme.
12. Déterminer les endomorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Thoralf Skolem (1887-1963)

Emmy Noether (1882-1935)