DM 23 : deux déterminants

Problème. Déterminants de Hankel.

Soit $n \geqslant 2$. Étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$,

- on note A_i^j, la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$;
- de même, pour tous $i_1 \neq i_2$ et $j_1 \neq j_2 \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i_1,i_2}^{j_1,j_2}$ la matrice $(n-2)\times(n-2)$ obtenue en supprimant les lignes numéro i_1 et i_2 et les colonnes numéro j_1 et j_2 de A.

Avec ces notations, les deux premières parties du problème sont consacrées à la démonstration, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, de la *formule de condensation de Desnanot-Jacobi* :

$$\text{dét}(A)\ \text{dét}(A_{1,n}^{1,n}) = \text{dét}(A_1^1)\ \text{dét}(A_n^n) - \text{dét}(A_1^n)\ \text{dét}(A_n^1). \tag{DJ}$$

Partie I. Formule de condensation de Desnanot-Jacobi, cas inversible.

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ **inversible.**

Soit $B = \begin{pmatrix} \text{dét}(A_1^1) & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}\,\text{dét}(A_n^1) \\ -\,\text{dét}(A_1^2) & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}\,\text{dét}(A_n^2) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ (-1)^n\,\text{dét}(A_1^{n-1}) & 0 & \cdots & 1 & -\,\text{dét}(A_n^{n-1}) \\ (-1)^{n+1}\,\text{dét}(A_1^n) & 0 & \cdots & 0 & \text{dét}(A_n^n) \end{pmatrix}$ la matrice obtenue en remplaçant les colonnes extrêmes de I_n par celles de $\text{com}(A)^T$.

1. Montrer $\text{dét}\, B = \text{dét}(A_1^1)\ \text{dét}(A_n^n) - \text{dét}(A_1^n)\ \text{dét}(A_n^1)$.
2. Calculer AB et en déduire $\text{dét}(AB) = \text{dét}(A)^2\ \text{dét}(A_{1,n}^{1,n})$.
3. En déduire l'égalité (DJ), toujours sous l'hypothèse d'inversibilité de A.

Partie II. Un argument de densité.

4. **Polynôme caractéristique.** Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que la fonction $\chi_M : x \mapsto \text{dét}(xI_n - M)$ est polynomiale, unitaire, de degré n.
5. Montrer l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \delta[$, $M - x\, I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$.
   Justifier que les fonctions $x \mapsto \text{dét}(M - x\, I_n)$ et $x \mapsto \text{dét}\left((M - x\, I_n)_i^j\right)$ sont continues.
7. Déduire de tout ce qui précède l'égalité (DJ), pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Partie III. Caractérisation des suites récurrentes.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on définit le *déterminant de Hankel* (de taille $(p+1)\times(p+1)$)

$$\mathcal{H}_p(n) = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \cdots & u_{n+2p} \end{vmatrix}$$

avec la convention $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_{-1}(n) = 1$.

8. Montrer que la suite u est géométrique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_2(n) = 0$.
9. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_p(n)\,\mathcal{H}_{p-2}(n+2) = \mathcal{H}_{p-1}(n+2)\,\mathcal{H}_{p-1}(n) - \mathcal{H}_{p-1}(n+1)^2$.
10. Soit $p, n_0 \in \mathbb{N}$.
    On suppose que la suite u est *récurrente d'ordre* p *à partir du rang* n_0, c'est-à-dire que

$$\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R} : \forall n \geqslant n_0, u_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j\, u_{n+j}. \qquad (\maltese)$$

    Montrer que $\forall n \geqslant n_0, \mathcal{H}_p(n) = 0$.

La fin du problème est consacrée à la réciproque de la question précédente. On suppose donc avoir trouvé $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\mathcal{H}_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit nulle à partir d'un certain rang. On suppose que p est le plus petit entier possédant cette propriété.
On veut alors montrer que la suite u vérifie une certaine relation de récurrence ($\maltese$).

11. En utilisant notamment la question 8, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \begin{cases} \mathcal{H}_p(n) = 0 \\ \mathcal{H}_{p-1}(n) \neq 0. \end{cases}$
12. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{cases} u_{n+p} = \lambda_0\, u_n + \lambda_1\, u_{n+1} + \cdots + \lambda_{p-1}\, u_{n+p-1} \\ u_{n+p+1} = \lambda_0\, u_{n+1} + \lambda_1\, u_{n+2} + \cdots + \lambda_{p-1}\, u_{n+p} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ u_{n+2p-1} = \lambda_0\, u_{n+p-1} + \lambda_1\, u_{n+p} + \cdots + \lambda_{p-1}\, u_{n+2p-2}. \end{cases}$$

13. Montrer que le p-uplet de la question précédente ne dépend en fait pas de $n \geqslant n_0$, et conclure.

Exercice. Le déterminant de Pascal.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note B_n la matrice $(n+1) \times (n+1)$:

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+2}{n} \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & \binom{n+2}{n-1} & \binom{n+3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+2}{3} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} & \binom{2n-1}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{2} & \binom{n+3}{3} & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} & \binom{2n}{n} \end{pmatrix}.$$

Cet exercice propose deux méthodes pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, \det B_n = 1$.

On se permet dans cet exercice d'indexer les lignes et les colonnes des matrices $(n+1) \times (n+1)$ *par* $[\![0, n]\!]$ *plutôt que par* $[\![1, n+1]\!]$*, ce qui donne des formules plus simples.*

1. (a) Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme P_k soit de degré k et de coefficient dominant λ_k.
   Calculer le déterminant de la matrice $\big(P_i(x_j)\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

   (b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \det B_n = 1$.

2. (a) Montrer $\forall i, j \in \mathbb{N}, \displaystyle\binom{i+j}{j} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{j}{k}$.

   (b) En déduire que $B_n = A_n\, A_n^T$, pour une certaine matrice $A_n \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ triangulaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1, et conclure.

Remarque. *Si vous avez deux heures et demie à perdre, le mathématicien Tim Gowers s'est filmé en train de réfléchir en direct à ce calcul. Il est intéressant de le voir hésiter, explorer des chemins qui s'avèrent être des impasses, commettre de petites erreurs, etc. avant d'obtenir une solution élégante (celle de la question 2). La première des trois vidéos est disponible à l'adresse* `http://tiny.cc/gowers`