DM 21 : deux grands classiques [corrigé]

Problème A. Wallis, Stirling, Gauss.

Partie I. Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.

   On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ *et* $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_{t=0}^{\pi/2} = 1$.

2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs $\geqslant 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$, *donc* $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$.
   Par croissance de l'intégrale, il vient $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, *ce qui conclut.*

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre W_{n+1} et W_{n-1}.
   En déduire que la suite $\left(n\,W_n\,W_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   - *On a*

   $$\begin{aligned} W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \, dt &= [\sin t \, \cos^n t]_{t=0}^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 t}_{=1-\cos^2 t} \cos^{n-1} t \, dt \quad (\sin \textit{ et } \cos^n \textit{ sont } C^1) \\ &= 0 + n \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \, dt - n \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \, dt \qquad (\textit{car } n > 0) \\ &= n\,W_{n-1} - n\,W_{n+1}. \end{aligned}$$

     On en déduit $(n+1)W_{n+1} = n\,W_{n-1}$.

   - *On a alors* $(n+1)W_{n+1}\,W_n = n\,W_{n-1}\,W_n$, *ce qui montre que la suite* $\left(n\,W_n\,W_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est constante.*

4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{2} \leqslant n\,W_n^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et en déduire un équivalent simple de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   - *La suite constante de la question précédente vaut constamment* $1 \times W_1 \times W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a, par décroissance de la suite* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

   $$\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{n}{n+1} n\,W_{n+1}\,W_n \leqslant n\,W_n^2 \leqslant n\,W_n\,W_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

   - *D'après le théorème des gendarmes, on a* $nW_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$, *ce qui donne* $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$, *puis enfin* $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II. Formule de Stirling.

On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. (a) Déterminer un équivalent de la suite $\left(\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)_{n\geqslant 2}$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) &= \ln\left(\frac{n!\,e^n}{(n-1)!\,e^{n-1}}\,\frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)\\
&= \ln\left(n\,e\,\frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)\\
&= 1+\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)\\
&= 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= 1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(n^{-3})\right)\\
&= 1-\left(1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2}+o(n^{-2})\right)\\
&= -\frac{1}{12n^2}+o(n^{-2})
\end{aligned}$$

donc $\qquad \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}.$

(b) En admettant – on l'a montré en TD – que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell > 0$.

- *Comme la suite* $\left(\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\ln u_n - \ln u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est équivalente à la suite strictement négative* $\left(-\dfrac{1}{12n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, elle est elle même* < 0 *à partir d'un certain rang. Cela montre que* $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroît à partir d'un certain rang.*
- *Par ailleurs, comme* $\ln u_n - \ln u_{n-1} = -\dfrac{1}{12n^2} + o(n^{-2})$*, on a*

$$\ln u_n - \ln u_{n-1} + \frac{1}{n^2} = \frac{11}{12n^2} + o(n^{-2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{11}{12n^2},$$

ce qui montre que cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang n_0.
En sommant, il vient, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\ln u_n - \ln u_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n}(\ln u_k - \ln u_{k-1}) \geqslant -\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

On en déduit $\ln u_n \geqslant \ln u_{n_0} - \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

La suite $(\ln u_n)_{n\geqslant 2}$ *est donc minorée par* $\left(\ln u_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 2}$*, qui est convergente, car égale à* $\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 2}$ *à une constante additive près.*

- *D'après le théorème de la limite monotone, la suite* $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge donc vers une certaine limite* $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Par continuité de l'exponentielle, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda} > 0$*, ce qui conclut.*

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_{2n} en fonction de $\binom{2n}{n}$.

   La relation de récurrence obtenue plus haut donne

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4} W_2 \\
&= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2} W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{(2n)^2\,(2n-2)^2\cdots 4^2 \times 2^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}\pi.
\end{aligned}$$

7. Montrer la *formule de Stirling* : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

   - *D'une part, l'équivalent obtenu plus haut montre* $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.
   - *D'autre part, comme la question précédente donne l'équivalent* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$*, on a*

$$\begin{aligned}
W_{2n} = \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}\pi = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}\,n!^2}\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^{2n+1}\,\left(\ell\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}\right)^2}\pi &= \frac{1}{\ell}\frac{2^{2n+\frac{1}{2}}\, n^{2n+\frac{1}{2}}\, e^{-2n}}{2^{2n+1}\, n^{2n+1}\, e^{-2n}}\pi \\
&= \frac{\pi}{\ell\,\sqrt{2n}}.
\end{aligned}$$

   On en déduit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ell\,\sqrt{2n}}$*, ce qui donne* $\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$*, ou encore* $\ell = \sqrt{2\pi}$.
   L'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ *se réécrit donc* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Partie III. Intégrale de Gauss.

On définit une fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \geqslant 0$, $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

8. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

   Par concavité du logarithme, on a $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \ln(1+x) \leqslant x$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $t \in \left[0, \sqrt{n}\right]$. *Les inégalités étant évidentes* ($0 \leqslant e^{-n} \leqslant 2^{-n}$) *pour* $t = \sqrt{n}$, *on va même supposer* $t \in \left[0, \sqrt{n}\right[$, *si bien que* $\frac{t^2}{n} \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \\
&\leqslant \exp\left(-n\frac{t^2}{n}\right) = e^{-t^2} && \textit{(concavité de } \ln \textit{ et croissance de } \exp\textit{)} \\
\textit{et} \qquad \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} &= \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) \\
&\geqslant \exp\left(-n\frac{t^2}{n}\right) = e^{-t^2}. && \textit{(concavité de } \ln \textit{ et décroissance de } x \mapsto e^{-x}\textit{)}
\end{aligned}$$

9. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \Phi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}$.

   La question précédente et la croissance de l'intégrale donnent

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \Phi(\sqrt{n}) \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

   Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \sqrt{n} \int_0^1 (1-u^2)^n\, du && \begin{bmatrix} t = \sqrt{n}\,u \\ dt = \sqrt{n}\,du \\ u \mapsto \sqrt{n}\,u \textit{ est } C^1 \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^n \cos\theta\, d\theta && \begin{bmatrix} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta\, d\theta \\ \sin \textit{ est } C^1 \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta = \sqrt{n}\, W_{2n+1} \\
\textit{et} \qquad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt &= \sqrt{n} \int_0^1 (1+u^2)^{-n}\, du && \begin{bmatrix} t = \sqrt{n}\,u \\ dt = \sqrt{n}\,du \\ u \mapsto \sqrt{n}\,u \textit{ est } C^1 \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2\theta)^{-n} (1 + \tan^2\theta)\, d\theta && \begin{bmatrix} u = \tan\theta \\ du = (1 + \tan^2\theta)\, d\theta \\ \tan \textit{ est } C^1 \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1 + \tan^2\theta)^{n-1}}\, d\theta \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}\theta\, d\theta && \left(\textit{car } \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2\right) \\
&\leqslant \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}\theta\, d\theta = \sqrt{n}\, W_{2n-2}.
\end{aligned}$$

10. Montrer $\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce que l'on notera plus tard $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- *La fonction Φ est clairement positive et croissante.*
  D'après le théorème de la limite monotone $\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
  Par composition, $\Phi(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.
- *Par ailleurs, l'équivalent $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donne $W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, et donc*

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sqrt{n}\,W_{2n-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- *D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\Phi(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.*
  Par unicité de la limite, on a $\gamma = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, c'est-à-dire $\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème B. Irrationalité : méthode de Niven (1947) et Parks (1986).

Dans tout le problème, on fixe un nombre $c > 0$.

- On définit $\mathcal{P}_c = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } Q^{(k)}(c) \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lisses sur le segment $[0, c]$ est dite *de Niven* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi'_{n+1} = \varphi_n \\ \varphi_n(0) \in \mathbb{Z} \\ \varphi_n(c) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- $f \in C^\infty([0, c])$ est dite *nivénienne* s'il existe une suite de Niven $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi_0 = f$.

Partie I. Préliminaires.

1. Montrer $\forall a \in \mathbb{R}, \dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   - *Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \dfrac{|a|^n}{n!}$ et que le résultat est évident si $a = 0$, il suffit de montrer le résultat pour $a > 0$, que l'on fixe dans la suite.*
   - *Soit $b > a$. On a, pour tout entier $n \geqslant b$,*

   $$\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \leqslant 1,$$

   ce qui montre que la suite positive $\left(\dfrac{b^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang, et donc bornée.
   - *On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^n}{n!} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \dfrac{b^n}{n!} = O\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right) = o(1)$, c'est-à-dire $\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

2. Soit $f, g \in C^0([0, c])$. Montrer

   $$\int_0^c f(t)\,\frac{g(t)^n}{n!}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   - *Notons $h_n : t \mapsto f(t)\,\dfrac{g(t)^n}{n!}$ l'intégrande.*
   Pour tout $t \in [0, c]$, on a $\left|f(t)\,\dfrac{g(t)^n}{n!}\right| \leqslant \|f\|_\infty \dfrac{\|g\|_\infty^n}{n!}$, c'est-à-dire $\|h_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \dfrac{\|g\|_\infty^n}{n!}$.
   D'après la question précédente, $\|f\|_\infty \dfrac{\|g\|_\infty^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
   - *Par contrôle uniforme, on en déduit $\displaystyle\int_0^c h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui était demandé.*

3. Montrer que $\mathcal{P}_c$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$ stable par dérivation.

   - *Il est clair que $1 \in \mathcal{P}_c$, et que $\mathcal{P}_c$ est stable par soustraction (par linéarité de la dérivation).*
   - *Soit $P, Q \in \mathcal{P}_c$. On a, pour tout $t \in \{0, c\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

   $$(PQ)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P^{(k)}(t)}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{Q^{(n-k)}(t)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z},$$

   ce qui montre $PQ \in \mathcal{P}_c$.

- *La stabilité par dérivation est claire car, pour tout* $P \in \mathcal{P}_c$, *tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $t \in \{0, c\}$, *on a*

$$\left(P'\right)^{(n)}(t) = P^{(n+1)}(t) \in \mathbb{Z}.$$

4. Soit $P \in \mathcal{P}_c$ tel que $P(0) = P(c) = 0$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* $A(n)$ *l'assertion «* $\dfrac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$. *»*
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ *par récurrence.*

Initialisation. *On a* $\dfrac{P^0}{0!} = 1$, *qui est clairement un élément de* $\mathcal{P}_c$.
Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $A(n)$. *Montrons* $A(n+1)$.

Le polynôme $\dfrac{P^{n+1}}{(n+1)!}$ *a pour dérivée*

$$\left(\frac{P^{n+1}}{(n+1)!}\right)' = P' \times \frac{P^n}{n!}.$$

D'après 3, on a $P' \in \mathcal{P}_c$. *Comme* $\dfrac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$ *d'après* $A(n)$, *on en déduit* $\left(\dfrac{P^{n+1}}{(n+1)!}\right)' \in \mathcal{P}_c$.
On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \{0, c\}, \left(\dfrac{P^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{(n)}(t) \in \mathbb{Z}$.
Comme, dans le cas $n = 0$, *on a* $\left(\dfrac{P^{n+1}}{(n+1)!}\right)(0) = \left(\dfrac{P^{n+1}}{(n+1)!}\right)(0) = 0$, *on a bien* $\dfrac{P^{n+1}}{(n+1)!} \in \mathcal{P}_c$, *ce qui montre* $A(n+1)$, *et conclut.*

5. Dans cette question, on suppose $c \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathcal{P}_c$ de degré 2 tel que $Q(0) = Q(c) = 0$ et $\forall x \in]0, c[, Q(x) > 0$.

Puisque c *est rationnel, on peut trouver* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $c = \dfrac{p}{q}$.
On vérifie alors sans difficulté que $Q = X(qX - p)$ *vérifie les propriétés demandées. Notamment, il appartient à* $\mathcal{P}_c$ *parce que :*
- $Q(0) = Q(c) = 0 \in \mathbb{Z}$;
- $Q' = 2qX - p$ *vaut* $-p \in \mathbb{Z}$ *en* 0 *et* $p \in \mathbb{Z}$ *en* c ;
- $Q'' = 2q$ *vaut* $2q \in \mathbb{Z}$ *en* 0 *et en* c ;
- *les dérivées ultérieures de* Q *sont nulles, donc elles prennent partout des valeurs entières.*

6. Déterminer $\mathcal{P}_c$ si $c \notin \mathbb{Q}$.

Supposons $c \notin \mathbb{Q}$.
- *Soit* $Q = aX + b$ *un polynôme de degré* 1 *appartenant à* $\mathcal{P}_c$. *On a donc* $a \neq 0$.
  - *Les coefficients* $a = Q'(0)$ *et* $b = Q(0)$ *sont des entiers.*
  - *La valeur* $Q(c) = ac + b$ *est entière, donc* $c = \dfrac{Q(c) - b}{a} \in \mathbb{Q}$, *ce qui constitue une contradiction.*

  L'anneau $\mathcal{P}_c$ *ne contient donc aucun élément de degré* 1.
- *Puisqu'il est stable par dérivation, il ne contient aucun élément de degré* $\geqslant 1$, *parce que si* $P \in \mathcal{P}_c$ *était de degré* $d \geqslant 1$, *on aurait* $P^{(d-1)} \in \mathcal{P}_c$, *de degré* 1, *ce qui constitue une contradiction.*
- *Ainsi, les éléments de* $\mathcal{P}_c$ *sont exactement les polynômes constants dont la valeur est entière.*

Partie II. Irrationalité.

7. Trouver $c > 0$ tel que la restriction de exp au segment $[0, c]$ soit nivénienne.

   Si $c = \ln 2$ *(ou le logarithme d'un entier* $\geqslant 2$*, plus généralement), on voit immédiatement que la suite constante* $(\exp)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Niven, et donc que* exp *est nivénienne.*

8. Soit $f \in C^\infty([0, c])$ une fonction nivénienne. Montrer $\forall Q \in \mathcal{P}_c, \displaystyle\int_0^c f(t)\,Q(t)\,dt \in \mathbb{Z}$.

   On va montrer ce résultat par récurrence sur le degré du polynôme. Plus précisément, pour tout $d \in \mathbb{N}$*, notons* $B(d)$ *l'assertion*

$$\forall Q \in \mathcal{P}_c, \forall g \in \mathcal{N}_c, \deg Q < d \Rightarrow \int_0^c g(t)\,Q(t)\,dt \in \mathbb{Z},$$

   où l'on a noté $\mathcal{N}_c$ *l'ensemble des fonctions nivéniennes.*
   Montrons $\forall d \in \mathbb{N}, B(d)$ *par récurrence, ce qui montrera l'énoncé demandé (pour toute fonction nivénienne* g*).*

   Initialisation. *Soit* $Q \in \mathcal{P}_c$ *et* $g \in \mathcal{N}_c$*. On suppose* $\deg Q < 0$*, c'est-à-dire* $Q = 0$*.*
   On a donc $\displaystyle\int_0^c gQ = 0 \in \mathbb{Z}$*.*

   Hérédité. *Soit* $d \in \mathbb{N}$ *tel que* $B(d)$*. Montrons* $B(d+1)$*.*
   Soit $Q \in \mathcal{P}_c$ *et* $g \in \mathcal{N}_c$*. On suppose* $\deg Q < d + 1$*, c'est-à-dire* $\deg Q \leqslant d$*.*
   Le point-clef est qu'alors Q' *est un polynôme de degré* $-\infty$ *ou* $\deg Q - 1$*, donc on a* $\deg Q' \leqslant d$ *: on va pouvoir lui appliquer l'hypothèse de récurrence.*
   Soit $g \in \mathcal{N}_c$*. On peut donc trouver une suite de Niven* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\varphi_0 = g$*. La suite* $(\varphi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *est alors clairement de Niven, donc* $G = \varphi_1$ *est une fonction nivénienne, qui est par ailleurs une primitive de* g*. On a alors*

$$\int_0^c g(t)\,Q(t)\,dt \overset{IPP}{=} [G(t)\,Q(t)]_{t=0}^c - \int_0^c G(t)\,Q'(t)\,dt. \quad \textit{(G et } t \mapsto Q'(t) \textit{ sont de classe } C^1\textit{)}$$

   Le terme tout intégré vaut $G(c)Q(c) - G(0)Q(0)$*. Comme* $Q \in \mathcal{P}_c$ *et* $G \in \mathcal{N}_c$*, tous les termes apparaissant dans cette formule sont entiers, donc* $[G(t)\,Q(t)]_{t=0}^c \in \mathbb{Z}$*.*
   Par ailleurs, on peut appliquer $B(d)$ *à* $Q' \in \mathcal{P}_c$ *(qui est tel que* $\deg Q' < d$*, comme on l'a dit) et* $G \in \mathcal{N}_c$ *: on obtient* $\displaystyle\int_0^c G(t)\,Q'(t)\,dt \in \mathbb{Z}$*.*
   Par différence, on a donc que $\displaystyle\int_0^c g(t)\,Q(t)\,dt \in \mathbb{Z}$*, ce qui montre* $B(d+1)$*, et clôt la récurrence.*

9. Déduire de tout ce qui précède le *théorème de Niven-Parks* : si $c > 0$ est rationnel, alors la seule fonction nivénienne $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ à valeurs positives est la fonction nulle.

   Supposons c *rationnel. Soit* $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ *une fonction nivénienne à valeurs positives.*
   D'après la question 5, on peut trouver dans $\mathcal{P}_c$ *un polynôme* Q *de degré 2, nul en 0 et en* c*, et prenant des valeurs* > 0 *sur* $]0, c[$*.*
   D'après la question 4, tous les polynômes de la suite $\left(\dfrac{Q^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *appartiennent à* $\mathcal{P}_c$*.*
   En particulier, on a, d'après la question 8, $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^c f(t)\,\frac{Q(t)^n}{n!}\,dt \in \mathbb{Z}$*.*
   Or, d'après la question 2, on sait que $\displaystyle\int_0^c f(t)\,\frac{Q(t)^n}{n!}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

On peut donc trouver un $N \in \mathbb{N}$ *à partir duquel cette intégrale est comprise entre* $-\dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{1}{2}$*. Comme elle est entière, cela montre que* $\displaystyle\int_0^c f(t)\,\frac{Q(t)^N}{N!}\,dt = 0$.
Puisque f *et* Q *sont des fonctions continues et positives, il en va de même de l'intégrande de cette intégrale. Par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que* $\forall t \in [0, c]\,, f(t)\dfrac{Q(t)^N}{N!} = 0$.
Comme le polynôme Q *prend des valeurs* > 0 *sur l'intervalle* $]0, c[$*, il en va de même de sa puissance* N*-ième. On en déduit* $\forall t \in\,]0, c[\,, f(t) = 0$.
Comme $]0, c[$ *est dense dans* $[0, c]$*, on en déduit* $f = 0$*, par prolongement des identités (version continue).*

10. (a) i. Montrer que $\ln(2) \notin \mathbb{Q}$.

On a vu à la question 7 que $(\exp)_{n\in\mathbb{N}}$ *était une suite de Niven dans le cas* $c = \ln 2$.
On en déduit que $\exp : [0, c] \to \mathbb{R}$ *est une fonction nivénienne, et elle est clairement positive et non nulle.*
D'après la contraposée du théorème de Niven-Parks, on en déduit que $\ln 2 \notin \mathbb{Q}$.

ii. Soit $r > 0$ un nombre rationnel. Montrer que $\ln(r) \notin \mathbb{Q}$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $r = \dfrac{p}{q}$.
La fonction $f : x \mapsto q e^x$ *est alors égale à sa propre dérivée, et vérifie*

$$f(0) = q \in \mathbb{Z} \qquad \textit{et} \qquad f(\ln r) = q\,r = p \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit donc que la suite constante $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Niven, et donc que* $f : [0, \ln r] \to \mathbb{R}$ *est nivénienne.*
Comme elle est clairement positive et non nulle, la contraposée du théorème de Niven-Parks montre que $\ln r \notin \mathbb{Q}$.

iii. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $e \in \mathbb{Q}$*. D'après la question précédente, on en déduit que* $\ln e \notin \mathbb{Q}$.
Comme $\ln e = 1$*, c'est absurde.*
On en déduit donc $e \notin \mathbb{Q}$.

(b) Montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$*, on définit la fonction*

$$\varphi_n = \begin{cases} (-1)^{k/2} \sin & \textit{si } k \textit{ pair} \\ (-1)^{(k+1)/2} \cos & \textit{si } k \textit{ impair.} \end{cases}$$

Si l'on prend $c = \pi$*, on vérifie facilement que* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Niven et donc que la fonction* $\varphi_0 = \sin : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *est nivénienne.*
Comme elle est positive et non nulle, on en déduit que $\pi \notin \mathbb{Q}$*, toujours d'après la contraposée du théorème de Niven-Parks.*

(c) Montrer que $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right) \notin \mathbb{Q}$.

Le nombre $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$ *est l'unique élément de* $[0, \pi]$ *dont le cosinus vaille* $\dfrac{3}{5}$.
En particulier, $s = \sin\left(\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$ *est un nombre positif tel que*

$$s^2 = 1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) = 1 - \frac{3^2}{5^2} = \frac{5^2 - 3^2}{5^2} = \frac{4^2}{5^2}.$$

Comme $s \geqslant 0$*, on en déduit* $s = \dfrac{4}{5}$.
Si l'on reprend la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la question précédente, on a les appartenances* $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(c) \in \left\{\pm\dfrac{3}{5}, \pm\dfrac{4}{5}\right\}$*. Ainsi,* $\forall n \in \mathbb{N}, 5\varphi_n(c) \in \mathbb{Z}$.
Les autres propriétés étant héritées directement des propriétés correspondantes de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on en déduit immédiatement que la suite* $(5\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Niven pour* $c = \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$*, et donc que la fonction* $5\sin : \left[0, \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\right] \to \mathbb{R}$ *est nivénienne.*
Cette fonction étant positive et non nulle, la contraposée du théorème de Niven-Parks montre que $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right) \notin \mathbb{Q}$.