DM 21 : deux grands classiques

Problème A. Wallis, Stirling, Gauss.

Partie I. Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs $\geqslant 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre W_{n+1} et W_{n-1}.
   En déduire que la suite $\left(n\, W_n\, W_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{2} \leqslant n\, W_n^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et en déduire un équivalent simple de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II. Formule de Stirling.

On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. (a) Déterminer un équivalent de la suite $\left(\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)_{n\geqslant 2}$.

   (b) En admettant – on l'a montré en TD – que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell > 0$.
   Indication. *On pourra par exemple minorer la suite* $(\ln u_n)_{n\geqslant 2}$ *par une suite convergente.*
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_{2n} en fonction de $\dbinom{2n}{n}$.
7. Montrer la *formule de Stirling* : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Partie III. Intégrale de Gauss.

On définit une fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \geqslant 0$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

8. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right], \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
9. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \Phi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}$.
   Indication. *On pourra faire deux changements de variables successifs : d'abord* $t = \sqrt{n}\, u$*, puis un second (qui ne sera pas le même dans les deux intégrales) introduisant des fonctions trigonométriques...*
10. Montrer $\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce que l'on notera plus tard $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème B. Irrationalité : méthode de Niven (1947) et Parks (1986).

Dans tout le problème, on fixe un nombre $c > 0$.

- On définit $\mathcal{P}_c = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } Q^{(k)}(c) \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lisses sur le segment $[0, c]$ est dite *de Niven* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi'_{n+1} = \varphi_n \\ \varphi_n(0) \in \mathbb{Z} \\ \varphi_n(c) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- $f \in C^\infty([0, c])$ est dite *nivénienne* s'il existe une suite de Niven $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi_0 = f$.

Partie I. Préliminaires.

1. Montrer $\forall a \in \mathbb{R}, \dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $f, g \in C^0([0, c])$. Montrer

$$\int_0^c f(t)\,\frac{g(t)^n}{n!}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

3. Montrer que $\mathcal{P}_c$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$ stable par dérivation.
4. Soit $P \in \mathcal{P}_c$ tel que $P(0) = P(c) = 0$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$.
5. Dans cette question, on suppose $c \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathcal{P}_c$ de degré 2 tel que $Q(0) = Q(c) = 0$ et $\forall x \in \,]0, c[\,, Q(x) > 0$.
6. Déterminer $\mathcal{P}_c$ si $c \notin \mathbb{Q}$.
   Indication. *On pourra commencer par déterminer les éléments de $\mathcal{P}_c$ de degré 1.*

Partie II. Irrationalité.

7. Trouver $c > 0$ tel que la restriction de exp au segment $[0, c]$ soit nivénienne.
8. Soit $f \in C^\infty([0, c])$ une fonction nivénienne. Montrer $\forall Q \in \mathcal{P}_c, \displaystyle\int_0^c f(t)\,Q(t)\,dt \in \mathbb{Z}$.
9. Déduire de tout ce qui précède le *théorème de Niven-Parks* : si $c > 0$ est rationnel, alors la seule fonction nivénienne $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ à valeurs positives est la fonction nulle.
10. (a) i. Montrer que $\ln(2) \notin \mathbb{Q}$.
    ii. Soit $r > 0$ un nombre rationnel. Montrer que $\ln(r) \notin \mathbb{Q}$.
    iii. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.
    (b) Montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.
    (c) Montrer que $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right) \notin \mathbb{Q}$.